

含圆孔压电板弯曲问题*

BENDING PROBLEM OF PIEZOELECTRIC PLATE WITH A CIRCULAR HOLE

杨丽敏** 柳春图 曾晓辉

(中国科学院力学研究所 工程科学部, 北京 100080)

YANG LiMin LIU ChunTu ZENG XiaoHui

(Department of Engineering Sciences, Institute of Mechanics Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

摘要 基于 Reissner 板理论将有限元法和解析法相结合, 研究含孔压电板的力电集中问题。压电板为无穷大板受纯弯曲作用, 上下表面电源短路, 给出含孔压电板方程的通解。结果表明, ①压电效应对面内弯曲正应力的影响很小, 可忽略不计。②压电效应对剪应力影响较大, 切向电场强度和电位移的集中程度随径厚比的改变而变化的趋势和切向剪力的相同。③中面上孔边的电势和垂直于板中面方向的电场强度的集中程度随径厚比的减小而减弱, 垂直于中面方向的电位移的集中程度随径厚比的减小而增强。如果不考虑压电效应, 文中的结果可以退化到非压电板含孔受纯弯曲作用的结果, 这也反映了文中通解的正确性。

关键词 圆孔 压电板 弯曲**中图分类号** O343.4 TB381

Abstract A new method for bending problem of piezoelectric plate with a circular hole was proposed based on Reissner plate theory including the transverse shear deformability of the plate. The general solutions of the plate equations were given. With the finite element software Ansys, the problem of infinite plate with a circular hole under purely bending and short electric boundary condition was solved numerically. The results account for ①The influence of piezoelectric on the bending stresses is very small, therefore it can be ignored. ②The piezoelectric influence on the shear stress is relatively much larger. In addition, the concentration phenomena of tangential electric strength and the electric displacement parallel to the middle plane change with the ratio of the hole diameter to plate thickness in the same way as that of the shear stress at the edge of the circular hole. ③The concentration phenomenon of electric potential in the middle plane is also evidently. However this phenomenon decays as the reduction of the ratio of the hole diameter to plate thickness. That is to say, the concentration phenomenon of electric strength vertical to the middle plane turns to be weaker, however the electric displacement turns to be stronger. This work can also be successfully deduced to the case of corresponding the non-piezoelectric plate with a circular hole under purely bending load at infinity if piezoelectric influence is not considered.

Key words Hole; Piezoelectric; Plate; Bending

Corresponding author: YANG LiMin, E-mail: yang_liminimech@yahoo.com.cn, Fax: +86-10-62561284

Manuscript received 20031031, in revised form 20031208.

1 引言

由于压电材料独特的力电耦合性质, 被广泛应用于先进智能结构设计中, 它既可以用作具有感知功能的传感器, 又可以用作具有致动功能的执行器。由于材料固有的脆性, 压电材料在制造和极化及使用过程中可能产生缺陷, 会出现力和电载荷的集中, 从而导致裂纹的产生和扩展, 最终造成压电元件的失效, 这将大大影响这类材料力学性能的完整性和力电耦合的行为。因此, 有必要用力电耦合的观点从理论上分析和描述孔洞或裂纹附近场的分布。近年来, 国内外不少学者对含有孔洞或裂纹的压电材料结构的力电集中现

象进行了研究。

对于裂纹问题, 目前大多研究平面和反平面问题 (Pak^[1]、Sosa^[2-4]、Suo 等^[5]、Zhang 和 Hack^[6]、Park 和 Sun^[7]、Qin 和 Yu^[8]、Liu 等^[9]、Gao 和 Wang^[10]、Han 和 Wang^[11], 等)。关于三维问题, 目前只对一些特殊的问题进行了研究。Sosa 和 Pak^[12]用特征函数法考虑了半无限长的裂纹。Wang^[13,14]用傅氏变换方法获得了压电材料含有椭圆夹杂与扁平椭圆裂纹的应力和电位移的强度因子的表达式。对于横观各项同性压电材料中的圆币型裂纹, Huang^[15]获得了复数形式的应力和电位移的强度因子的表达式, 包括三种加载方式, 拉伸、剪切、均匀的作用在无穷远处电位移。Pak^[16]用分布

* 20031031 收到初稿, 20031208 收到修改稿。

** 杨丽敏, 女, 1971 年 8 月生, 辽宁省鞍山市台安县人, 汉族。中科院力学研究所博士研究生, 主要研究方向为压电材料的强度分析。

位错法计算了有限裂纹镶嵌在无限大的压电介质中的电弹性场和能量释放率,加载方式为力电同时加载。Kogan^[17]等人推出了横观各向同性体中含有椭圆夹杂的极限情况圆币型裂纹受轴对称加载的强度因子。对于圆孔或圆形夹杂问题,主要研究了平面问题(Sosa^[2]和 Liu Jinxi 等^[18])、反平面问题(Honein 等^[19]和 Pak^[20])和三维轴对称问题(丁皓江等^[21])。在工程应用中,压电元件或部件往往是以板或壳的结构形式出现的。所以研究含孔洞或裂纹的压电板或壳就显得非常必要了。

2 问题的阐述

以下从压电材料的基本方程出发,采用 Reissner^[22]板理论来研究含圆孔压电板的弯曲问题。

因为压电材料大都是横观各向同性材料,所以选取横观各向同性的压电材料为研究对象。当 $(x_1 - x_2)$ 为各向同性面,各向同性轴 (x_3) 为极化轴时(如图 1 所示),物理方程为(Nellya^[23])

$$\{\epsilon\} = [s]\{\sigma\} + [d]\{E\} \quad (1)$$

$$\{D\} = [d]^T\{\sigma\} + [\beta]\{E\} \quad (2)$$

其展开形式为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\{E\} = -\frac{\partial}{\partial \{x\}}\psi \quad (5)$$

其中 $\{\sigma\}$ 、 $\{\epsilon\}$ 、 $\{D\}$ 、 $\{E\}$ 、 ψ 分别表示应力、应变、电位移、电场强度和电势, $[s]$ 、 $[d]$ 、 $[\beta]$ 分别表示材料的柔度系数、压电常数和介电常数矩阵。取板的中面 $(x_1 - x_2)$ 为各向同性面,极化轴 (x_3) 垂直于板的中面,考虑传感器的情况,板的上下表面接地,这种工况和双悬臂梁或板为传感器相类似。板的几何形状如图 2 所示,一块在远方受均匀弯曲的板,若板中央开一个半径为 r_0 的小孔,孔的尺寸较板尺寸小得多,则可以把板看作一块在远方具有均匀弯曲应力场的无限大板,板厚为 h 。

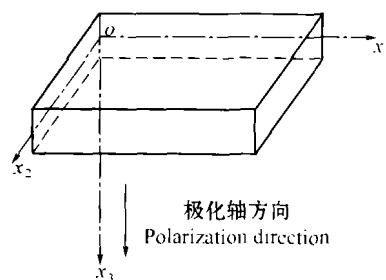


图 1
Fig. 1

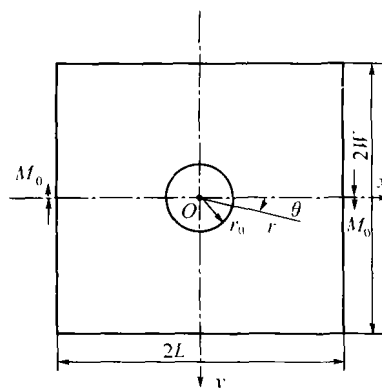


图 2
Fig. 2

由于采用 Reissner 型板壳理论比采用 Kirchhoff 板壳理论研究孔边附近的应力集中更具科学性,所以下面采用 Reissner 型板壳理论来研究含圆孔压电板的弯曲问题,即 ① 变形前垂直于中面的直线段,在变形后仍保持直线,且其长度方向的变形可以略去,但不假设它仍垂直于变形后的中面。② 平行于中面的各层互不挤压。为了研究方便采用极坐标系,这样 Reissner 型压电板的变形可以用四个独立的广义位移分量描述,即中面挠度 $w(r, \theta)$,变形前垂直于中面的直线段分别在 orx_3 与 $o\theta x_3$ 平面内的转角 ϕ_r 和 ϕ_θ ,以及描述电的量——电势 ψ 。 ϕ_r 以从 r 轴经 90° 到 x_3 轴的转向为正, ϕ_θ 以从 θ 轴经 90° 到 x_3 轴的转向为正。

由于所研究的仍为小变形,板内任意一点的极坐标位移分量表示为

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, x_3) &= -x_3 \phi_r(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta, x_3) &= -x_3 \phi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, x_3) &= w(r, \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

利用位移表达式, 可以求得 Reissner 型压电板在极坐标系下的几何方程

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= -x_3 \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= -x_3 \left(\frac{\partial \phi_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= -x_3 \left(\frac{\partial \phi_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right) \\ \gamma_{r3} &= \frac{\partial w}{\partial r} - \phi_r \\ \gamma_{\theta 3} &= \frac{\partial w}{r \partial \theta} - \phi_\theta \end{aligned} \quad (7)$$

从基本假定②可以得出 $\sigma_{33} = 0$, 代入压电的本构方程(3) 可得板的三个面内应力分量与应变分量的本构方程为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}(1-\nu^2)} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) - \frac{d_{31}}{s_{11}} \frac{1}{1-\nu} E_3 \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}(1-\nu^2)} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) - \frac{d_{31}}{s_{11}} \frac{1}{1-\nu} E_3 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \gamma_{r\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\nu = -\frac{s_{12}}{s_{11}}, \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = \frac{1}{2s_{11}(1+\nu)}$

根据文献[24], 假设电势 ψ 沿板厚的分布为抛物型分布, 则有

$$\psi = \psi_0(r, \theta)(h^2/4 - x_3^2) \quad (9)$$

电场强度由式(5) 展开为

$$E_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \quad E_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad (10)$$

把三个面内的应力分量沿板厚度方向积分得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} x_3 dx_3 = \frac{h^3}{12(s_{11}^2 - s_{12}^2)} \times \\ &\begin{bmatrix} -s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{s_{11} + s_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} \\ \frac{\partial \phi_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \end{Bmatrix} + \\ &\frac{d_{31}}{s_{11} + s_{12}} \begin{bmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 dx_3 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 dx_3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 dx_3 = -\frac{\psi_0(x_1, x_2)}{6} h^3$

对于板的横向剪应力由三维弹性力学平衡方程和板上下表面边界条件

$$x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad \tau_{r3} = 0 \quad \tau_{\theta 3} = 0$$

可以得出

$$\begin{aligned} \tau_{r3} &= \frac{3}{2h^3} (h^2 - 4z^2) Q_r \\ \tau_{\theta 3} &= \frac{3}{2h^3} (h^2 - 4z^2) Q_\theta \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{r3} \\ \tau_{\theta 3} \end{Bmatrix} dx_3$

横向剪力由能量等效原则可以推出表达式为

$$\begin{aligned} Q_r &= c_{44} \left[\frac{5}{6} h \left(-\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - d_{15} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_r dx_3 \right] = \\ &c_{44} \left[\frac{5}{6} h \left(-\phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{h^3}{6} d_{15} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right] \\ Q_\theta &= c_{44} \left[\frac{5}{6} h \left(-\phi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - d_{15} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_\theta dx_3 \right] = \\ &c_{44} \left[\frac{5}{6} h \left(-\phi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + \frac{h^3}{6} d_{15} \frac{\partial \psi_0}{r \partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $c_{44} = 1/s_{44}$

由式(4) 可得电位移

$$\begin{aligned} D_r &= \beta_{11} E_r + d_{15} \tau_{r3} \\ D_\theta &= \beta_{11} E_\theta + d_{15} \tau_{\theta 3} \\ D_3 &= \beta_{33} E_3 + d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (14)$$

不计体积力并无横向载荷作用时, Reissner 型板以内力表示的平衡方程为

$$\begin{aligned} \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} - Q_r &= 0 \\ \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_\theta &= 0 \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(Q_r + \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

把板的内力表达式代入平衡方程, 得到 Reissner 型压电板的以广义位移分量表示的平衡微分方程

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} - \frac{\phi_r}{r^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r \partial \theta} - \right. \\ \left. \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{h^2}{5} d_{15} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \phi_r \right) + \\ \frac{d_{31} h^3}{6s_{11}(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

$$D\left(\frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1-\nu}{2r^2} \phi_\theta\right) + C\left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{h^2}{5} d_{15} \frac{\partial \psi_0}{r \partial \theta} - \phi_2\right) + \frac{d_{31} h^3}{6s_{11}(1-\nu)} \frac{\partial \psi_0}{r \partial \theta} = 0$$

$$C\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{h^2}{5} d_{15} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_0}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2}\right) - \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}\right)\right] = 0 \quad (16)$$

其中

$$D = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)s_{11}} \quad C = \frac{5}{6} hc_{44}$$

$$c_{44} = \frac{1}{2(1+\nu)s_{11}}$$

对于电的平衡方程,由变分原理表示如下

$$\int_V D_{i,i} \delta \psi = 0 \quad (17)$$

在极坐标下 $D_{i,i} = \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

把式(9)代入式(17),可得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_{i,i} (h^2/4 - x_3^2) dx_3 = 0 \quad (18)$$

展开形式为

$$-5\left(\frac{d_{31}}{s_{11} + s_{12}} + c_{44} d_{15}\right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{\partial \phi_r}{\partial r}\right) + 5c_{44} d_{15} \nabla^2 w + h^2 (c_{44} d_{15}^2 - \beta_{11}) \nabla^2 \psi_0 + 10\left[\frac{2d_{31}^2}{s_{11}(-1+\nu)} + \beta_{33}\right] \psi_0 = 0 \quad (19)$$

边界条件:设板在无限远处的状态是 x_1 轴向纯弯曲,即

$$M_{11} = M_0 \quad M_{22} = M_{12} = 0 \quad Q_1 = Q_2 = 0$$

改用极坐标,上述条件变为

$$M_r = \frac{1}{2} M_0 [1 + \cos(2\theta)] \quad (20a)$$

$$M_{r,\theta} = -\frac{1}{2} M_0 \sin(2\theta) \quad (20b)$$

$$M_\theta = \frac{1}{2} M_0 [1 - \cos(2\theta)] \quad (20c)$$

$$Q_r = 0 \quad Q_\theta = 0 \quad (20d)$$

圆孔是个自由边,因此力的边界条件在 $r = r_0$ 处

$$M_r = 0 \quad M_{r,\theta} = 0 \quad Q_r = 0 \quad (21)$$

同时还要满足电的边界条件,因为孔内是空气或真空,可以认为满足不导通边界条件,即在圆孔处和无穷远处都要满足

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_r \delta \psi dx_3 = 0$$

即为 $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_r (h^2/4 - x_3^2) dx_3 = 0 \quad (22)$

3 问题的求解

胡海昌^[25]指出, ϕ_r 和 ϕ_θ 可由另外两个函数 $F(r, \theta)$ 和 $f(r, \theta)$ 表示

$$\phi_r = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \quad \phi_\theta = \frac{\partial F}{r \partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r} \quad (23)$$

这种表示总是可能的,但不是唯一的,齐次方程

$$\frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{\partial f_0}{r \partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial F_0}{r \partial \theta} - \frac{\partial f_0}{\partial r} = 0 \quad (24)$$

是 Cauchy-Riemann 方程,有解存在,且其解可以用一个解析函数 $\varphi(r + i\theta)$ 表示

$$f_0 + iF_0 = \varphi(r + i\theta) \quad (25)$$

若根据齐次方程之解将 F 增加 F_0 , f 增加 f_0 , 不会改变 ϕ_r 、 ϕ_θ 之值。

将式(23)代入式(16)前两个方程,得到

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[D \nabla^2 F + C \left(w + \left(\frac{h^2}{5} d_{15} + \frac{d_{31} h^3}{6s_{11} C(1-\nu)} \right) \psi_0 - F \right) \right] + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{r \partial \theta} \left[D \nabla^2 F + C \left(w + \left(\frac{h^2}{5} d_{15} + \frac{d_{31} h^3}{6s_{11} C(1-\nu)} \right) \psi_0 - F \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf \right] = 0 \quad (26)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

将方程组(26)方括号内的函数组合看作两个独立函数,那么此方程组又是一个 Cauchy-Riemann 方程,它的解可由一个解析函数 $C\Phi(r + i\theta)$ (其中 $i = \sqrt{-1}$) 表示

$$\frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf + i \left[D \nabla^2 F + C \left(w + \left(\frac{h^2}{5} d_{15} + \frac{d_{31} h^3}{6s_{11} C(1-\nu)} \right) \psi_0 - F \right) \right] = C\Phi(r + i\theta) \quad (27)$$

这是 F 、 f 、 w 、 ψ_0 的非齐次微分方程,它的解可以表示为任一特解与相应齐次方程通解之和。由于解析函数 $\Phi(r + i\theta)$ 的实部和虚部都是调和函数,方程(27)的特解 F_1 、 f_1 、 w_1 、 ψ_{01} 可以取为

$$f_1 + iF_1 = -\Phi(r + i\theta) \quad w_1 = 0 \quad \psi_{01} = 0 \quad (28)$$

而相应的齐次方程为

$$\frac{D}{2}(1-\nu)\nabla^2 f - Cf = 0$$

$$D\nabla^2 F + C\left[w + \left(\frac{h^2}{5}d_{15} + \frac{d_{31}h^3}{6s_{11}C(1-\nu)}\right)\psi_0 - F\right] = 0 \quad (29)$$

特解(28)不产生挠度,同时由对式(25)的说明,它也不影响 ϕ_r 、 ϕ_θ 的值,因此这组特解可被略去。

由式(29)的第二式推出

$$w + \frac{h^2}{5}d_{15}\psi_0 = -\frac{D}{C}\nabla^2 F - \frac{d_{31}h^3}{6s_{11}C(1-\nu)}\psi_0 + F \quad (30)$$

把式(23)、(30)代入式(16)的第三个方程,得到

$$D\nabla^2 \nabla^2 F + \frac{d_{31}h^3}{6s_{11}(1-\nu)}\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (31)$$

把式(30)代入式(19),则电的平衡方程变为

$$\begin{aligned} &-\frac{5c_{44}d_{15}D}{C}\nabla^2 \nabla^2 F - \left[\frac{5d_{31}h^3c_{44}d_{15}}{6s_{11}(1-\nu)C} + \beta_{11}h^2\right]\nabla^2 \psi_0 + \\ &10\left[\frac{2d_{31}^2}{s_{11}(-1+\nu)} + \beta_{33}\right]\psi_0 + \frac{5d_{31}}{s_{11}(-1+\nu)}\nabla^2 F = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

把上式取调和运算

$$\begin{aligned} &-\frac{5c_{44}d_{15}D}{C}\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F - \left[\frac{5d_{31}h^3c_{44}d_{15}}{6s_{11}(1-\nu)C} + \beta_{11}h^2\right]\nabla^2 \nabla^2 \psi_0 + \\ &10\left[\frac{2d_{31}^2}{s_{11}(-1+\nu)} + \beta_{33}\right]\nabla^2 \psi_0 + \frac{5d_{31}}{s_{11}(-1+\nu)}\nabla^2 \nabla^2 F = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

把式(31)化为

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -\frac{d_{31}h^3}{6s_{11}(1-\nu)D}\nabla^2 \psi_0 \quad (34)$$

把式(34)代入式(33)得到

$$(-\beta_{11}h^2)\nabla^2 \nabla^2 \psi_0 + 10\left(-\frac{d_{31}^2}{s_{11}} + \beta_{33}\right)\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (35)$$

可以化为

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi_0 - a\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (36)$$

其中 $a = 10\left(-\frac{d_{31}^2}{s_{11}} + \beta_{33}\right) / (-\beta_{11}h^2)$, 且 $a > 0$

所以本问题需要求解以下几个方程并满足相应的边界条件

$$\frac{D}{2}(1-\nu)\nabla^2 f - Cf = 0 \quad (37a)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi_0 - a\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (37b)$$

$$D\nabla^2 \nabla^2 F + b\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad (37c)$$

其中 $b = \frac{d_{31}h^3}{6s_{11}(1-\nu)D}$ 。然后把所求的解代入式(30)

可以得到 w 的表达式

$$w = -\frac{D}{C}\nabla^2 F - \frac{d_{31}h^3}{6s_{11}C(1-\nu)}\psi_0 + F - \frac{h^2}{5}d_{15}\psi_0 \quad (38)$$

从上述方程可以看出,式(37a)和式(37b)解耦,可分别求出 f 、 ψ_0 ,代入式(37c)可求 F ,最后由式(38)求出 w 的表达式,把这些函数代入边界条件确定未知系数。

先求式(37a),由分离变量法可得方程的解为

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} \{E_n I_n(2\kappa r) + F_n K_n(2\kappa r)\} + E_0 I_0(2\kappa r) + F_0 K_0(2\kappa r) \quad (39)$$

其中 $\kappa^2 = \frac{C}{2D(1-\nu)}$

同样可以求出方程(37b)的解

$$\begin{aligned} \psi_0 = &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} \{C_n I_n(\sqrt{ar}) + D_n K_n(\sqrt{ar})\} + \\ &C_0 I_0(\sqrt{ar}) + D_0 K_0(\sqrt{ar}) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} \{(-A_n/a)r^n + (-B_n/a)r^{-n}\} + \\ &(-A_0/a) + (-B_0/a)\ln r \end{aligned} \quad (40)$$

把 ψ_0 的表达式(40)代入式(37c),按求解方程(37b)类似的方法可以求出方程(37c)的解为

$$\begin{aligned} DF = &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} \{G_n r^n + H_n r^{-n}\} + G_0 + H_0 \ln r + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} \{P_n^* r^{n+2} + Q_n^* r^{-n+2}\} + \frac{P_1^*}{\sin\theta} r^3 + \\ &Q_1^* r \ln r + P_0^* r^2 + Q_0^* r^2 \ln r - \\ &\frac{b}{a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{\sin(n\theta)} \{C_n I_n(\sqrt{ar}) + D_n K_n(\sqrt{ar})\} + \right. \\ &\left. C_0 I_0(\sqrt{ar}) + D_0 K_0(\sqrt{ar}) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

其中

$$P_n^* = \frac{P_n + \frac{b}{a}A_n}{4(n+1)}, \quad Q_n^* = \frac{Q_n + \frac{b}{a}B_n}{4(1-n)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$P_1^* = \frac{P_1 + \frac{b}{a}A_1}{8}, \quad Q_1^* = \frac{Q_1 + \frac{b}{a}B_1}{2}$$

$$P_0^* + Q_0^* = \frac{P_0 + \frac{b}{a}A_0}{4}, \quad Q_0^* = \frac{Q_0 + \frac{b}{a}B_0}{4}$$

在上述方程里, I_n 、 K_n 是变型的 Bessel 函数, A_n 、 B_n 、 C_n 、 D_n 、 E_n 、 F_n 、 G_n 、 H_n 、 P_n 、 Q_n 、 P_n^* 、 Q_n^* 为待定常数。把 F 、 ψ_0 的表达式代入式(38)可以求出 w 的表达式。把边界条件也用这些函数表示,可以确定函数里面的未知系数。

与边界条件有关的量用这些函数来表示的表达式为

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + (1+\nu) \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + (1-\nu) \frac{\partial^2 f}{r \partial r \partial \theta}\right) + 2d_{31}(1+\nu)\psi_0 \quad (42a)$$

$$M_{\theta} = -\frac{1}{2}(1-\nu)D\left(-\frac{2\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) \quad (42b)$$

$$Q_r = C\left[-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{5}d_{15}h^2\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right] \quad (42c)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_r\left(\frac{h^2}{4} - x_3^2\right)dx_3 = \frac{h^2}{30}\left[-5c_{44}d_{15}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) + h^2(c_{44}d_{15}^2 - \beta_{11})\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right] \quad (42d)$$

把上式代入边界条件的方程(20a)~(20d)和(21)、(22)。根据无穷远处的边界条件, f 、 F 、 ψ_0 、 w 的表达式可以取为

$$f = \sin(2\theta)(F_2 K_2(2\kappa r)) \quad (43)$$

$$F = \frac{1}{D}\left[(G_2 r^2 + H_2 r^{-2})\cos(2\theta) + H_0 \ln r + Q_2^* \times \cos(2\theta) + P_0^* r^2 - \frac{b}{a}(D_2 K_2(\sqrt{ar})\cos(2\theta))\right] \quad (44)$$

其中 $P_0^* = \frac{P_0 + \frac{b}{a}A_0}{4}$, $Q_2^* = -\frac{1}{4}Q_2 - \frac{bB_2}{4a}$

$$\psi_0 = D_2 K_2(\sqrt{ar})\cos(2\theta) + (-B_2/a)r^{-2}\cos(2\theta) + (-A_0/a) \quad (45)$$

把 F 、 ψ_0 的表达式代入式(38) 求出 w 的表达式。共有 9 个待定的常数。

把式(43)、(44) 和(45) 代入相关的边界条件, 从式(42c) 和(42d) 可以看出在孔边上 $r = r_0$ 有非零解的条件是要满足

$$C\left[-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial w}{\partial r}\right] = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = 0 \quad (47)$$

可以看出, 这组边界条件在 r 趋于无穷远处自动满足。

由方程(42a) 可以得到

$$G_2 = \frac{M_0}{-4 + 4\nu}$$

$$P_0 = -\frac{(1+\nu)A_0(b - 4d_{31}D) + aM_0}{4a(1+\nu)} \quad (48)$$

$$H_0 = \frac{M_0 r_0^2}{2(-1+\nu)}$$

在无穷远处由式(45) 可知

$$\psi_0|_{r\rightarrow\infty} = -A_0/a \quad (49)$$

所以 $A_0 = -a\psi_0|_{r\rightarrow\infty}$ (50)

在圆孔边界 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处由式(45) 可知

$$\psi_0|_{r=r_0} = -D_2 K_2(\sqrt{ar_0}) - (-B_2/a)r_0^{-2} + (-A_0/a) \quad (51)$$

如果 $\psi_0|_{r\rightarrow\infty}$ 和 $\psi_0|_{r=r_0}$ 已知, 那么由式(47) 和(51) 就可以求出 B_2 、 D_2 。其余的待定系数由方程组(42a)、(42b) 和(46) 求出。为了方便, 令 $\psi_0 = \psi_0|_{r\rightarrow\infty}$, $\psi_m = \psi_0|_{r=r_0}$ 。这两个值需要用数值方法求出。当把上述所有待定的系数确定以后, 就可以求出各个力分量和电分量的分布。

可以得到孔边切向弯矩的表达式为

$$M_{\theta}[r_0, \theta] = 1 - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{aM_0 r_0 K_1(\sqrt{ar_0})[4\kappa^2(-1+\nu)DK_0(2\kappa r_0) - (1+\nu)CK_2(2\kappa r_0)]}} \times \right.$$

$$\left. [-4\sqrt{ak^2(-1+\nu)Dr_0(-M_0 - 2(1+\nu)(b - 4d_{31}D) \times (\psi_0 - \psi_m)) K_0(2\kappa r_0) K_1(\sqrt{ar_0}) + (1+\nu)C(4b(-1+\nu)(\psi_0 - \psi_m) K_0(\sqrt{ar_0}) + 3\sqrt{aM_0 r_0 K_1(\sqrt{ar_0})) K_0(2\kappa r_0))}] \right\} \quad (52)$$

如果不考虑压电效应, 可以令 $\psi_0 = \psi_m = 0$, 得到非压电板含孔受纯弯曲作用的无穷大板孔边上的最大切向弯矩的表达式($\theta = \pi/2$)

$$M_{\theta}(r_0, \frac{\pi}{2}) = M_0 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{\frac{3(1+\nu)}{2} K_2(2\kappa r_0) - K_0(2\kappa r_0)}{\frac{(1+\nu)}{2} K_2(2\kappa r_0) + K_0(2\kappa r_0)} \right] \quad (53)$$

这个结果和 Reissner^[22] 的结果完全一致。

同样, 把这些系数代入相关的量, 可以得到孔边周向剪力的表达式以及有关电的分布的表达式。

4 结果讨论

先用有限元 Ansys 计算出所需要的两个数值 ψ_0 和 ψ_m 。压电材料取为 PZT-4, 柔度系数 $s_{11} = 12.3 \times 10^{-12} \text{m}^2/\text{N}$, $s_{12} = -4.5 \times 10^{-12} \text{m}^2/\text{N}$, 压电常数 $d_{31} = -123 \times 10^{-12} \text{C}/\text{N}$, $d_{15} = 496 \times 10^{-12} \text{C}/\text{N}$, 介电常数 $\beta_{11} = 1475 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{F}/\text{m}$, $\beta_{33} = 1300 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{F}/\text{m}$ 。现就相同圆孔半径, 板的长宽相同, 在板的一侧作用纯弯矩 100 N/m, 但板厚不同的情况进行详细的计算和分析, 板的几何图形见图 2。取板的长度和宽度都等于 $2L = 2W = 0.1 \text{m}$, $r_0 = 0.0025 \text{m}$, 对于孔来说, 可以把板看作无穷大板。板的厚度为 h , 圆孔直径和板厚度的比值依次取为 $2r_0/h = \{2.202, 2.1, 2, 1.9, 1.798, 1.7, 1.597, 1.501, 1.4, 1.299, 1.199, 1.111, 1, 0.893, 0.8, 0.7, 0.602, 0.5, 0.4, 0.294, 0.2, 0.1\}$, 相应的计算结果如表 1 所示。

从表 1 可以看出, 含孔的压电材料平板受纯弯曲

表 1
Tab.1

圆孔直径和板厚度的比值 Ratio of hole diameter to plate thickness $2r_0/h$	无穷远处板中面上的电势 Electric potential at infinite middle plane ($x_3 = h/2, \theta = \pi/2$) $\frac{h^2}{4}\psi_0/V$	孔边处板中面上的电势 Electric potential at edge of hole in the middle plane ($x_3 = h/2, \theta = \pi/2$) $\frac{h^2}{4}\psi_m/V$	有限元 Ansys 采用三维块体单元 FEM Ansys with three-dimensional solid element $\sigma_\theta/(N/m^2)$	σ_θ 本文解法和 Ansys 结果的误差/% σ_θ error between this paper method and FEM	压电板和非压电板 (Reissner 理论) 弯矩集中系数误差/% Moment concentration factor error between piezoelectric plate and elastic plate	压电板和非压电板 (Reissner 理论) 最大剪力的误差/% Maximum shear stress error between piezoelectric plate and elastic plate
2.202	349.45	689.82	2.36×10^8	1.9	0.43	-4.0
2.100	333.238	655.76	2.15×10^8	1.95	0.37	-4.1
2.0	317.274	621.83	1.96×10^8	2	0.31	-4.1
1.901	301.621	588.37	1.78×10^8	2.1	0.25	-4.1
1.798	285.376	553.44	1.60×10^8	2.3	0.18	-4.1
1.700	269.874	519.93	1.44×10^8	2.4	0.10	-4.1
1.597	253.521	484.40	1.27×10^8	2.5	0.2	-4.2
1.501	238.320	451.21	1.13×10^8	2.6	-0.06	-4.2
1.401	222.326	416.15	9.95×10^7	2.7	-0.16	-4.2
1.299	206.184	380.67	8.62×10^7	2.9	-0.26	-4.2
1.199	190.387	345.89	7.41×10^7	3.1	-0.36	-4.2
1.111	176.448	315.23	6.42×10^7	3.2	-0.46	-4.2
1.0	158.830	276.61	5.27×10^7	3.3	-0.58	-4.1
0.893	141.838	239.67	4.26×10^7	3.5	-0.7	-4.0
0.8	127.107	208.09	3.47×10^7	3.7	-0.79	-3.9
0.700	111.283	174.87	2.71×10^7	3.7	-0.88	-3.7
0.602	95.746	143.31	2.05×10^7	3.8	-0.95	-3.4
0.5	79.478	111.85	1.45×10^7	3.6	-0.98	-3.0
0.4	63.577	83.264	9.63×10^6	3.3	-0.93	-2.5
0.294	46.710	55.235	5.16×10^6	8.2	-0.72	-1.7
0.2	31.684	34.573	2.50×10^6	8.5	-0.47	-0.9
0.1	15.783	16.130	664 590	5.6	-0.16	-0.3

注: σ_θ 是在圆孔边上 $\theta = \pi/3, x_3 = h/2$ 处的值

载荷作用,同时板的上下表面短路时,电对正应力的影响很小,可以忽略不计,但对剪力的影响比较大。而且电势的集中现象也很明显,但这种集中现象随着圆孔的直径与板厚的比值的减小而减弱,这点从图 18 也可看出。

下面给出一组圆孔直径和板厚比为 2(即 $2r_0/h = 2$)时有关力和电分量的分布图,如图 3~图 14 所示。从图 3 可以看出, σ_θ 在 $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$ 和 $\theta = -\pi/2$ 时有最大值。这个和非压电板的形式是一样的。从图 4 可以看出,电势 ψ 在圆孔边上 $x_3 = 0$ (即板的中面上)时,在 $\theta = \pm \pi/2$ 时有最大值,这个和有限元计算的分布形式相同。从图 5 可以看出,电势 ψ 在 $x_3 = 0, \theta = \pi/2$ 时,电势在圆孔附近存在集中现象,这个和有限元计算的结果比较如图 15 所示。从图 6 可以看出,电场

强度 E_θ 在 $x_3 = 0, \theta = \pm \pi/4$ 和 $\theta = \pm 3\pi/4$ 时,在圆孔边上有极值。从图 7 可以看出,电场强度 E_θ 在 $x_3 = 0, \theta = \pi/4$ 时,在圆孔附近存在集中现象。从图 8 可以看出,电场强度 E_3 沿板厚线性分布,并且在上下表面处有极值,这个和有限元计算的分布形式相同。从图 9 可以看出,电场强度 E_3 在 $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$ 时,在圆孔附近存在集中现象。从图 10 可以看出,电位移 D_θ 在 $x_3 = 0, \theta = \pm \pi/4$ 和 $\theta = \pm 3\pi/4$ 时,在圆孔边上有极值,这个和图 6 电场强度 E_θ 的分布形式相同。从图 11 可以看出,电位移 D_θ 在 $x_3 = 0, \theta = \pi/4$ 时,在圆孔附近存在集中现象。从图 12 可以看出,电位移 D_3 在 $x_3 = h/2$ 时,在 $\theta = \pm \pi/2$ 时有最大值;从图 13 可以看出,电位移 D_3 沿板厚线性分布,并且在上下表面处有极值;从

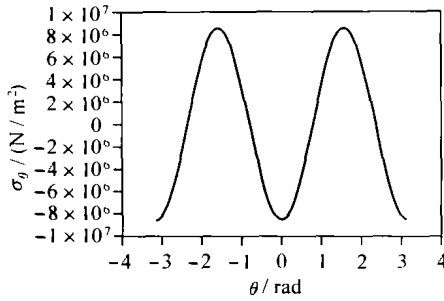


图 3 σ_θ 在 $x_3 = h/2$ 时沿孔边周向的分布
Fig.3 Profile of σ_θ along the edge of the hole at $x_3 = h/2$

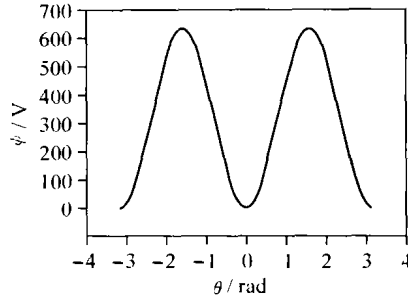


图 4 电势在 $x_3 = 0$ 时沿孔边周向的分布
Fig.4 Profile of electric potential along the edge of the hole at $x_3 = 0$

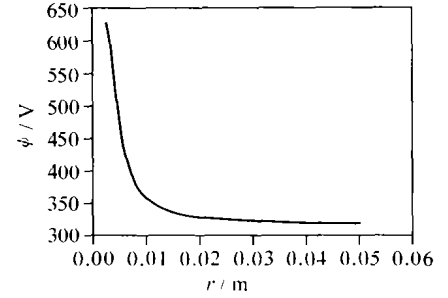


图 5 电势在 $x_3 = 0, \theta = \pi/2$ 时沿孔的径向分布
Fig.5 Profile of electric potential along radial direction of the hole at $x_3 = 0$ and $\theta = \pi/2$

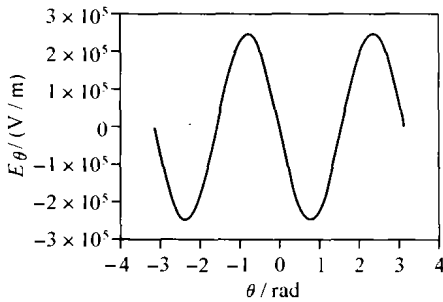


图 6 电场强度 E_θ 在 $x_3 = 0$ 时沿孔边周向的分布
Fig.6 Profile of electric strength E_θ along the edge of the hole at $x_3 = 0$

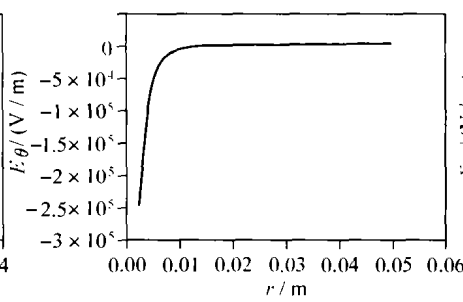


图 7 电场强度 E_θ 在 $x_3 = 0, \theta = \pi/4$ 时沿孔的径向分布
Fig.7 Profile of electric strength E_θ along radial direction of the hole at $x_3 = 0$ and $\theta = \pi/4$

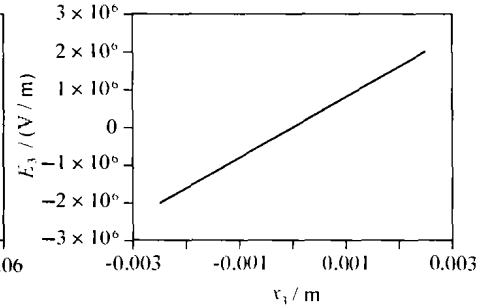


图 8 电场强度 E_3 在 $\theta = \pi/2, r = r_0$ 时沿板厚的分布
Fig.8 Profile of electric strength E_3 along the thickness of the plate at $\theta = \pi/2, r = r_0$

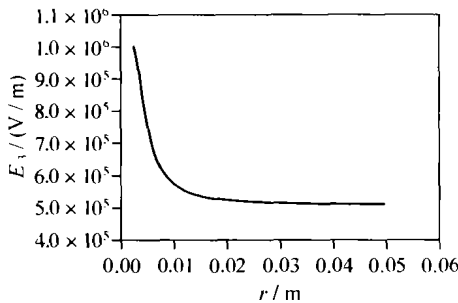


图 9 电场强度 E_3 在 $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$ 时沿孔的径向分布
Fig.9 Profile of electric strength E_3 along radial direction of the hole at $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$

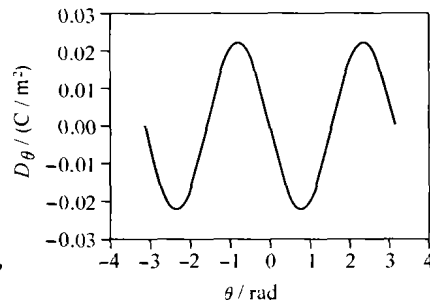


图 10 电位移 D_θ 在 $x_3 = 0$ 时沿孔边周向的分布
Fig.10 Profile of electric displacement D_θ along the edge of the hole at $x_3 = 0$

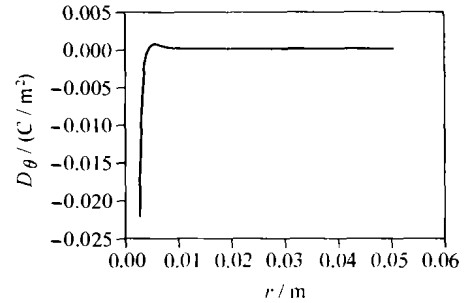


图 11 电位移 D_θ 在 $x_3 = 0, \theta = \pi/4$ 时沿孔的径向分布
Fig.11 Profile of electric displacement D_θ along radial direction of the hole at $x_3 = 0, \theta = \pi/4$

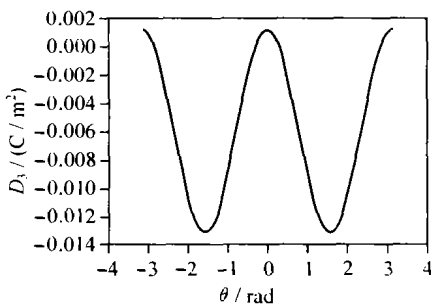


图 12 电位移 D_3 在 $x_3 = h/2$ 时沿孔边周向的分布
Fig.12 Profile of electric displacement D_3 along the edge of the hole at $x_3 = h/2$

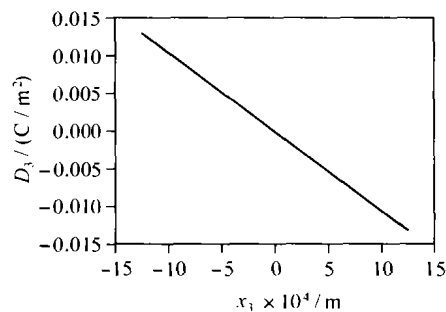


图 13 电位移 D_3 在 $\theta = \pi/2, r = r_0$ 时沿板厚的分布
Fig.13 Profile of electric displacement D_3 along the thickness of the plate at $\theta = \pi/2, r = r_0$

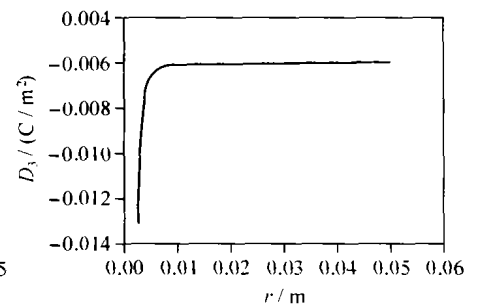


图 14 电位移 D_3 在 $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$ 时沿孔的径向分布
Fig.14 Profile of electric displacement D_3 along radial direction of the hole at $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$

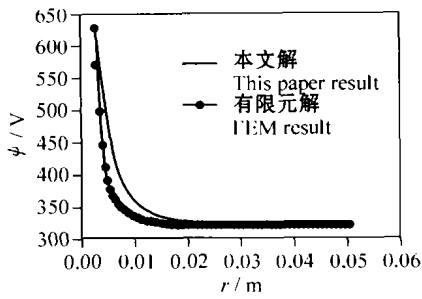


图 15 电势在 $x_3 = 0, \theta = \pi/2$ 时沿孔径向的分布, 有限元 Ansys 和本文解的比较

Fig. 15 Potential along radial direction of the hole at $x_3 = 0, \theta = \pi/2$ of this paper method compared with FEM

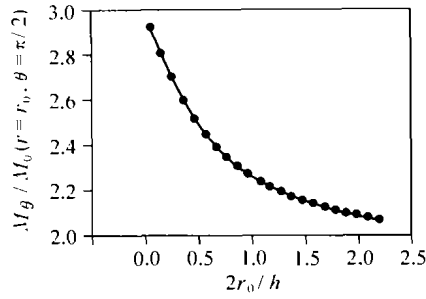


图 16 孔边切向弯矩的应力集中情况

Fig. 16 Edge tangential moment concentration versus ratio of hole diameter to plate thickness

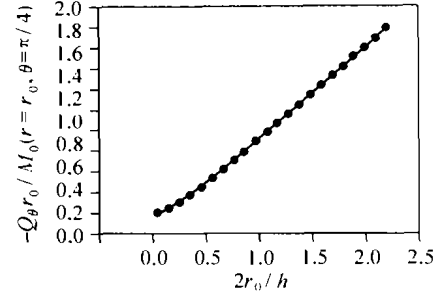


图 17 孔边切向剪力的应力集中情况

Fig. 17 Edge shear-stress resultant versus ratio of hole diameter to plate thickness

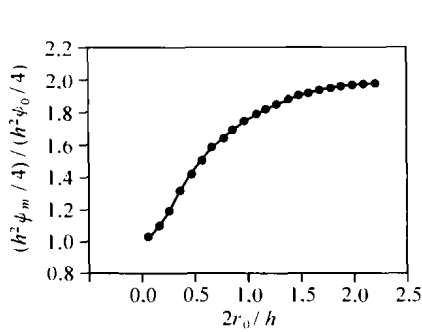


图 18 孔边电势集中情况

Fig. 18 Edge electric potential concentration versus ratio of hole diameter to plate thickness

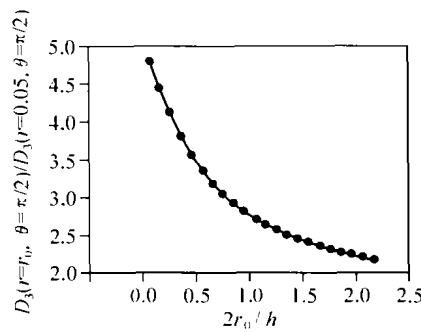


图 19 孔边垂直于板面方向电位移的集中

Fig. 19 Edge electric displacement D_3 vs. ratio of hole diameter to plate thickness

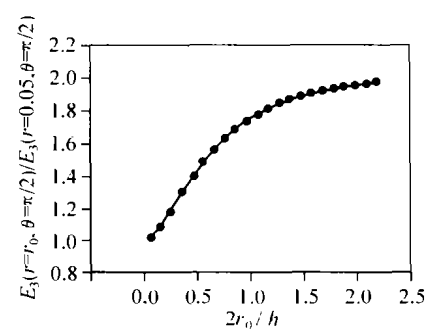


图 20 孔边垂直于板面方向的电场强度的集中情况

Fig. 20 Edge electric strength E_3 concentration versus ratio of hole diameter to plate thickness

图 14 可以看出,电位移 D_3 在 $x_3 = h/2, \theta = \pi/2$ 时,在圆孔附近存在集中现象。

对不同孔径和板厚的比值进行计算,可以得到一系列有关力电分量集中情况随这个比值的变化情况。从图 16 和图 17 可以看出切向弯矩和切向剪力的集中系数随孔径与板厚的比值的变化;从图 19 和图 20 可以看出,孔边垂直于板面方向的电场强度的集中系数随孔径与板厚的比值增大而增大,但是相应的电位移的集中系数却随孔径与板厚的比值增大而减小。从图 21 和图 22 可以看到孔边切向的电位移和电场强度的集中系数随孔径与板厚比值的增大而增大,它们的变化趋势和切向剪力集中系数的变化趋势相同。

比较 PZT-4 无穷大板含孔受纯弯曲作用和与 PZT-4 有相同弹性常数的横观各向同性无穷大板含孔受纯弯曲作用的应力集中情况。从表 1 的最后两列可以看出,这两种情况下弯曲的正应力的误差很小,但是剪应力的误差比较大,说明压电效应对剪应力的影响比较大,对正应力的影响比较小。

5 结论

以上给出满足含圆孔压电板弯曲问题 Reissner 理论方程的通解,只要把通解代入相关的边界条件,就可以确定通解中的未知常数。借助有限元 Ansys 求解含

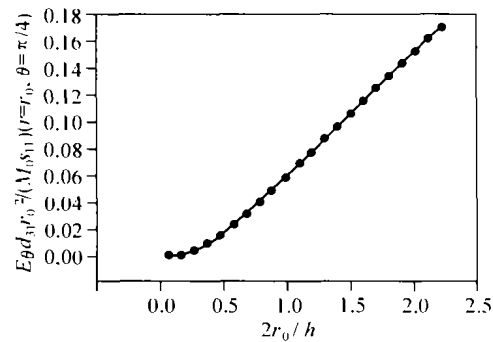


图 21 孔边切向的电场强度的集中情况

Fig. 21 Edge electric strength E_θ concentration versus ratio of hole diameter to plate thickness

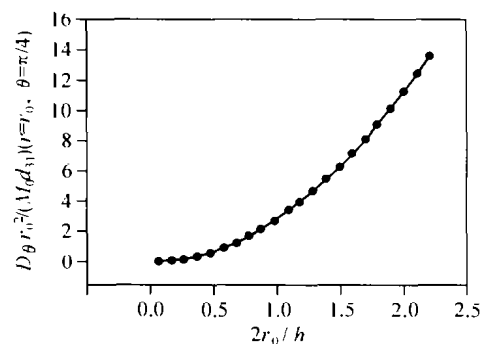


图 22 孔边切向的电位移的集中情况

Fig. 22 Edge electric displacement D_θ concentration versus ratio of hole diameter to plate thickness

圆孔无穷大压电板受纯弯曲作用时电场和力场的分布形式。考虑这种压电板的上下表面电的边界条件是短路,可得出以下结论:

1)压电效应对面内弯曲正应力的影响很小,可忽略不计。

2)压电效应对剪应力影响较大,切向电场强度和电位移的集中程度随圆孔直径与板厚比值的改变而变化的趋势和切向剪力的相同。

3)中面上孔边的电势和垂直于板中面方向的电场强度的集中程度随着圆孔直径与板厚的比值减小而减弱,垂直于中面方向的电位移的集中程度随着圆孔直径与板厚的比值减小而增强。

4)如果不考虑压电效应,本文的结果可以退化到非压电板含孔受纯弯曲作用的结果,此时结果与 Reissner^[22]的结果完全相同。利用本文的结果还可以进行叠加,可以求出含圆孔的无穷大板,板的上下表面电源短路,受纯扭作用时电场和力的分布。

References

- Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57: 647 ~ 653.
- Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defect. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, 28 (4): 491 ~ 505.
- Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29(21): 2 613 ~ 2 622.
- Sosa H, Khutoryansky N. New developments concerning piezoelectric materials with defects. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33: 3 399 ~ 3 414.
- Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1992, 40(4): 739 ~ 765.
- Zhang T Y, Hack J E. Mode-III cracks in piezoelectric materials. *Journal Applied Physics*, 1992, 71: 5 865 ~ 5 870.
- Park S B, Sun C T. Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics. *International Journal of Fracture*, 1995, 70: 203 ~ 216.
- Qin Q H, Yu S W. On the plane piezoelectric problem of a loaded crack terminating at a material interfaces. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, 19: 151 ~ 158.
- Liu J X, Wang B, Du S Y. Line force, charge and dislocation in anisotropic piezoelectric materials with an elliptic hole or crack. *Mechanics Research Communications*, 1997, 24: 399 ~ 405.
- Gao C F, Wang M Z. Generalized 2D problem of piezoelectric media containing collinear cracks. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1999, 15: 235 ~ 244.
- Han X L, Wang T C. Interacting multiple cracks in piezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structure*, 1999, 36: 4 183 ~ 4 202.
- Sosa H, Pak Y E. Three-dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, 1990, 26(1): 1 ~ 15.
- Wang B. Three-dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric material. *International Journal of Engineering Science*, 1992, 30: 781 ~ 791.
- Wang B. Three-dimensional analysis of an elliptical inclusion in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29: 293 ~ 308.
- Huang J H. A fracture criterion of a penny-shaped crack on transversely isotropic piezoelectric media. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34: 2 631 ~ 2 644.
- Pak Y E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials. *International Journal of Fracture*, 1992, 54: 79 ~ 100.
- Kogan L, Hui C Y, Molkov V. Stress and induction field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structure*, 1996, 33: 2 719 ~ 2 737.
- Liu Jinxi, Zhang Xiaosong, Liu Xianglin. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 16(2): 148 ~ 163.
- Honein T, Honein B, Honein E, Herrmann G. On piezoelectric circular inclusions. *Mechanical Modelling of New Electromagnetic Material* (Edited by Hsieh R T). Amsterdam: Elsevier, 1990. 259 ~ 266.
- Pak Y E. Circular inclusion problem antiplane piezoelectricity. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29 (19): 2 403 ~ 2 419.
- DING HaoJiang, HOU PengFei. Piezoelectric circular hollow plate bending with edge simple boundary under the surface uniform loading. *Acta Zhejiang University*, 1998, 32(5): 541 ~ 544 (In Chinese) (丁皓江, 侯鹏飞. 周边简支空心压电圆板表面均载弯曲. *浙江大学学报*, 1998, 32(5): 541 ~ 544).
- Reissner E. The effect of transverse shear deformation of the bending of elastic plates. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1945, (12): A-69 ~ A-77.
- Rogacheva N N. The theory of piezoelectric shells and plates. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
- Wang Q, Quek S T, Sun C T, Liu X. Analysis of piezoelectric coupled circular plate. *Smart Materials and Structures*, 2001, (10): 229 ~ 239.
- HU HaiChang. Principle and application of variation of elastic mechanics. Beijing: Science Press, 1981. 470 ~ 471 (In Chinese) (胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981. 470 ~ 471).