非均布表面应力作用下薄板变形问题的求解

张文兵　李晖凌

(中科院力学研究所非线性力学国家重点实验室，北京 100080)

摘要　给出非均布表面应力作用下弹性薄板挠曲变形问题的控制方程及边界条件，通过与热应力问题进行物理比拟，对这一问题进行了求解，并采用这一方法对实验中观测到的局部弯曲现象进行了理论解释.

关键词　非均布表面应力，弹性薄板，热应力，物理比拟，局部弯曲

A SOLUTION FOR DEFLECTIONS OF THIN PLATES INDUCED BY NON UNIFORM SURFACE STRESSES

ZHANG Wenbin　LI Huiling

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract The governing equations for deflections of elastic thin-plates induced by non-uniform surface stresses together with the boundary conditions are presented. By a physical analogue, the solution of the problem is equivalent to that for deflections of elastic plate induced by thermal stresses. Utilizing this method, the phenomena of local bending observed in experiments can theoretically be explained.

Key words surface stresses with heterogenous distribution, elastic thin plates, thermal stress, physical analogue, local bending

表面应力作用下的薄板变形问题是半导体工艺、微传感器及微制造加工等领域中的一个重要的研究主题[1,2]，特别是在当前 MEMS 微生化传感器领域[3]，这一主题得到了广泛关注. 当前分析和求解这一问题的方法是采用 Stoney 公式[4]及其相关的修正[5~7]. Stoney 公式及其修正考虑的都是均匀表面应力作用下的变形，而对于实验中所观测到的局部弯曲现象[8]应归因于非均布表面应力的作用. 对于非均布表面应力作用下的薄板变形问题目前还没有一个理想的分析模型. 为此，本文从弹性薄板理论出发，给出非均布表面应力作用下薄板变形问题的挠曲控制方程及相应边界条件，通过与薄板热应力问题进行物理比拟给出求解方法，并利用这一方法对局部弯曲现象[8]进行解释.

1 理论分析

采用如图 1 所示的弹性薄板结构，其形状任意、厚度均一，记为 t. 考虑弹性小变形的情形，忽略面内薄膜力的影响，假定这一弹性薄板小挠度变形问题符合基尔霍夫假设. 考虑表面应力的幅值是随空间变化的，即非均布表面应力的情形，图 1 中 $\sigma^+(x,y)$，$\sigma^-(x,y)$ 分别为上下表面的表面应力，表面应力只作用在上下表面上，x, y 为平板面内坐标，z 为法向坐标.

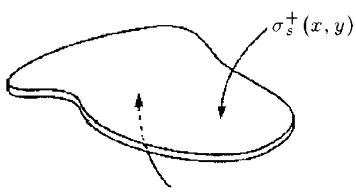


图 1　非均布表面应力作用下的弹性薄板

表面应力是均匀各向同性的，而且是一个自平衡的内应力，应力 - 应变关系可以表示为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx}+v\varepsilon_{yy})+\sigma_s(x,y,z)\\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy}+v\varepsilon_{xx})+\sigma_s(x,y,z)\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)
$$

2005–07–25 收到第 1 稿，2006–03–14 收到修改稿.

其中

$$\sigma_s(x,y,z)=\sigma_s^+(x,y)\delta\Big(z-\frac{t}{2}\Big)+\sigma_s^-(x,y)\delta\Big(z+\frac{t}{2}\Big) \tag{2}$$

δ 是 Dirac 函数，表示表面应力只是分别作用在板的上下表面， ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} 是对应于 xx, yy, xy 方向的应变分量， w 是 z 方向的挠度， E 为杨氏模量， v 是泊松比.

由式 (1) 可以得到作用于板上的单位长度弯矩为

$$\left.\begin{aligned}M_{xx}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{xx}z\mathrm{d}z=-D\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\Big)-M_s\\M_{yy}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{yy}z\mathrm{d}z=-D\Big(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\Big)-M_s\\M_{xy}&=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xy}z\mathrm{d}z=-D(1-v)\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} 是对应于 xx, yy, xy 方向的弯矩分量， $D=Et^3/[12(1-\nu^2)]$. 而其中

$$M_S=-\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_s(x,y,z)z\mathrm{d}z=-\frac{t}{2}[\sigma_s^+(x,y)-\sigma_s^-(x,y)] \tag{4}$$

是表面应力对弯矩的贡献，定义为表面应力等效弯矩.

取薄板微元进行分析, 根据横截面上的弯矩和剪力平衡，得到弹性薄板在非均布表面应力作用下的挠曲控制方程为

$$D\nabla^4w+\nabla^2M_S=0 \tag{5}$$

而对于一端固支的悬臂板 (cantilever plate) 结构其边界条件为：

(1) 在固支端转角和挠度为零

$$w|_{\text{clamped edge}}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\text{clamped edge}}=0 \tag{6}$$

(2) 在自由边弯矩、剪力及扭矩为零

$$\left.\begin{aligned}&\Big\{-D\Big[\frac{\partial^2w}{\partial n^2}+v\frac{\partial^2w}{\partial s^2}\Big]-M_S\Big\}\Big|_{\text{free edge}}=0\\&\Big\{-D\Big[\frac{\partial^3w}{\partial n^3}+(2-v)\frac{\partial^3w}{\partial n\partial s^2}\Big]-\frac{\partial}{\partial n}M_S\Big\}\Big|_{\text{free edge}}=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中 (n,s) 分别对应于边界上的法向和切向局部坐标.

从式 (5)~ 式 (7) 中可以看出，非均布表面应力的影响，等效于一个空间分布的横向载荷或一个分布弯矩的作用，同时，在自由边界上体现为相应的分布弯矩与剪力的共同作用.

2 等效求解方法

表面应力是一个自平衡的内应力. 根据薄板在表面应力作用下的挠曲变形微分方程及其相应的边界条件，可以考虑将这一问题与如下的热应力问题进行物理比拟，求解等效热应力导致的薄板挠曲变形，从而得到相应的表面应力问题的解.

考虑温度分布 $T(x,y,z)$ 导致的弹性薄板热应力问题 [12]，应力 - 应变关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_{xx}+v\varepsilon_{yy})-\frac{E\alpha}{1-v}T(x,y,z)\\\sigma_{yy}&=\frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_{yy}+v\varepsilon_{xx})-\frac{E\alpha}{1-v}T(x,y,z)\\\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+v)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中 α 为各向同性的热膨胀系数，同样假定面内变形与相应的薄膜力的影响可以忽略. 于是，板内单位长度的弯矩为

$$\left.\begin{aligned}M_{xx}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{xx}z\mathrm{d}z=-D\Big(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\Big)-M_T\\M_{yy}&=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_{yy}z\mathrm{d}z=-D\Big(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\Big)-M_T\\M_{xy}&=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xy}z\mathrm{d}z=-D(1-v)\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$M_T=\frac{E\alpha}{1-v}\int_{-t/2}^{t/2}T(x,y,z)z\mathrm{d}z \tag{10}$$

是温度场空间变化对弯矩项的贡献，称为变温等效弯矩.

由式 (8), 式 (9) 导出薄板在热应力作用下的挠曲变形微分方程与边界条件分别为

$$\left.\begin{aligned}&D\nabla^4w=-\nabla^2M_T\\&w|_{\text{clamped edge}}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\text{clamped edge}}=0\\&\Big\{-D\Big[\frac{\partial^2w}{\partial n^2}+v\frac{\partial^2w}{\partial s^2}\Big]-M_T\Big\}\Big|_{\text{free edge}}=0.\\&\Big\{-D\Big[\frac{\partial^3w}{\partial n^3}+(2-v)\frac{\partial^3w}{\partial n\partial s^2}\Big]-\frac{\partial}{\partial n}M_T\Big\}\Big|_{\text{free edge}}=0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

将式 (11) 与式 (5)~ 式 (7) 比较发现，挠曲变形 w 完全由表面应力等效弯矩 M_S 或变温等效弯矩 M_T 所决定. 若令 $M_T = M_S$, 可以将上述两个问题进行物理比拟. 而此时可令虚拟的变温分布 $T(x,y,z)$ 为

$$T(x,y,z) = -\frac{1-\nu}{E\alpha}\sigma_s(x,y,z) \tag{12}$$

与表面应力 $\sigma_S(x,y,z)$ 相联系.

进一步注意到变温等效弯矩 M_T 由温度分布 $T(x,y,z)$ 沿板厚度积分得到，而挠曲变形 w 则完全由积分后得到的 M_T 决定，与温度场 $T(x,y,z)$ 沿厚度方向分布的具体细节并无直接联系. 只要保证积分效果不变，温度场 $T(x,y,z)$ 沿厚度方向的变化可假设为一个简单的函数形式，而这并不会影响到控制方程和边界条件，也不会影响到最终的挠曲变形 w 的求解. 基于以上的考虑，不妨假设温度场是沿厚度方向线性分布的，即

$$T'(x,y,z) = \gamma(x,y)z \tag{13}$$

由

$$M_T = \frac{E\alpha}{1-v}\int_{-t/2}^{t/2} T(x,y,z)z\mathrm{d}z = \frac{E\alpha}{1-v}\int_{-t/2}^{t/2} T'(x,y,z)z\mathrm{d}z$$

得到温度分布沿厚度方向的梯度为

$$\gamma(x,y) = -\frac{6(1-v)}{\alpha E t^2}[\sigma_s^+(x,y) - \sigma_s^-(x,y)] \tag{14}$$

通过以上的物理比拟，可以将非均布表面应力问题的求解等效为一个弹性薄板的热应力问题，从而可以借助于热应力分析中已有的理论分析与数值方法，特别是可直接借助于已有的有限元数值分析方法，分析研究具有复杂几何形状的悬臂薄板，在任一给定的表面应力分布下的挠曲变形问题.

3 算 例

在半导体工艺中，在薄的硅基底 (厚度约 10 nm) 上可外延生长锗晶薄层方阵 (厚度约 1.6 nm)，由于锗晶晶格常数比硅大 4%，在锗和硅结合处因界面失配，会对硅基底在表面上施加一个表面应力的作用，从而产生可观测的显著挠曲变形，这一表面应力的分布是与锗晶方块阵列分布相一致的，即锗晶方块覆盖的部分表面与空隙处表面将形成不同的局部或张或压的表面应力. 实验中观察到 [8]，锗晶阵列分布的疏密导致硅基底出现明显不同的弯曲模式：当方块阵列分布稀疏时，硅基底呈现明显的局部弯曲变形模式；而当方块阵列密集覆盖硅基底时，逐渐过渡到整体弯曲变形模式 (见图 2).

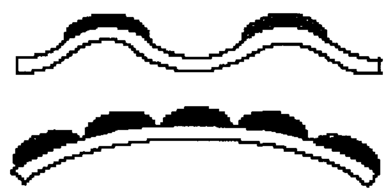
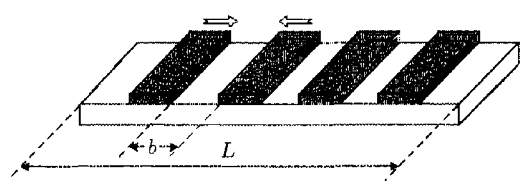
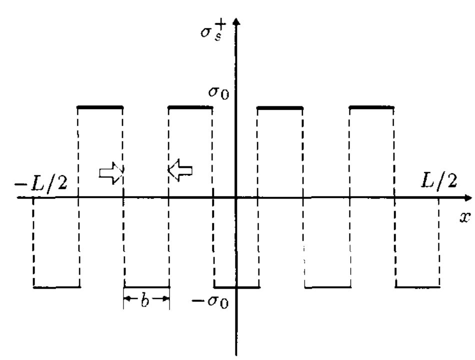


图 2 锗晶分布密度的不同其变形模式也不同，在密度较小时局部弯曲明显，密度大时呈现整体弯曲模式

采用如图 3(a) 所示的周期型锗晶分布方阵，将表面应力分布理想化为如图 3(b) 所示的周期型阶跃函数的形式，通过调整控制参数 b 模拟锗晶方块阵列的疏密变化.



(a) 周期型锗晶分布方阵

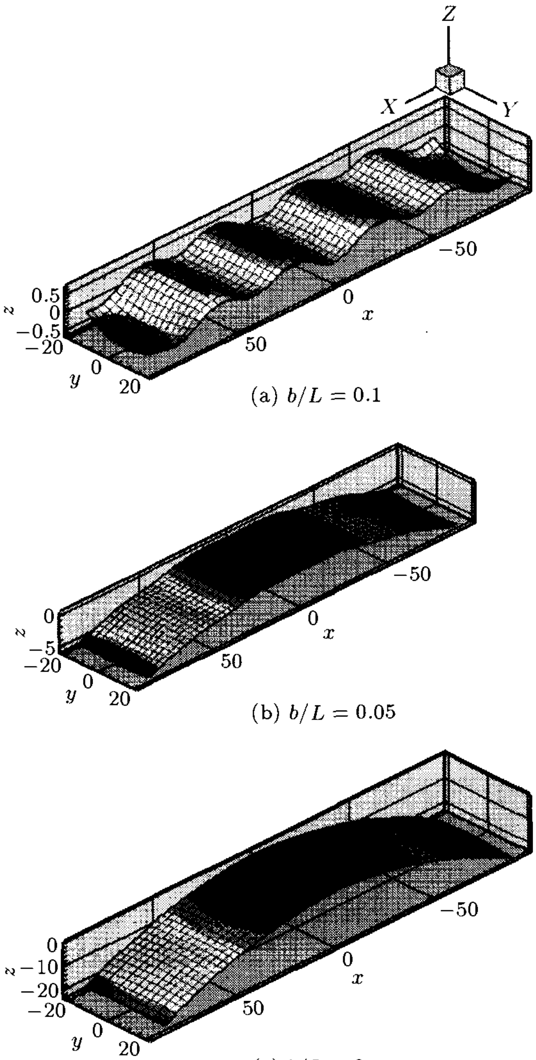


(b) 周期型阶跃函数形式的表面应力分布

图 3

这里首先将阶跃型表面应力分布的薄板变形问题与弹性薄板热应力问题进行物理比拟，得到相应的虚拟温度分布的线性梯度，通过有限元方法对其进行求解.

图 4 给出的是不同 b 值情况下板的变形示意图，从图中可以看出在 b 值较大时变形呈明显的局部弯曲模式，随着 b 值的减小变形从局部弯曲过渡到整体弯曲最终趋于均匀表面应力作用下的变形.



(a) $b/L = 0.1$

(b) $b/L = 0.05$

(c) $b/L = 0$

图 4 阶跃型表面应力作用下薄板变形示意图

4 小　结

本文采用与热应力问题进行物理比拟的方法对局部弯曲现象进行了理论解释. 采用这一方法可以求解具有复杂几何形状的弹性薄板在任一给定的表面应力分布之下的挠曲变形问题.

参 考 文 献

1 Thundat T, Oden PI, Waemack RJ. Microcantilever sensors. *Microscale Thermophysical Engineer*, 1997, 1: 185~199

2 Lavrik NV, Sepaniak MJ, Datskos PG. Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors. *Rev Sci Instrum*, 2004, 75: 2229~2253

3 Raiteri R, Grattarola M, Butt H, et al. skladal, Micromechanical cantilever-based biosensors. *Sensors and Actuators B*, 2001, 79: 115~126

4 Stoney GG. *Proc R Soc London, Ser A*, 1909, 82: 172

5 Freund LB, Floro JA, Chason E. Extensions of the Stoney formula for substrate curvature to configurations with thin substrates or large deformations. *Appl Phys Lett*, 1999, 74: 1987~1989

6 Sader JE. Surface stress induced deflections of cantilever plates with applications to the atomic force microscope: V-shaped plates. *J Appl Phys*, 2002, 91: 9354~9361

7 Sader JE. Surface stress induced deflections of cantilever plates with applications to the atomic force microscope: Rectangular plates. *J Appl Phys*, 2001, 89: 2911~2921

8 Liu F, Rugheimer P, Mateeva E, et al. Response of a strained semiconductor structure. *Nature*, 2002, 416: 498