

刚性桩横向承载力的三维极限分析

崔新壮^{1,2}, 丁桦², 金青¹, 朱维申¹, 段祝平²

(1. 山东大学 土建与水利学院, 山东 济南 250061; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

摘要: 根据试验中观察到的土体破坏模式, 建立了相应的破坏机构, 用上限法对 $c-\varphi$ 土中刚性桩的横向承载力进行了三维极限分析。将破坏土体分为 3 个塑性变形区, 假设了满足运动边界条件的合理速度场, 建立了求解光滑刚性桩横向承载力上限解的数学模型。通过极限分析发现光滑刚性桩承载力的上限解与差分解相差不大, 并利用由有限差分法得到的规律对光滑桩承载力的上限解进行了修正, 得到了粗糙桩承载力的粗略解。三维极限分析为计算刚性桩横向承载力提供了一种简便有效的方法。

关键词: 桩基工程; 刚性桩; 横向承载力; 极限分析; 上限法

中图分类号: TU 473.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2006)03-0641-06

THREE-DIMENSIONAL LIMIT ANALYSIS OF LATERAL BEARING CAPACITY OF RIGID PILES

CUI Xin-zhuang^{1,2}, DING Hua², JIN Qing¹, ZHU Wei-shen¹, DUAN Zhu-ping²

(1. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: According to the failure mode of soil mass observed from tests, the corresponding failure mechanism is proposed to solve the lateral bearing capacity of rigid piles embedded in $c-\varphi$ soil with upper bound analysis method. The three-dimensional failure mechanism that consists of three deformation failure regions and the reasonable velocity field that meets kinematical boundary condition of each deformation failure region are assumed. The mathematical model of the upper bound solution of the lateral bearing capacity for smooth rigid piles is established and solved. It is found that the difference between the upper bound solution and the finite difference solution of the lateral bearing capacity of smooth rigid piles is little. In addition, the upper bound solution of the lateral bearing capacity of rough rigid piles is obtained by modifying that of smooth rigid piles according to the results acquired from finite difference method. The three-dimensional limit analysis provides a simple and effective computing method for the lateral bearing capacity of rigid piles.

Key words: pile foundation engineering; rigid piles; lateral bearing capacity; limit analysis; upper bound method

1 引言

刚性桩(本文只研究主动桩)应用非常广泛, 如埋置于相对软弱地基中的各种护栏立柱、电线杆、

桥墩及海洋平台基础等, 它们可承受上部结构施加的横向载荷。作为横向受载桩, 相关的研究结果可用于刚性桩, 但是刚性桩与一般的横向受载桩不同, 其变形与土的变形相比很小, 可以不计。G. G. Meyerhof 等^[1]、T. R. Chari 和 G. G. Meyerhof^[2]曾分

收稿日期: 2004-10-28; **修回日期:** 2005-03-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372104); 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412706)

作者简介: 崔新壮(1974-), 男, 博士, 2004 年于中国科学院力学研究所工程力学专业获博士学位, 现为讲师, 主要从事基础工程方面的教学与研究工作。E-mail: cuixz@sdu.edu.cn.

别对砂土和黏土中的刚性桩进行过一系列模型试验,发现了刚性桩横向承载力的一些规律,但未对其失稳机制进行研究。在对刚性桩进行设计时,前人主要用极限地基反力法来估算其横向承载力,如 Brinch Hansen 法^[3]及 Broms 法^[4, 5]等,都是先假设一种桩上极限土反力分布模式,然后根据桩的整体受力平衡来计算极限承载力,实质上是一维极限平衡法,而且不同的方法得到的结果也相差较大。另外,在理论研究方面, J. D. Murff 和 J. M. Hamilton^[6]曾对饱和黏土中刚性桩的横向承载力进行了三维上限分析,分别利用了 Tresca 和 Mises 两种破坏准则,所假设的破坏机构不是刚性块而是塑性变形区,并假设了相应的速度场,而且将结果与试验结果及其他学者的分析结果比较后发现,这种近似分析方法简单而有效。

以上对刚性桩横向承载力的研究,都是针对砂土或黏土进行的。而地表中广泛分布的土,其强度一般不能仅靠黏聚力 c 或内摩擦角 φ 中任一个参数来确定,在此借用 W. F. Chen^[7]的叫法,将这种土统称为 $c-\varphi$ 土,如粉质黏土。本文根据试验中观察到的土体破坏现象,利用上限分析方法对光滑刚性桩的横向承载力进行了分析。最后,为了将光滑桩的上限分析结果用于粗糙桩,用有限差分计算结果对光滑桩横向承载力的上限解进行修正,得到了粗糙桩承载力可接受的上限解。

2 试验现象

为了探究横向载荷作用下刚性桩的失稳机制,在粉质黏土中进行了一系列桩头自由刚性桩横向受载试验,发现了一些重要的现象^[8]:

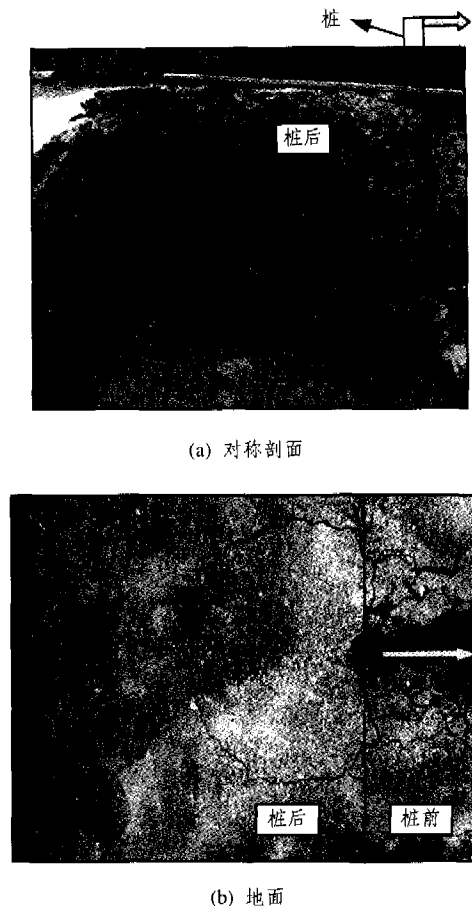
(1) 刚性桩失稳后,桩后土体内出现一土楔,见图 1(a)。土楔内土的变形很小,随桩的运动,土楔沿剪切破坏面向斜上方运动,在桩后土表面可见一非完全的椭圆形鼓包,见图 1(b)。图 1 中桩外径、埋深及加载高度分别为 57, 600 和 335 mm。

(2) 刚性桩绕一回转中心转动,而且由试验结果可知,失稳后回转中心在桩上的位置基本不变。

下面将根据试验中观察到的土体破坏特征,用极限分析法来求解刚性桩横向承载力的上限解。

3 刚性桩横向承载力的上限解

很多文献已对极限分析原理作了论述^[6-9],并



(a) 对称剖面

(b) 地面

图 1 土体的破坏特征

Fig.1 Failure characteristics of soil mass

用它解决了岩土工程中的很多问题(如边坡稳定性分析^[9])。其中的上限法不需要考虑力的分布及应力-应变关系,而是从能量的观点解决问题。但是前人在上限分析中所假设的破坏机构大都是刚体运动机构。实际上,岩土体的失稳往往伴随着变形发生,虽然这种变形场很难通过测试准确得到。所以本文事先假设土体的塑性变形破坏机构及满足边界条件的合理速度场,而不是将破坏土体离散为许多相对运动的刚性块。另外,在本文的分析中,假设桩是光滑的,因为只有界面是光滑的,桩土界面的摩擦滑动才符合正交准则,才能应用上限定理。

3.1 破坏区的划分

设刚性桩半径为 \bar{R} , 埋置深度为 l , 加载点高度为 h 。根据由试验观察到的破坏面形状,在进行极限分析时,把土体分为 3 个区,如图 2 所示。

(1) I 区

I 区位于回转中心下部的桩后土体中,其破坏面为一旋转对数螺旋面,是由对数螺旋线绕桩轴旋转而成的面。设 I 区的坐标系为球坐标系 (R, θ, ψ) , 坐标原点为桩的回转中心, z 轴与桩轴线

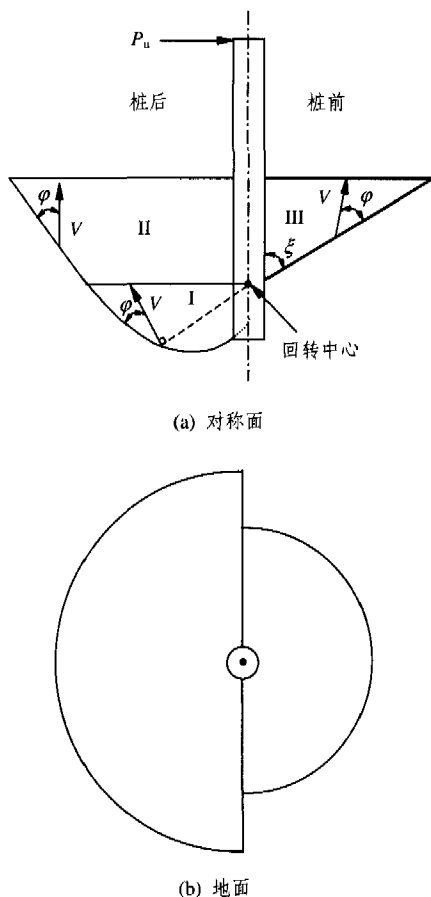


图 2 破坏机构

Fig.2 Failure mechanism

重合, 且指向下, x 轴与加载方向相反。假设 I 区破坏面恰好通过桩尖的外边缘, 而且止于 $\psi = \pi/2$ 的平面, 破坏面方程可写为

$$R = R_0 \exp(\psi \tan \varphi) \quad (1)$$

式中: R_0 为 $\psi = 0$ 对应的极径, 为待定参数。

I 区的范围为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \psi_0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\bar{R}}{\sin \psi} \leq R \leq R_0 \exp(\psi \tan \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: ψ_0 为桩尖外边缘上各点的 ψ 值, 且有

$$\psi_0 = \arctan\left(\frac{\bar{R}}{T}\right) \quad (3)$$

式中: T 为回转中心到桩尖的轴向距离。

(2) II 区

II 区位于回转中心上部的桩后土体中。设 II

区的坐标系为柱坐标系 (r, θ, z) , 坐标原点仍为桩的回转中心, z 轴与桩轴线重合, 且指向下, x 轴与加载方向相反。II 区的破坏面是一圆台面, 与 I 区的破坏面相切, 止于 $z = z_g$ 面(地面), z_g 为地面上各点的 z 坐标, 其值为负, 则破坏面方程可写为

$$r = R_0 \exp\left(\frac{\pi}{2} \tan \varphi\right) - z \tan \varphi \quad (4)$$

II 区的范围为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \bar{R} \leq r \leq R_0 \exp\left(\frac{\pi}{2} \tan \varphi\right) - z \tan \varphi \\ z_g \leq z \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由以上破坏区的定义可知, 在桩后土表面会存在一半圆形鼓包, 这近似反映了试验中观察到的非完全椭圆形鼓包。虽然不能与试验现象完全吻合, 但这样将使问题大大简化, 而且对计算结果不会有很大影响。

(3) III 区

III 区位于回转中心上部的桩前土体中。假设 III 区的坐标系也为柱坐标系 (r, θ, z) , 坐标原点仍为桩的回转中心, z 轴与桩轴线重合, 且指向下, 但 x 轴与加载方向相同。III 区破坏面也是一圆台面, 始于 $z = 0$ 面, 止于 $z = z_g$ 面(地面)。破坏面方程可写为

$$r = \bar{R} - z \tan \zeta \quad (6)$$

式中: ζ 为桩前土体破坏角。

III 区的范围为

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \bar{R} \leq r \leq \bar{R} - z \tan \zeta \\ z_g \leq z \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3.2 速度场

假设桩失稳时以角速度 ω 绕回转中心转动。土体速度场的构建不仅要满足运动边界条件, 而且在桩土界面应该接触的位置, 界面法线方向的速度应该是连续的, 在桩土界面应该分离的地方, 桩、土的法向速度应是不连续的。下面将分别构建土体 I, II, III 区的速度场。

(1) I 区的速度场

设 I 区内土体各点只有速度分量 V_ψ , 其他分

量 $V_R = V_\theta = 0$ 。这样, 在破坏面上, 正交流动法则要求的运动边界条件自然满足, 即速度向量与破坏面切面的夹角为 φ 。

若接触面上土的速度为 V_ψ^c , 则接触面上土的法向速度分量为

$$V_{ns} = V_\psi^c \cos \psi \quad (8)$$

接触面上桩的法向速度分量为

$$V_{np} = R\omega \cos \theta \cos \psi \quad (9)$$

式中: ω 为桩的转动角速度。

因为 $V_{ns} = V_{np}$, 于是得

$$V_\psi^c = R\omega \cos \theta \quad (10)$$

考虑到土体的变形, 将 V_ψ^c 乘以一个量纲 1 的衰减因子 $\left(\frac{\bar{R}}{R \sin \psi}\right)^\alpha$ 后得到的速度场, 视为 I 区的速度场, 即

$$V_\psi = R\omega \cos \theta \left(\frac{\bar{R}}{R \sin \psi}\right)^\alpha \quad (11)$$

式中: α 为待优化参数。

(2) II 区的速度场

设 II 区内土体各点只有速度分量 V_z , 其他分量 $V_r = V_\theta = 0$ 。这样, 在破坏面上, 正交流动法则要求的运动边界条件也自然满足, 而且也符合接触面上桩土分离要求。

为满足 I, II 区界面上速度的连续, 令

$$V_z = \left(\frac{\bar{R}}{r}\right)^\alpha \cos \theta \omega r \left[(1-\beta) \frac{z}{z_g} - 1 \right] \quad (12)$$

式中: β 为待优化参数; $(1-\beta) \frac{z}{z_g} - 1$ 为量纲 1 的因子, 考虑了速度场在 z 方向可能的衰减。

(3) III 区的速度场

设 III 区内土的环向速度 $V_\theta = 0$, 而其他 2 个速度分量 V_r, V_z 在破坏面上必须满足正交流动法则要求的运动协调条件, 即

$$-\frac{V_r}{V_z} = \tan(\zeta - \varphi) \quad (13)$$

接触面上桩的法向速度分量为

$$V_{np} = -z \cos \theta \omega \quad (14)$$

根据接触面上桩土法向速度连续性条件, 上式

所示的速度分量必等于接触面上土的径向速度分量 V_r^c , 于是得

$$V_r^c = -z \cos \theta \omega \quad (15)$$

将 V_r^c 乘以一个量纲 1 的衰减因子 $\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)^\eta$ 得到的速度场, 视为 III 区的径向速度场, 即

$$V_r = -z \omega \cos \theta \left(\frac{\bar{R}}{r}\right)^\eta \quad (16)$$

式中: η 为待优化参数。

假设 III 区内每点的速度分量都满足式(13), 则由式(13), (16)得

$$V_z = z \cos \theta \cot(\zeta - \varphi) \omega \left(\frac{\bar{R}}{r}\right)^\eta \quad (17)$$

3.3 内部能量耗散率与外部功率

因为假设桩是光滑的, 所以在桩土界面上没有能量耗散, 只有在破坏面上及塑性变形区内才有能量耗散。根据 W. F. Chen^[7]的研究, 速度间断面上单位面积的能量耗散率为

$$\dot{E} = cV_s \quad (18)$$

式中: V_s 为速度间断面两侧的相对切向速度。

另外, W. F. Chen 给出的塑性变形破坏区单位体积的内部能量耗散率表达式如下:

$$\dot{E} = 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sum \dot{\epsilon}_i \quad (19)$$

式中: $\sum \dot{\epsilon}_i$ 为主应变率中拉应变率之和。已知速度场可由几何方程求得应变率场, 但很难求得主应变率场, 这限制了变形破坏机构的应用。为此, 笔者经过推导, 得到了塑性变形破坏区单位体积能量耗散率的一般表达式(应变以拉为正)^[8]:

$$\dot{E} = c \cot \varphi \dot{\epsilon}_v \quad (20)$$

式中: $\dot{\epsilon}_v$ 为塑性体积应变率。

沿速度间断面对式(18)进行积分, 可得间断面上的总能量耗散率 \dot{D}_1 ; 在变形区内对式(20)进行积分, 可得变形区的总能量耗散率 \dot{D}_2 。

外力包括土的自重和在桩头施加的横向载荷。单位体积的重力功率为容重与重力方向上速度分量的乘积。在变形区内对重力功率进行积分可得总重力功率 \dot{W}_1 , 而横向极限荷载 P_0 所作功率为

$$\dot{W}_2 = P_0 (h - z_g) \omega \quad (21)$$

3.4 数学模型

按照上限定理, 有

$$\dot{W}_1 + \dot{W}_2 = \dot{D}_1 + \dot{D}_2 \quad (22)$$

对上式进行整理, 可得

$$P_u = \frac{\dot{D}_1 + \dot{D}_2 - \dot{W}_1}{(l - z_g)\omega} \quad (23)$$

式(23)右边分子、分母中都含有因子 ω , 可以相互抵消。

式(23)右边含有几个待定参数, 可通过对这些参数进行优化得到最优解。但这些参数要满足下述的一些物理及几何约束条件。

严格的说, 速度场除满足边界条件外, 根据塑性流动正交法则还要求满足下式:

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sum \dot{\epsilon}_i + \sum \dot{\epsilon}_c = 0 \quad (24)$$

式中: $\sum \dot{\epsilon}_c$ 为主应变率中压应变率之和。

对刚性桩横向承载力问题, 要同时满足以上 2 类条件往往较难。在此放松式(24)所述的条件, 但必须满足以下 2 个条件:

(1) 对库仑相关材料, 塑性变形必伴随着体积增大, 故塑性体积应变率应大于 0, 即 $\dot{\epsilon}_v > 0$ 。

(2) 由应变莫尔圆知: 塑性各正应变率分量应不大于 $\sum \dot{\epsilon}_i$, 且不小于 $\sum \dot{\epsilon}_c$; 各工程剪应变率分量应不大于 $(\sum \dot{\epsilon}_i - \sum \dot{\epsilon}_c)$ 。对于 $\sum \dot{\epsilon}_i$, $\sum \dot{\epsilon}_c$ [8], 有

$$\sum \dot{\epsilon}_i = \frac{\dot{\epsilon}_v}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (25)$$

$$\sum \dot{\epsilon}_c = \frac{\dot{\epsilon}_v}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad (26)$$

另外, 破坏机构各几何参数往往不是独立的, 而是要满足一定关系, 即

$$T = l + z_g \quad (27)$$

$$\psi_0 = \arctan\left(\frac{\bar{R}}{T}\right) \quad (28)$$

$$R_0 = \frac{\bar{R}}{\sin \psi_0 \exp(\psi_0 \tan \varphi)} \quad (29)$$

优化求解时, 可将 T , ψ_0 , R_0 作为中间变量, 而将 z_g 作为待优化的几何参数。桩头自由的刚性桩受横向载荷作用时, 其回转中心必在桩身之上, 故 z_g 需满足如下条件:

$$-l \leq z_g \leq 0 \quad (30)$$

在参数满足以上约束条件的情况下, 对式(23)求最小值就得到刚性桩横向承载力的上限解, 可借助 Matlab 软件包解决该非线性优化问题。

3.5 结果分析

先对 $\bar{R} = 3 \text{ cm}$, $l = 0.3 \text{ m}$, $h = 0 \text{ m}$ 的光滑刚性桩的承载力进行分析, 发现当 $\zeta = 1.06\varphi$ 时, 相应的承载力上限解与由 FLAC^{3D} 程序得到的差分解基本一致, 此时 $\alpha = 0.438$, $\beta = 1.2$, $z_g = -0.271 \text{ m}$, $\eta = 4.83$ 。回转中心相对深度为 $-z_g/l = 0.9$, 这比由试验得到的 0.81 及由差分法得到的 0.76 都偏大^[8]。另外, 对 $\bar{R} = 3 \text{ cm}$, $h = 0 \text{ m}$ 的光滑刚性桩, 改变其埋置深度, 对其承载力进行分析, 结果如表 1 所示。由表 1 可知, 光滑桩承载力的上限解与差分解相差不大。

表 1 光滑桩承载力上限解与差分解的比较

Table 1 Comparison between upper bound solution and difference solution of bearing capacities of smooth piles

l/m	承载力/N		误差/%
	差分解	上限解	
0.4	1 249.3	1 292.8	3.5
0.5	1 880.7	2 025.4	7.7
0.6	2 768.0	2 995.2	8.2

注: 误差 = $\frac{\text{上限解} - \text{差分解}}{\text{差分解}} \times 100\%$ 。

在进行极限分析时, 假定刚性桩是光滑的。但是, 真实桩都是粗糙的, 要将光滑桩的结果用于粗糙桩, 需对光滑桩的结果进行修正。笔者曾对半径 $\bar{R} = 3 \text{ cm}$, 加载高度 $h = 0 \text{ m}$, 埋置深度 l 分别为 0.3, 0.4, 0.5 和 0.6 m 的几种刚性桩用有限差分法进行了计算分析, 计算中取 $c = 13 \text{ kPa}$, $\varphi = 23^\circ$, 得到了粗糙桩与光滑桩承载力之间的关系, 如下式所示:

$$P_{ur} = P_{us} + 15.19\mu(\gamma\bar{R}^3)^{0.31} P_{us}^{0.69} \quad (31)$$

式中: P_{ur} , P_{us} 分别为粗糙桩和光滑桩的横向承载力; μ 为桩土界面摩擦因素; γ 为土的容重。

可以利用式(31)将光滑桩承载力的上限解推广到粗糙桩。为了验证该修正方法的有效性, 先利用本文方法求得了几种光滑桩承载力的上限解, 然后通过修正得到了粗糙桩(桩土界面摩擦角 $\delta = 17^\circ$)的上限解, 并与差分解进行比较, 如表 2 所示。由表 2 可见, 改用不同的参数, 得到的粗糙桩承载

表 2 粗糙桩承载力上限解与差分解的比较

Table 2 Comparison between upper-bound solution and difference solution of bearing capacities of rough piles

\bar{R} /cm	l /m	h /m	c /kPa	φ /(°)	粗糙桩差 分解/N	光滑桩上 限解/N	粗糙桩上 限解/N	误差 /%
5	0.4	0.00	13	23	2 085	1 565	2 147	3
3	0.5	0.05	13	23	1 879	1 795	2 439	29
3	0.3	0.00	13	18	956	724	1 053	10

注: 误差 = $\frac{\text{粗糙桩上限解} - \text{粗糙桩差分解}}{\text{粗糙桩差分解}} \times 100\%$ 。

力上限解与差分解之差变化较大。这主要是因为式(31)是由一组特定的桩得到的, 若参数改变较大, 则得到的解与真实解可能偏差较大。所以利用式(31)将光滑桩承载力的上限解应用到粗糙桩仅是试探性的工作, 但它为工程设计提供了一定的依据。

另外, 极限分析假设土的塑性流动是正交的, 即土的剪胀角等于内摩擦角, 而真实土的剪胀角一般小于内摩擦角。但是, 通过有限差分程序计算可知^[8], 剪胀角对刚性桩横向承载力的影响很小, 一般不超过 5%, 所以没必要对此进行修正。

4 结 论

本文旨在寻求一种求解 $c-\varphi$ 土中刚性桩横向承载力的有效快捷的近似方法。根据试验中观察到的土体破坏模式, 建立了求解光滑桩承载力上限解所需的破坏机构, 将破坏土体分为 3 个区: 1 个旋转对数螺旋破坏区, 2 个圆台破坏区。合理假设了每个区满足运动边界条件的速度场, 并对外力功率和每个区的内部能量耗散率进行了计算, 最终建立了求解刚性桩横向承载力上限解的数学模型。

通过计算分析发现, 光滑刚性桩的承载力上限解与差分解相差不大, 结果令人满意。最后通过对光滑桩承载力的上限解进行修正, 得到了粗糙桩承

载力的粗略解。通过与差分解比较发现, 所得结果能对工程设计提供一定的依据, 但修正方法还有待深入研究。

参考文献(References):

- [1] Meyerhof G G, Mathur S K, Valsangkar A J. The bearing capacity of rigid piles and pile groups under inclined loads in layered sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, 18(4): 514 - 519.
- [2] Chari T R, Meyerhof G G. Ultimate capacity of rigid single piles under inclined loads in sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1983, 20(3): 849 - 854.
- [3] Hansen J B. The ultimate resistance of rigid piles against transversal forces[R]. Copenhagen, Denmark; Danish Geotechnical Institute, 1961. 5 - 9.
- [4] Broms B B. Lateral resistance of piles in cohesive soils[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1964, 90(2): 27 - 64.
- [5] Broms B B. Lateral resistance of piles in cohesionless soils[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1964, 90(3): 123 - 158.
- [6] Murff J D, Hamilton J M. P-ultimate for undrained analysis of laterally loaded piles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1993, 119(1): 91 - 107.
- [7] Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. Amsterdam, Netherlands; Elsevier Publishing Co., 1975.
- [8] 崔新壮. 横向载荷作用下桩土相互作用机制及护栏立柱承载力研究[博士学位论文][D]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2004.(Cui Xinzhuang. Study on pile-soil interaction mechanism and bearing capacity of guardrail posts under lateral loads[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2004.(in Chinese))
- [9] Chen Z Y, Wang X G, Haberfield C, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem—part I: theory and methods[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38(3): 369 - 378.