

岩土介质横观各向同性的模拟

章根德

朱维耀

中国科学院力学研究所, 北京 100080 中国科学院渗流研究所, 廊坊 065007

摘 要 评述了岩土介质横观各向同性模拟的进展状况, 包括横观各向同性弹塑性及其屈服准则的模拟, 并给出了相应的力学模型及其数学表达式.

关键词 岩土介质, 本构模拟, 横观各向同性

1 引 言

采用有限元方法对岩土工程结构进行数值分析时, 关键问题就是选择恰当的地质材料本构模型. 岩石介质的本构特性是十分复杂的. 其本构关系, 作为地质材料实际特性的数学的抽象; 是在一定条件下的一种近似. 例如均质性、连续性、各向同性、弹性、塑性、粘弹性、粘塑性等等. 所以, 我们研究岩石的本构关系不是要让真实的材料去迎合这些理想的模型, 而是要确定在什么条件下, 什么范围内岩石介质能显示出这些理想化的模型所表现出来的主要特性. 本构方程所表现的只是“理想材料”, 它与实际的材料总是有差异的. 判别一个材料的本构方程是否正确, 这不是一个纯理论的问题, 而是一个实践问题.

问题的另一个方面是, 材料的本构方程能完全随意地给出吗? 回答是否定的. 一种正确的本构方程, 必须满足某些相应的物理与数学的要求, 这些基本的要求构成了材料本构理论公理体系. 例如 Eringen^[1~3] 的八公理体系, Noll^[4] 和 Nye^[5] 的三公理体系等. 同时, 还须通过多种实验途径, 客观地而不是随意地定出材料本构模型所需的材料常数.

地质材料在变形过程中会出现相当可观的应力引起的各向异性. 岩石介质在受力变形过程中, 随着载荷的增加, 微裂纹会很快地增殖, 当接近峰值应力时, 就会形成宏观的破裂面. 随着应变的增加, 破裂面逐渐扩展最终将导致工程结构的完全破坏. 这种破裂的传播与不均匀变形会引起明显的各向异性. 为了对这种复杂的现象进行数值分析, 需要建立等效岩体力学模型. 这种模型实质上是一种含某些破裂面的分段连续的力学模型, 它可以采用有限元方法来进行数值计算. 它所遵循的客观规律基本上还是断裂力学与连续介质力学的基本规律, 诸如弹性力学、塑性力学、断裂力学等学科中所表述的基本原理和规律.

横观各向同性现象在地质材料中比较常见. 在沉积过程中所形成的层状结构的粘土层, 不同薄层内的矿石成份及物理力学性质是互不相同的. 在水平方向, 可以近似地看成各向同性的, 但在垂直方向, 其性状的差异就比较大. 所以, 类似这样沉积形成的天然地基, 其应力-应变

分析就可以采用横观各向同性弹性体模型来描述.

同样, 风化程度随深度变化的岩体, 亦可以看成横观各向同性的. 沿不同深度, 由于风化程度不一, 其弹性模量、强度呈一定规律变化, 而在同一层内, 则可以近似地看成各向同性的.

2 横观各向同性线弹性体

横观各向同性弹性材料具有关于某一坐标轴旋转对称的性状. 设 z 轴为旋转对称轴, 那末各向同性的平面就是 $x-y$ 平面, 如图 1 所示.

横观各向同性对称条件很容易从正交各向异性材料附加某些要求而得到. 这个附加的要求——关于 z 轴的旋转对称性减少了独立的弹性常数的数目, 使横观各向同性线弹性体的独立的弹性常数变为 5 个. 这种材料的应力-应变关系的一般矩阵形式可写成

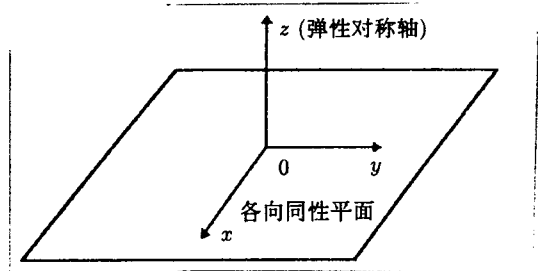


图 1 横观各向同性材料的坐标轴

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

对称的

使用工程弹性模量, 上式能写成

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ -\nu'/E' & -\nu'/E' & 1/E' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中, E, E' 分别为各向同性平面与它的垂直方向的 Young 氏模量; $G = E/[2(1 + \nu)]$ 为各向同性平面的剪切模量; G' 为正交于各向同性平面的平面上的剪切模量; ν 为描述各向同性平面上由于拉伸应力而引起横向应变减少特征的 Poisson 比; ν' 为描述各向同性平面上由于垂直方向拉伸应力而引起的横向应变减少特征的 Poisson 比. 这里一共是 5 个独立的弹性常数: E, E', G', ν, ν' , 而 $G = E/[2(1 + \nu)]$, 不是独立的弹性常数.

3 屈服准则的模拟

屈服条件在简单应力状态是定义为弹性极限. 而在三维应力状态下, 材料的屈服表现为存在屈服面, 而屈服面的数学表示就称为屈服准则. 一般情况下, 屈服应力 (或材料的弹性极限)

是应力状态的函数, 因此屈服条件一般可以写成

$$F(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (3)$$

上式中的 k_1, k_2 等是材料常数, 函数 F 的具体形式则依赖于地质材料的特性.

正交各向异性材料每一点都有三个互相正交的对称平面. 这些平面的交叉线就是各向异性材料的主轴.

对于具有柱状晶粒结构的岩石, 可以看成正交各向异性材料. 由于岩石的拉伸强度比压缩强度低很多, 并且是压力敏感性的. 所以在屈服函数中不仅包括应力的二次项, 还应该包括应力的一次项, 一般可以写成^[6]

$$F = a_1(\sigma_y - \sigma_z)^2 + a_2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4\tau_{xy}^2 + a_5\tau_{zx}^2 + a_6\tau_{xy}^2 + a_7\sigma_x + a_8\sigma_y + a_9\sigma_z - 1 = 0 \quad (4)$$

上述屈服函数能够描述材料具有不同的拉伸与压缩强度, 并且能预言材料强度随围压变化非线性地增加. 为了定出式 (4) 中各个常数 a_i ($i = 1, \dots, 9$), 需要进行九种独立的强度试验. 对各向异性材料, 屈服函数 $F(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0$ 是在某种参考坐标系内的, 而参考坐标系对材料物体所取的方位是固定的. 不改变函数的形式就不能改变参考坐标系, 所以不可能在三维主应力空间中象描述各向同性材料那样来说明各向异性材料屈服面.

对于横观各向同性材料来说, 各水平面上强度是各向同性的. 所以式 (4) 中的常数 a_i 不是完全独立的, 它要受到下列的限制

$$a_1 = a_2, \quad a_4 = a_5, \quad a_7 = a_8, \quad a_6 = 2(a_1 + 2a_3) \quad (5)$$

于是式 (4) 就可写成

$$F = a_1(\sigma_y - \sigma_z)^2 + a_1(\sigma_z - \sigma_x)^2 + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4\tau_{xy}^2 + a_4\tau_{zx}^2 + 2(a_1 + 2a_3)\tau_{xy}^2 + a_7\sigma_x + a_7\sigma_y + a_9\sigma_z - 1 = 0 \quad (6)$$

上式中常数 a_1, a_3, a_7 和 a_9 可以通过不同方位的拉伸、压缩的强度试验来求得, 而常数 a_8 可以通过剪切试验来确定. 可见, 要确定各向异性材料的屈服条件, 需要进行多种材料强度试验, 是相当复杂和困难的.

4 横观各向同性弹塑性模拟

岩石介质弹塑性变形所引起各向异性性状是十分复杂的, 它不仅与当时的应力状态有关, 还与塑性变形过程的应力 - 应变历史相关, 要模拟它是十分困难的^[7,8]. 极端各向异性线弹性模拟需要 21 个材料常数, 正交各向异性线弹性需要 9 个材料常数, 一旦涉及屈服或破裂, 地质材料正交各向异性的弹塑性模拟, 待定的材料常数就会很多, 这样的模型就根本无法在工程实践中应用. 并且, 从岩石介质的客观性状来说, 虽然单个的柱状晶粒结构具有正交各向异性的特性. 但从大块岩体来说, 工程所应用的是其统计平均特性. 岩体力学的模型中, 最具有典型意义的复杂模型最多也只不过横观各向同性模型, 即其材料性状同一深度平面内是各向同性的, 沿深度其特性按某种规律变化^[9,10]. 从细观力学的角度来说, 岩石晶粒的变形是很小的, 塑性变形主要在于晶粒之间的滑移. 岩石弹塑性变形过程中, 其宏观体积响应只是各种微结构

之间相互作用的平均结果, 变形的机理是微裂纹成核和增长及其聚集而生成细观裂纹和裂纹的扩展与传播. 对它的模拟需要引入各向异性损伤张量, 引用损伤力学与断裂力学一系列基本规律. 这里不作阐述 [11~16]. 所以, 这里对地质材料各向异性的弹塑性模拟, 只阐述弹塑性横观各向同性模型, 而不再对各向异性的更复杂的模型进行探讨.

弹塑性横观各向同性模型比较复杂. 但是, 当应变能分解成体积应变与偏量应变时, 就能大大地简化模型的数值计算. 为此, 我们引进应力不变量 ϕ_1 和 ϕ_2 .

$$\phi_1 = \sigma_{11} + \alpha(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (7)$$

$$\phi_2 = \frac{\beta}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \frac{1}{6}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \gamma(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + \frac{2+\beta}{3}\sigma_{23}^2 \quad (8)$$

这里, σ_{ij} 是应力张量分量, 而 α, β 和 γ 是无量纲材料常数. 而材料的对称轴, 假设正交于各向同性的 $\sigma_{22}-\sigma_{33}$ 平面.

4.1 弹性性状

在未屈服前, 材料的性状是横观各向同性弹性体. 材料的余能函数可以表示为

$$dW_c = \frac{d(\phi_1)^2}{18B} + \frac{d\phi_2}{2S} \quad (9)$$

这里, B 与 S 为材料的响应函数. 于是, 弹性应变增量张量 $d\epsilon_{ij}^e$ 可写成

$$d\epsilon_{ij}^e = d\left(\frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}}\right) \quad (10)$$

由式 (7)~(10) 可看出来, 材料的弹性性状是由弹性常数 α, β 和 γ 以及响应函数 B 和 S 来确定的. B 和 S 可表为

$$B = B(\phi_1, k) \quad (11)$$

$$S = S(\sqrt{\phi_2}, k) \quad (12)$$

Lekhnitskii^[17] (1963) 和 Baladi^[10] (1978) 给出了横观各向同性线弹性体的材料常数 α, β 和 γ 以及响应函数 B, S 所必须满足的条件

$$\frac{BS}{3B\beta + S} > 0 \quad (13)$$

$$\frac{BS}{3B(\beta + 1) + 2\alpha^2 S} > 0 \quad (14)$$

$$\frac{s}{\gamma} > 0 \quad (15)$$

$$\frac{S}{2 + \beta} > 0 \quad (16)$$

$$-1 < \frac{1.5B - \alpha^2 S}{1.5B(1 + \beta) + \alpha^2 S} < 1 \quad (17)$$

$$\frac{3B\beta + 4\alpha^2 S}{6B\beta + 2S} - 2\left[\frac{1.5B\beta - \alpha S}{3B\beta + S}\right]^2 > 0 \quad (18)$$

弹性应变增量张量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 可以写成

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{9B}d\phi_1 A_{ij} + \frac{1}{2S}d\eta_{ij} \quad (19)$$

这里,

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \sigma_{ij}} \text{ 并且 } \eta_{ii} = 0 \quad (20)$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (21)$$

于是, 弹性体积应变增量 $d\varepsilon_{kk}^e$ 与弹性偏量应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 分别表示为

$$d\varepsilon_{kk}^e = \frac{1+2\alpha}{9B}d\phi_1 \quad (22)$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2S}d\eta_{ij} - \left(\frac{1}{3}\delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{1+2\alpha} \right) d\varepsilon_{kk}^e \quad (23)$$

上式中 $\frac{1}{2S}d\eta_{ij}$ 可记成 $d\varepsilon_{ij}^e$, 即

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2S}d\eta_{ij} \quad (24)$$

称做为弹性应变增量。

4.2 塑性性状

横观各向同性模型的加载函数由两部分组成: 一是最终破坏包络, 它给出了材料的最大剪切强度, 另一部分就是应变硬化面。如图 2, 加载函数的破坏包络部分可表示为

$$f = h(\phi_1, \sqrt{\phi_2}) = \sqrt{\phi_2} - Q(\phi_1) = 0, \quad \phi_1 < L(k) \quad (25)$$

应变硬化面可以表示为

$$f = H(\phi_1, \sqrt{\phi_2}, k) = \sqrt{\phi_2} - F(\phi_1, k) = 0, \quad X(k) \geq \phi_1 \geq L(k) \quad (26)$$

从图 2 可以看到, $L(k)$ 与 $X(k)$ 分别表示了具有破坏包络为 $h(\phi_1, \phi_2)$ 的硬化面在 ϕ_1 轴上所截的位置, 而 k 一般是塑性体积应变历史的函数。 $L(k)$ 可选成

$$L(k) = \begin{cases} k & k > 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

硬化参量 k 可以造成下列函数中的任一个

$$k = g_1(\varepsilon_{kk}^p) \quad (28)$$

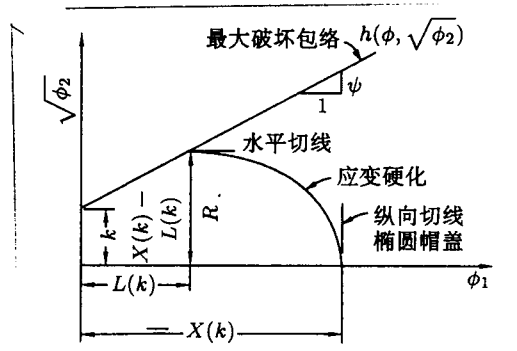


图 2 弹塑性横观各向同性模型的屈服面

$$k = g_2 [(\varepsilon_{kk}^p)_{\max}] \quad (29)$$

采用公式 (28) 表示当应力点达到破坏包络 h 上时, 允许硬化面向原点往回运动, 这样就控制了材料的膨胀. 而采用公式 (29), 仅允许硬化面向离开原点的方向运动, 这样确保了膨胀过程中仍允许存在流体静水压力的加载 - 卸载循环所引起的滞回效应.

由相关流动规则, 塑性应变增量可以表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & f = 0 \text{ 并且 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \\ 0 & f < 0 \text{ 或 } f = 0 \text{ 而 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

这里 f 由式 (25) 或 (26) 定义, $d\lambda$ 是一个正的比例因子, 仅当塑性应变出现时才取非零值.

塑性应变可以分解为体积应变部分与偏量应变部分. 塑性体积应变增量 $d\varepsilon_{kk}^p$ 可表示为

$$d\varepsilon_{kk}^p = d\lambda(1 + 2\alpha) \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \quad (31)$$

而塑性应变偏量增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 可表示为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\bar{\varepsilon}_{ij}^p - \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{1 + 2\alpha} \right) d\varepsilon_{kk}^p \quad (32)$$

上式中 δ_{ij} 是 Kronecker 函数, A_{ij} 如式 (21) 所示, 而 $d\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ 称为屈服塑性应变偏量增量, 它可以表示为

$$d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{d\lambda}{2\sqrt{\phi_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} \eta_{ij} \quad (33)$$

式中 η_{ij} 由式 (20) 给出.

于是, 塑性应变增量张量可以写成

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1} A_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{\phi_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} \eta_{ij} \right) \quad (34)$$

比例因子 $d\lambda$ 为

$$d\lambda = \left\{ \left[\frac{9B}{(1 + 2\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \phi_1} - \frac{S}{\beta\sqrt{\phi_2}} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} \eta_{ij} \right) \right] d\varepsilon_{kk} + \frac{S}{\sqrt{\phi_2}} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} d\varepsilon_{ij} \right\} / \left\{ 9B \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \right)^2 + S \left(\frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} \right)^2 - (1 + 2\alpha) \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{\partial f}{\partial k} \right\} \quad (35)$$

由式 (22) 与 (31) 可给出总体积应变增量表达式

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{1 + 2\alpha}{9B} d\phi_1 + d\lambda(1 + 2\alpha) \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \quad (36)$$

由式 (23) 与 (32) 可给出总的偏量应变增量表达式

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2S} d\eta_{ij} + d\lambda \frac{\eta_{ij}}{2\sqrt{\phi_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} - \left(\frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{A_{ij}}{1 + 2\alpha} \right) (1 + 2\alpha) \left(\frac{d\phi_1}{9B} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \right) \quad (37)$$

于是, 总的应变增量就可以表示为

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9B} d\phi_1 A_{ij} + \frac{1}{2S} d\eta_{ij} + d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1} A_{ij} + \frac{1}{2\sqrt{\phi_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} \eta_{ij} \right) \quad (38)$$

同样地, 臆应力增量的球形分量可表示为

$$d\phi_1 = \frac{9B}{1+2\alpha} d\varepsilon_{kk} - 9Bd\lambda \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \quad (39)$$

而臆偏应力增量可以表示为

$$d\eta_{ij} = 2Sde_{ij} + 2S\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{1+2\alpha}\right) d\varepsilon_{kk} - \frac{Sd\lambda}{\sqrt{\phi_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{\phi_2}} \eta_{ij} \quad (40)$$

这样, 式 (36) 与式 (37) 或式 (39) 与式 (40) 给出了横观各向同性、非弹性、加工硬化的本构模型的一般本构方程. 此模型具有正交于 $\sigma_{22}-\sigma_{33}$ 平面的材料对称轴. 只要通过实验确定了材料常数 α, β, γ 以及函数 B, S, f 和 k 和相应的系数, 就能完全给出其本构方程.

4.3 模型的基本面貌与材料常数的确定

模型的弹性性状由三个材料常数 α, β 和 γ 以及两个响应函数 B 和 S 所控制. 由式 (22) 可知, 参量 α 与响应函数 B 显示了材料的压缩特性. 由式 (24) 可知, 参量 β, γ 和响应函数 S 显示了材料的剪切特性.

参量 α 定义了流体静水压条件下各向同性平面上的弹性应变 ε_r^e 与正交于各向同性平面的弹性应变 ε_z^e 之间的比值, 即

$$\alpha = \varepsilon_r^e / \varepsilon_z^e \quad (41)$$

如果采用如图 3 所示的笛卡尔坐标系 11, 22 和 33, 各向同性平面为 22, 33, 于是式 (41) 就可以表示为

$$\alpha = \varepsilon_{22}^e / \varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{33}^e / \varepsilon_{11}^e \quad (42)$$

α 的值由实验确定, 如图 3 所示, 它可以由流体静水压缩试验卸载应变曲线的斜率来确定. 对于各向同性材料, α 的值变成

$$\alpha = \varepsilon_{22}^e / \varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{33}^e / \varepsilon_{11}^e = 1 \quad (43)$$

弹性响应函数 B (对各向同性材料来说, B 是弹性体变模量) 描述了流体静水压缩试验的卸载应力 - 应变响应. B 可以表示为第一臆应力不变量的函数, 即

$$B = \frac{B_i}{1 - \beta_i} [1 - B_1 \exp(1 - B_2 \phi_1)] \quad (44)$$

这里 B_i 是响应函数 B 的初始值. 式 (44) 与式 (22) 表明材料常数 B_i, B_1 和 B_2 能容易地由流体静水压缩试验的卸载曲线来确定. 从图 4 可以明显地看出来, 式 (44) 可以写成

$$B = \frac{B_i}{1 - B_i} [1 - B_1 \exp(-B_2 \phi_1)] = \frac{1}{9} \frac{d\phi_1}{d\varepsilon_{11}} \quad (45)$$

弹性剪切响应函数 S 可从三轴压缩试验所得到的应力差 - 应变差曲线计算出来. S 假设是第二臆应力不变量 ϕ_2 的函数, 即

$$S = \frac{S_i}{1 - S_i} [1 - S_1 \exp(-S_2 \sqrt{\phi_2})] \quad (46)$$

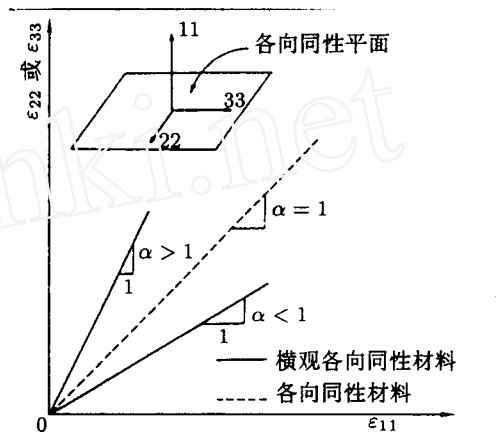


图 3 流体静水压缩试验时各向同性材料与横观各向同性材料的压缩应变轨迹

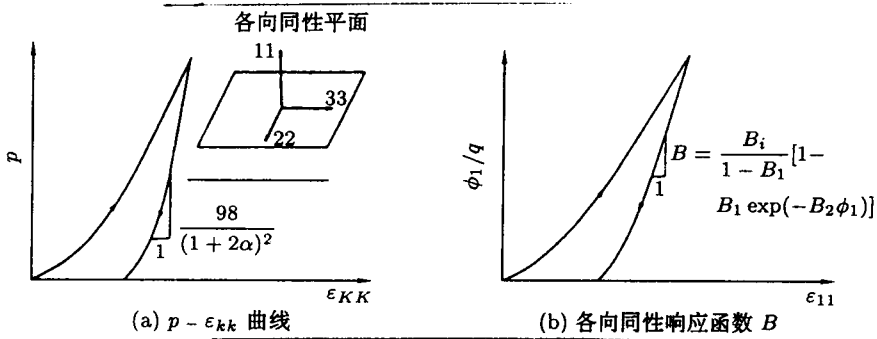


图 4 横观各向同性弹性体对流体静水压压缩试验的响应

这里 S_i 是响应函数 S 的初始值 (图 5), 而 S_1 和 S_2 是材料常数. 式 (24) 表明材料常数 S_i , S_1 和 S_2 很容易从立方试件的三轴试验所得到的卸载应力 - 应变曲线的斜率来确定. 如图 5 所示, 在三维立方体试件上, 轴向应力加在平行于 33- 轴的方向上, 而 $\sigma_{11} = \sigma_{22} =$ 围压.

从同是这些试验结果的卸载应变轨迹的斜率还可以来确定 β 值. 如图 6 所示, β 值可以表示为

$$\beta = \bar{\epsilon}_{11}^e / \bar{\epsilon}_{22}^e \quad (47)$$

这里 $\bar{\epsilon}_{ij}^e$ 是弹性应变偏量张量.

γ 值可由如下的办法来确定: 由直剪或单剪试验的剪应力 - 剪应变卸载响应曲线 σ_{13} -

ϵ_{13} 的斜率等于 $2S/\gamma$, 当 S 求得后就可以直接求得 γ 值, 如图 7 所示.

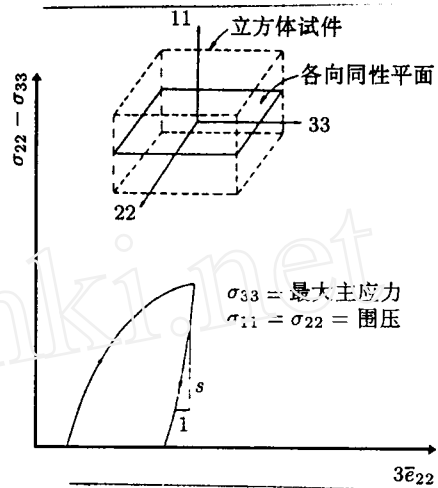


图 5 为定量确定响应函数 S 所建议采用的三轴试验方法和画出的结果

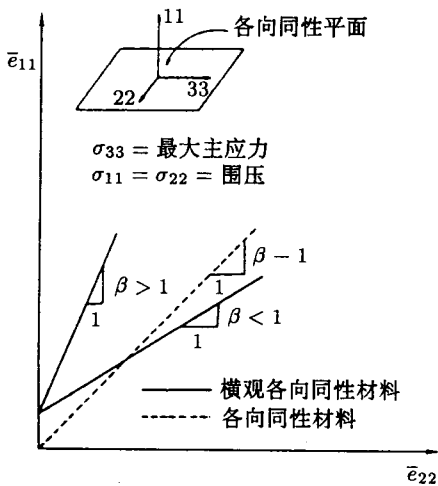


图 6 各向同性与横观各向同性材料在三轴试验时横向应变结果的比较

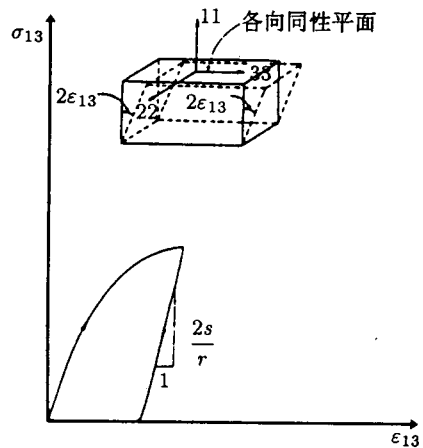


图 7 横观各向同性材料对单剪的应力 - 应变响应

描述塑性屈服与硬化过程的加载函数 f 假设是由两部分组成的：最终破坏包络——给出了材料的最大剪切强度；椭圆形的应变硬化屈服面——运动过程中产生塑性应变。破坏包络面在数学上可以表示为

$$h(\phi_1, \sqrt{\phi_2}) = \sqrt{\phi_2} - \phi\phi_1 - k \quad (48)$$

应变硬化屈服面可以表示为

$$H(\phi_1, \sqrt{\phi_2}, k) = [\phi_1 - L(k)]^2 + R^2\phi_2 - [X(k) - L(k)]^2 = 0 \quad (49)$$

这里， ϕ_1 与 ϕ_2 分别为第一、第二应力不变量（见式 (7) 与 (8)）。参量 k 与 ψ 是材料常数， k 为材料的屈服强度参量，而 ψ 为材料的摩擦强度参量，如图 2 所示。 k 可以假设为

$$k = X - 3p_c \quad (50)$$

上式中 X 与塑性体积应变有关，而塑性体积应变 ϵ_{kk}^p 满足下列关系式

$$\epsilon_{kk}^p = W[1 - \exp(-Dk) - A_D k \exp(-D_1 k)] + W_1 k^2 \exp(-D_2 k) - W_2 k^2 \exp(-D_3 k) \quad (51)$$

这里， p_c 是先期固结压力； W 是材料受流体静水压加载时产生的最大塑性压缩体积应变；而 $D, A_D, D_1, W_1, D_2, W_2$ 和 D_3 都是材料常数。式 (49) 中的材料参量 R 是椭圆屈服面中的长轴与短轴之比（见图 2）。 R 的值依赖于材料的压缩状态。在本模型中 R 假设为

$$R = \frac{R_i}{1 + R_1} [1 + R_1 \exp(-R_2 L^3)] \quad (52)$$

上式中 R_i, R_1 和 R_2 是材料常数，可由实验来确定。从图 2 可看出 L 与 X 存在下列关系

$$L = \frac{X - Rk}{1 + \psi R} \quad (53)$$

由上述关系式可以证明硬化面与破坏包络相交处的切线是水平向的。

参量 α 和 β 影响破坏包络与硬化屈服面的形状。这一点从图 8 所示的主应力空间可以清楚地看出来。在八面体平面上，破坏包络的轨迹由式 (48) 所给出，其形状是个椭圆。而图 8 中虚线所画的图则表示了 $\alpha = \beta = 1$ 时的破坏面轨迹。

总的来说，弹塑性横观各向同性模型共有 3 个材料常数 (α, β, γ) 和 5 个函数 (2 个描述弹性，另 3 个描述塑性)，总共需要 22 个材料常数才能完全确定本模型所描述的性状。

5 结 语

岩石介质应力所引起的各向异性性状十分复杂，对它的模拟是十分困难的。其困难主要是因为反映岩石介质的各向异性模型要求的待定材料常数很多，确定这些常数需要多种不同加载

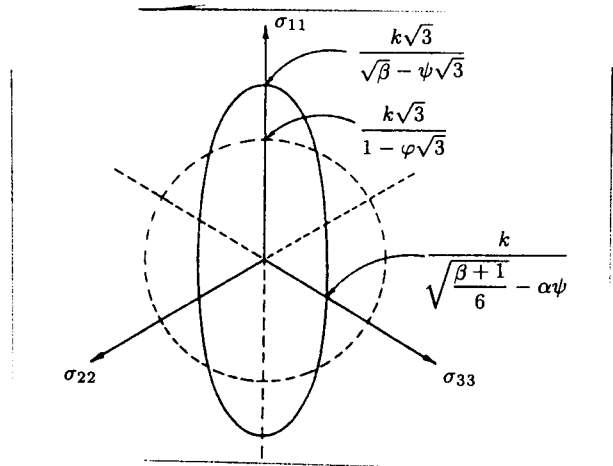


图 8 八面体平面上的各向同性与横观各向同性破坏面
—— 横观各向同性破坏面，--- 各向同性破坏面

途径的岩石力学实验,这样就很难在工程实践中应用推广.所以,在岩石介质本构特性模拟的研究中,不能简单地认为模型越复杂理论水平就越高,而应该将理论上的严密性与使用上的简易性结合起来,使建立的本构模型既能较好地模拟岩石介质的本构特性,又不含太多的待定材料常数,易于实际应用^[18].

参 考 文 献

- 1 Eringen A C. Nonlinear Theory of Continuous Media. MC Graw Hill, 1962
- 2 Eringen A C. Mechanics of Continua. Robert E Krieger. Publishing Company, 1980
- 3 Freudenthal A M. The Mathematical Theory of the Inelastic Continuum, Handbuch der Physik VI. Berlin: Springer-Verlag, 1958
- 4 Noll W. *Arch Rational Mech Anal*, 1958, 2: 197
- 5 Nye J F. Physical Properties of Crystals. New York: Oxford University Press, 1957
- 6 Chen W F, Haw D J. Plasticity for Structural Engineers. New York: Springer-Verlag, 1988
- 7 Szczepinski W. *Arch Mech*, 1992, 44(5): 663~698
- 8 Socha G, Szczepinski W. *Arch Mech*, 1994, 46(1): 77~190
- 9 Yang R N, Ko H Y. Limit equilibrium, plasticity and generalized stress-strain in geotechnical engineering. In: ASCE. New York, 1981, 649~710
- 10 Baladi G Y. An elastic-plastic constitutive relation for transverse-isotropic three-phase earth material. *Mise Pap S-78-14*, U S Army Engineer Waterways Experiment Station, C E Vieksburg. Miss, 1978, 6~46
- 11 Nemat-Nasser, Horii H. Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, extolcation, and rockburst. *J of Geophysical Research*, 1982, 87(B8): 6805~6821
- 12 Horri H, Nemat-Nasser. Compression-induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure. *J of Geophysical Research*, 1985, 90(B4): 3015~3125
- 13 Nihei K T, Myer L R, Kemeny J M, Liu Z, Cook N G W. Effects of heterogeneity and friction on the deformation and strength of rock. In: Bazant Z P, Bittnar Z, Jirasek M and Mazars J eds. *Fracture and Damage of Quasibrittle Structures*. E and F Spon. London/New York, 1994. 479
- 14 Jean Lemaitre. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, 1992
- 15 Van Der Giessen E. A 2D analytical multiple slip model for continuum texture development and plastic spin. *Mech Mat*, 1992, 13(1): 93~115
- 16 Aydan O, Tokashiki N, Seiki T. Micro-structure models for porous rocks to jointed rock mass. In: *Proceedings of the Third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*. Seoul, Korea, Sept, 1996: 2235~2242
- 17 Lekhnitskii S G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. San Francisco: Holden-Day, 1963. 15~32
- 18 Zhang Gende. The stability analysis for highslope excavation of rock mass. In: *Proc of the Ninth International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics*. 1997. 1727~1732

MODELLING FOR TRANSVERSELY ISOTROPIC BEHAVIOUR OF ROCK/SOIL

Zhang Gende

Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080

Zhu Weiyao

Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics, CAS, Langfang, Hebei 065007

Abstract In this paper, the modelling of the transversely isotropic behaviour of rock/soil is reviewed, such as transversely isotropic elastic-plasticity and yield criterion, the mechanical models and the mathematical formula are also given.

Keywords Rock/Soil, Constitutive modelling, transversely isotropic behaviour