

[文章编号] 1001-246X(2005)02-0117-06

# 迎风紧致格式求解 Hamilton-Jacobi 方程

田保林, 傅德薰, 马延文, 李新亮

(中国科学院力学研究所 LNM 国家重点实验室, 北京 100080)

**[摘要]** 基于 Hamilton-Jacobi (H-J) 方程和双曲型守恒律之间的关系, 将三阶和五阶迎风紧致格式推广应用求解 H-J 方程, 建立了高精度的 H-J 方程求解方法. 给出了一维和二维典型数值算例的计算结果, 其中包括一个平面激波作用下的 Richtmyer-Meshkov 界面不稳定性问题. 数值试验表明, 在解的光滑区域该方法具有高精度, 而在导数不连续的不光滑区域也获得了比较好的分辨效果. 相比于同阶精度的 WENO 格式, 本方法具有更小的数值耗散, 从而有利于多尺度复杂流动的模拟中 H-J 方程的求解.

**[关键词]** Hamilton-Jacobi 方程; 迎风紧致格式

**[中图分类号]** O 35 **[文献标识码]** A

## 0 引言

Hamilton-Jacobi (H-J) 方程在许多实际问题中都有应用, 如常用的界面追踪技术——Level Set 方法中所用的控制方程就属于 H-J 方程<sup>[1,6,7]</sup>, 在优化控制理论、几何光学和图像处理等方面也有广泛应用.

$n$  维空间下一般形式的 H-J 方程为

$$\begin{cases} \phi_t + H(x_1, \dots, x_n, t, \phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}) = 0, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

方程(1)的解通常是连续的, 但是即使给定充分光滑的初值, 它的解也可能是不光滑的, 而双曲型方程的解则可能是不连续的. 在满足熵条件的情况下, 方程(1)具有唯一解. 关于方程(1)解的存在性和唯一性问题, Crandall<sup>[2]</sup>等做了专门的论述.

H-J 方程和双曲型守恒律有着紧密的联系, 在一维情形下 H-J 方程可以由相应的双曲型守恒律方程积分获得. 对于一维 H-J 方程

$$\phi_t + H(\phi_x) = 0, \quad (2)$$

如果令  $u = \phi_x$ , 那么方程(2)就可以转换成双曲型守恒律

$$u_t + H(u)_x = 0. \quad (3)$$

对多维情形虽没有相应的转化关系, 但也可以从形式上认为 H-J 方程是双曲型守恒律的积分形式.

对于双曲型守恒律方程的求解, 已经发展了很多成熟的迎风型通量分裂方法, 诸如全局和局部的 Lax-Friedrichs 格式(LF, LLF)、Godunov 型格式、具有熵修正的 Roe 格式(RF)等. 基于 H-J 方程和双曲型方程的联系, 可以将这些方法应用到 H-J 方程的求解中. 文[3, 4]以这些单调格式为基架, 以高精度的 ENO 格式和 WENO 格式求解 H-J 方程. 文[7~10]从粘性解的角度分析了双曲型守恒律与 H-J 方程的关系, 并将其发展的求解双曲型守恒律方程的二阶精度的松弛格式(relaxation scheme)应用于 H-J 方程的求解中. 本文则以 LF, Godunov 和 Roe 等通量分裂格式为基架, 应用迎风紧致格式建立了求解 H-J 方程的高精度和高分辨率方法.

## 1 Hamilton-Jacobi 方程的求解

首先, 我们给出离散 H-J 方程空间导数所用的差分格式——迎风紧致格式. 它具有精度高和所用网格基架点少等优点, 可用于求解非定常多尺度的复杂流动问题, 研究其细微结构和机理, 已经成功的应用于求解

[收稿日期] 2003-12-01; [修回日期] 2004-03-06

[作者简介] 田保林(1975-), 男, 山东成武, 博士生, 从事计算流体力学, R-M 不稳定性的数值模拟方面的研究.

双曲型守恒律方程<sup>[5]</sup>.

具有三阶精度的迎风紧致格式(UCD3)

$$\frac{2}{3}F_j^+ + \frac{1}{3}F_{j+1}^+ = \left(\frac{5}{6}\delta_x^- + \frac{1}{6}\delta_x^+\right)f_j, \quad (4)$$

具有五阶精度的迎风紧致格式(UCD5)

$$\frac{3}{5}F_j^+ + \frac{2}{5}F_{j+1}^+ = \frac{1}{60}\delta_x^-(-f_{j+2} + 11f_{j+1} + 47f_j + 3f_{j+1}^-), \quad (5)$$

这里差分算子  $\delta_x^- f_j = f_j - f_{j-1}$ ,  $\delta_x^+ f_j = f_{j+1} - f_j$ ,  $\frac{F_j^+}{\Delta x}$  和  $\frac{F_j^-}{\Delta x}$  分别是对  $\frac{\partial f}{\partial x}$  向左和向右偏斜的差分逼近.

对于 H-J 方程,有了迎风格式,但是还必须要有相应通量分裂方法与之相结合,才能形成一套完整的求解算法.为简单起见,我们以二维形式的 H-J 方程为例给出这一算法.首先给出所用的通量分裂格式.考虑如下方程(这里为简单起见省略了其中的自变量  $x, y, t$ )

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y) = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y), \quad (6)$$

其半离散形式为

$$\phi_t = L(\phi)_{i,j} = -\hat{H}(\phi_{x,i,j}^+, \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+, \phi_{y,i,j}^-), \quad (7)$$

其中  $\hat{H}$  为和  $H$  相容的单调通量算子.这里单调性表示  $\hat{H}$  对它的第 1,3 个分量是非增的函数,而对其第 2,4 个分量是非减的函数.

人们已经发展了很多类型的通量分裂格式,本文给出两种常用的格式,其他格式可以参见文[1,3,4].

1)局部 Lax-Friedrichs 格式(LLF)

$$\hat{H}^{LLF}(u^+, u^-, v^+, v^-) = H\left(\frac{u^+ + u^-}{2}, \frac{v^+ + v^-}{2}\right) - \alpha_x \frac{u^+ - u^-}{2} - \alpha_y \frac{v^+ - v^-}{2}, \quad (8)$$

其中

$$\alpha_x = \max_{\substack{u \in I(u^-, u^+) \\ v \in [C, D]}} |H_1(u, v)|, \quad \alpha_y = \max_{\substack{u \in [A, B] \\ v \in I(v^-, v^+)}} |H_2(u, v)|,$$

$$H_1(u, v) = \frac{\partial H(u, v)}{\partial u}, \quad H_2(u, v) = \frac{\partial H(u, v)}{\partial v}, \quad I(a, b) = [\min(a, b), \max(a, b)],$$

$[A, B]$ 和 $[C, D]$ 分别是  $u^+$  和  $v^+$  的取值范围.如果将上式中的  $I(u^-, u^+)$ 和 $I(v^-, v^+)$ 分别替换为 $[A, B]$ 和 $[C, D]$ ,则可得全局的 Lax-Friedrichs 格式(LF).

2)具有熵修正的 Roe 格式(RF)

$$\hat{H}^{RF} = \begin{cases} H(u^*, v^*), & H_1(u, v), H_2(u, v) \text{ 不改变符号,} \\ & \text{其中 } u \in I(u^-, u^+), v \in I(v^-, v^+), \\ H\left(\frac{u^+ + u^-}{2}, v^*\right) - \alpha_x \frac{u^+ - u^-}{2}, & H_2(u, v) \text{ 不改变符号,其中} \\ & u \in [A, B], v \in I(v^-, v^+), \\ H\left(u^*, \frac{v^+ + v^-}{2}\right) - \alpha_y \frac{v^+ - v^-}{2}, & H_1(u, v) \text{ 不改变符号,其中} \\ & v \in [C, D], u \in I(u^-, u^+), \\ \hat{H}^{LLF}(u^+, u^-, v^+, v^-), & \text{其他,} \end{cases}$$

其中  $u^*, v^*$  定义如下

$$u^* = \begin{cases} u^+, & H_1(u, v) \leq 0, \\ u^-, & H_1(u, v) > 0, \end{cases} \quad v^* = \begin{cases} v^+, & H_2(u, v) \leq 0, \\ v^-, & H_2(u, v) > 0. \end{cases}$$

以上述通量分裂格式(8)和(9)为基架,对其中的  $u^*, v^*$  分别用迎风紧致格式进行差分逼近,就实现了对 H-J 方程的空间离散化;同时对时间导数的离散采用三阶精度的 Runge-Kutta 格式.

作为总结,我们给出采用迎风紧致格式求解 H-J 方程的算法:

①对任意节点 $(i, j)$ ,计算

$$u_{i,j}^+ = \phi_{x(i,j)}^+ = \frac{F_i^+}{\Delta x}, \quad v_{i,j}^+ = \phi_{y(i,j)}^+ = \frac{F_j^+}{\Delta y}, \quad \phi_{i,j}^n = L(\phi)_{i,j}^n = -\hat{H}(\phi_{x,i,j}^+, \phi_{x,i,j}^-, \phi_{y,i,j}^+, \phi_{y,i,j}^-);$$

②时间积分,采用三阶 TVD 型的 Runge-Kutta 方法由  $\phi_{i,j}^n$  计算  $\phi_{i,j}^{n+1}$ .

另外,在步骤①中,也可以采用其他类型的迎风格式,例如一阶迎风、ENO 和 WENO 等格式来计算空间导数.

## 2 数值算例

下面给出几个典型的一维和二维数值算例.

算例 1<sup>[3,4]</sup>

$$\phi_t + H(\phi_x) = 0, \quad \phi(x, 0) = -\cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

其中

$$H(u) = \frac{(u + \alpha)^2}{2} \quad (\text{Burgers 方程, 凸的通量函数}),$$

或

$$H(u) = -\cos(u + \alpha) \quad (\text{非凸的通量函数}).$$

计算中取  $\alpha = 1$ , 采用周期边界条件. 图 1 给出了  $t = 1.5/\pi^2$  时的计算结果, 图 1(a) ~ (c) 为 Burgers 方程计算结果, 图 1(d) 为非凸的通量函数的计算结果, 其中每一图中所嵌入的小图为非光滑区域的局部放大. 在 81 个网格节点划分下(图 1(a)), 三阶(UCD3)和五阶(UCD5)迎风紧致格式、五阶 WENO 格式都与精确解(Exact)

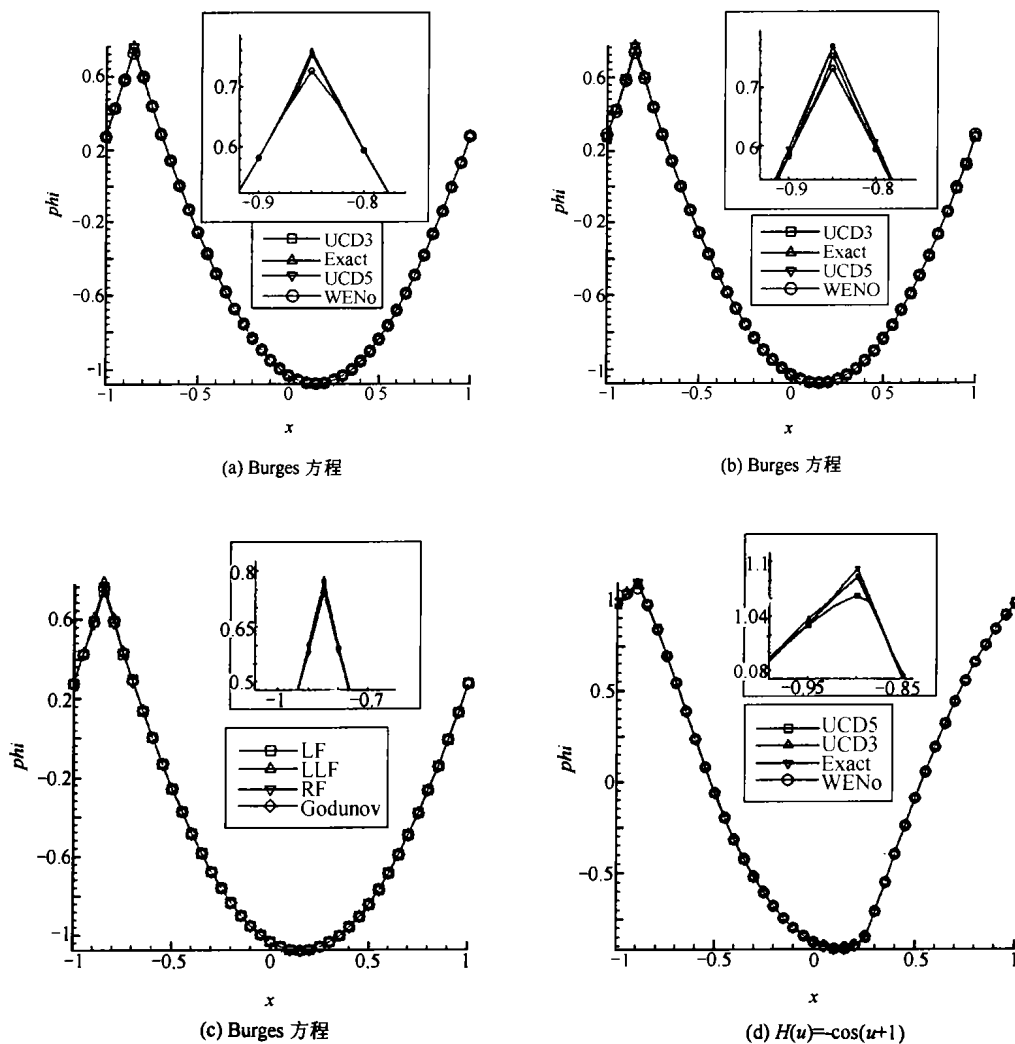


图 1 算例 1 的计算结果

Fig.1 Numerical results of Example 1

吻合的很好,而在 41 个网格节点划分下(图 1(b)),在解的非光滑区域,UCD3 和 UCD5 仍能够给出十分吻合的结果,WENO 格式则具有稍微偏大的耗散,这也可以从图 1(d)可以看出.图 1(c)给出了采用 UCD5 格式在各种通量分裂格式下的计算结果,可以看出 LF 格式具有较大的耗散,而 LLF,RF 和 Godunov 三者的计算结果基本一样.需要指出的是,LLF 和 RF 要比 Godunov 格式更容易程序实现,而且计算速度更快.

算例 2 Richtmyer-Meshkov(R-M)界面不稳定性问题

Richtmyer-Meshkov 不稳定性是激波加速两种不同密度的分层流体的交界面所导致的失稳现象,它在惯性约束热核聚变(ICF)、超新星爆发等问题中都有着广泛的应用背景<sup>[13]</sup>.

本算例模拟了一个向右运动的激波与受扰动的流体界面相互作用所产生的 R-M 不稳定性现象.初值如图 2 所示,区域(1),(2)之间为向右运动的马赫数为 1.1 的入射激波,(2),(3)之间为一个单模态的正弦扰动的界面,两侧的密度比为 5.初始激波位于  $x = 0.1$  处,扰动界面中心位于  $x = 0.16$  处,扰动振幅为 0.04.参考坐标系取在波后气体区域(1)上,计算区域为  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ,网格划分为  $161 \times 161$ ;无量纲化初始条件为:区域(2)密度和压力为 1,速度  $u = -0.1882, v = 0$ ,区域(1)的值可由激波关系确定,区域(3)除密度为区域(2)的 1/5 外,其余同(2)区.

本算例控制方程为可压缩 Euler 方程,同时采用 Level set<sup>[6]</sup>方法追踪界面运动.其中 Level set 方程为

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

对 Euler 方程和 Level set 方程进行通量分裂后,空间导数采用五阶迎风紧致格式(UCD5)和五阶 WENO 格式离散,时间方向采用三阶 Runge-Kutta 方法.

在 Level set 方程的求解过程中,保持 Level set 函数为符号距离函数是十分重要的<sup>[11]</sup>,首先这样可以提高界面捕捉的精度;其次,如果界面具有给定的一个厚度,那么在 Level set 方法中采用距离函数可以保持这一厚度不变.有多种方法来实现 Level set 函数为距离函数,本文采用比较常见的一种方法<sup>[11]</sup>,通过求解方程(12)的定常解来获得符号距离函数.

$$\begin{cases} \varphi_t - \text{sign}(\varphi_0)(1 - |\nabla \varphi|) = 0, \\ \varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y). \end{cases} \tag{12}$$

方程(12)为一 H-J 方程,通量分裂我们采用修正的 Godunov 格式<sup>[12]</sup>,空间导数采用五阶迎风紧致格式,时间方向采用三阶 Runge-Kutta 方法.图 3 给出了对 Level set 函数的初值进行重新初始化后的 Level set 函数分布(粗线为界面位置),其中的虚线为没有进行重新初始化的 Level set 函数,可以看出是不满足符号距离函数的定义的.在本算例的计算中,方程(12)一般只需迭代 1~3 次就可达到收敛要求.

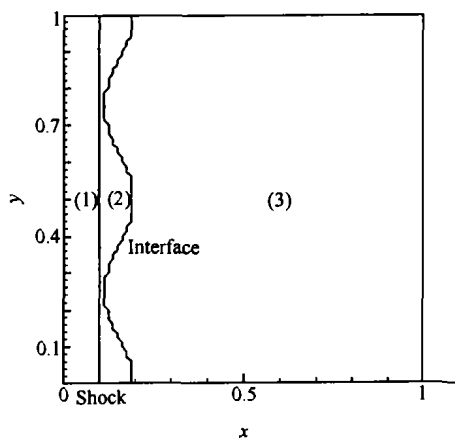


图 2 初值分布

Fig.2 Initial value distribution

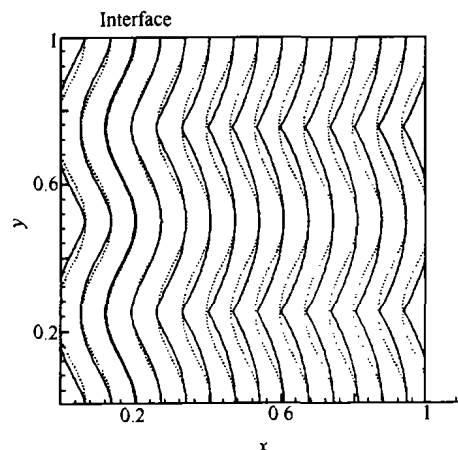


图 3 重新初始化前后的 Level set 函数

Fig.3 Level set function after reinitialization

激波和界面作用后,形成穿透激波和反射波,初始扰动不断发展,对于本文的激波由重流体进入轻流体的情况,界面将发生相变,初始的波峰和波谷将发生逆转.如图 4 所示随着时间的发展左侧的重流体深入到

轻流体中,形成了钉子结构,而轻流体则进入重流体形成泡状结构.在图 4 中,实线为采用 UCDS 格式的计算结果,而虚线则是五阶 WENO 格式的计算结果,可以看出,对于这种多尺度的复杂流动,在相同网格数的条件下,WENO 格式具有较大的数值耗散,界面发生了很大的抹平现象,不能很好的分辨出流动的细微结构,而五阶迎风紧致格式则给出了比较好的模拟结果.进一步说明了迎风紧致格式对模拟多尺度复杂流动的有效性.

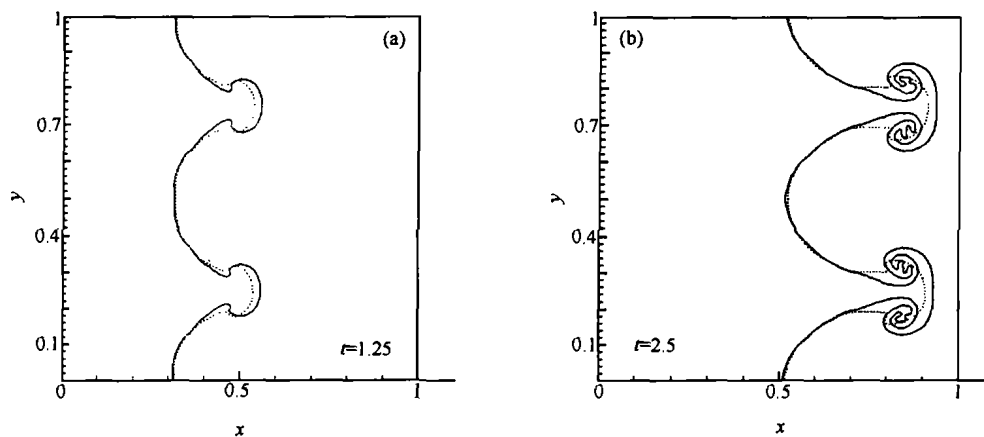


图 4 界面

Fig.4 Interface

### 3 结论

本文根据 H-J 方程和双曲型守恒律之间的联系,以双曲型守恒律求解方法中所用的通量分裂格式为基架,采用高精度的迎风紧致格式建立了高效的 H-J 方程求解算法,计算了几个典型的数值算例.另外需要特别提出的是,三阶和五阶迎风紧致格式相比于五阶 WENO 格式,数值耗散较小,边界条件易于处理,且计算简单,速度在相同的网格划分下五阶迎风紧致格式至少比五阶 WENO 格式快一倍以上.

#### [参 考 文 献]

- [ 1 ] 刘儒勋,王志峰.数值模拟方法和运动界面追踪[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2001,202 - 206.
- [ 2 ] Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial equations [J]. Bulletin (New Series) of Amer Math Soc, 1992, **27**: 1 - 67.
- [ 3 ] Osher S, Shu C-W. High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations [J]. J Numer Anal, 1991, **28**: 907 - 922.
- [ 4 ] Jiang G-S, Peng D. Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations [J]. SIAM J Sci Comput, 2000, **21**: 2126 - 2143.
- [ 5 ] Fu Dexun, Ma Yanwen. A high order accurate difference scheme for complex flow field [J]. J Comput Phys, 1997, **134**: 1 - 15.
- [ 6 ] Osher S. A level set formulation for the solution of the Dirichlet problem for Hamilton-Jacobi equations [J]. J Math Anal, 1993, **24**: 1145 - 1152.
- [ 7 ] Jin S, Xin Z P. Numerical passage from systems of conservation laws to Hamilton-Jacobi equations, and relaxation schemes [J]. SIAM J Numer Anal, 1998, **35**(6): 2385 - 2404.
- [ 8 ] Jin S, Xin Z P. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions [J]. Commun Pur Appl Math, 1995, **48**: 235 - 276.
- [ 9 ] Jin S, Katsoulakis M A, Xin Z P. Relaxation schemes for curvature-dependent front propagation [J]. Commun Pur Appl Math, 1999, **52**(12): 1587 - 1615.
- [ 10 ] Jin S, Li X T. Multi-phase computations of the semiclassical limit of the Schrodinger equation and related problems: Whitham vs Wigner [J]. PHYSICA D, 2003, **182**(1 - 2): 46 - 85.
- [ 11 ] Sethian J A, Smereka Peter. Level set methods for fluid interfaces [J]. Annu Rev Fluid Mech, 2003, **35**: 341 - 372.

- [12] Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. *J Comput Phys*, 1999, **152**:393 - 427.
- [13] Holmes R L, Grove W, Sharp H. Numerical investigation of Richtmyer-Meshkov instability using front tracking [J]. *J Fluid Mech*, 1995, **301**:51 - 64.

## Upwind Compact Schemes for Hamilton-Jacobi Equations

TIAN Bao-lin, FU De-xun, MA Yan-wen, LI Xin-liang

(*LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

**Abstract:** Based on the close relationship between Hamilton-Jacobi(H-J) equations and hyperbolic conservation laws, a high-order numerical method is developed to solve the H-J equations in the 3rd order and 5th order compact schemes. The upwind compact schemes are tested on a variety of one-dimensional and two-dimensional problems, including a problem related to the Richtmyer-Meshkov instability accelerated by planar shocks. Numerical results show that these schemes yield uniform high-order accuracy in smooth regions and satisfactorily resolve discontinuities in the derivatives. Moreover, since the present methods have less numerical dissipation than WENO scheme with the same order, they could be used to solve the H-J equations more accurately in the simulation of multi-scale complex flows.

**Key words:** Hamilton-Jacobi equation; upwind compact scheme