

圆柱绕流三维不稳定性的低维 Galerkin 法分析^{1),2)}

凌国灿 常 勇

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室(LNM), 北京 100080)

摘要 利用低维 Galerkin 方法及 Floquet 稳定性分析理论, 计算分析了圆柱绕流的三维线性不稳定性. 分析中构造了能较好描述尾迹区流动的周向基函数, 建立了完备的合理的基函数组, 改进了计算机算法. 结果证实圆柱二维周流对展向小扰动为不稳定的, 正确地预计了出现三维长波不稳定性的临界雷诺数 $Re_c = 190$, 扰动展向波长为 $\lambda_c = 3.6d$. 对雷诺数 Re 为 180, 190 两种工况下的圆柱三维绕流流场的计算进一步证实了这种流动的整体不稳定性. 本文所预计的临界值比 Noack 等人的结果更为精确, 与 Barkley 等人的 DNS 解一致, 与 Williamson 的实验相符.

关键词 圆柱绕流, 三维线性不稳定性, Galerkin 方法, Floquet 稳定性

引 言

圆柱尾流的三维转捩是湍流发展的一个重要的动力学过程. Williamson^[1] 首先由实验发现当来流雷诺数 ($Re = U_\infty d/\nu$, d 为圆柱直径) 等于和大于 180 和 230 时由于三维不稳定性的发展在近尾迹形成两类具有不同展向波长 ($3d \sim 4d$, 长波; $1d$, 短波) 的流向涡结构, 并对应有 St 数随 Re 数变化曲线上的两次间断. 近年来已有许多实验和理论计算致力于这种三维演化及湍流转捩研究^[2,3]. Barkley 和 Henderson^[4] 及 Henderson^[5] 用高精度直接数值模拟 (DNS) 方法分析了三维线性不稳定性并正确地预计了出现三维不稳定和两种流动模态的临界雷诺数, 即 $Re_{c_1} = 188.5 \pm 1.0$ 及 $Re_{c_2} = 260$, 分别对应于扰动展向波长为 $3.96d$ 和 $0.822d$. 此外还讨论了不稳定性的非线性发展特征. 早些时候 Noack 和 Eckelmann^[6,7] 提出了用低维 Galerkin 方法模拟三维流动的理论方法. 研究了不同的基函数, Hilbert 空间, 展开模等对低维问题模拟成败的影响, 探索了低维 Galerkin 法对圆球绕流、边界层等几种不同流动的模拟. 计算了圆柱尾迹三维不稳定性的临界雷诺数为 $Re_c = 170$, 对应的扰动波长为 $\lambda_c = 1.8d$. 研究表明低维 Galerkin 法可用较少的空间模拟流动并可对时间演化的动力学系统作整体稳定性分析, 它比 DNS 方法能节省许多计算资源, 减少工作量而独具特色, 是一个重要的理论途径, 但据作者所知用这种方法研究圆柱绕流三维稳定性的工作还很少, 已有的工作, 如上所说, 所预测的临界雷诺数和扰动波长均不正确, 工作还很初步. 分析中所用的部分基函数还不完善有待改进. 因此本文将参考 Noack 等人提出的低维 Galerkin 方法, 建立完备的能较好刻画尾迹流动特征的周向基函

1999-03-01 收到第一稿, 1999-05-11 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19972062), 国家科学技术部 (九五) 攀登 A 预选项目“流体及空气动力学关键基础问题研究”及中国科学院 (九五) 基础性研究重点项目“尾迹流动转捩及动力学过程”资助项目.

2) 谨以本文纪念林同骥院士诞辰 80 周年.

数, 改进 Galerkin 基函数组并利用 Floquet 理论进行二维周期流的三维不稳定性分析, 计算三维不稳定发展的临界 Re_c . 对于大量繁复的运算, 本文运用计算机推演, 建立公式数值化和数据压缩方法提高运算和计算效率. 本文主要讨论圆柱二维周期流对长波扰动的线性不稳定性, 因为随 Re 数增加长波不稳定性是首先出现的, 它是三维转捩的开始而短波不稳定是在其后.

2 理论方法

2.1 方程与边界条件

设流动物理量以圆柱半径及来流速度无量纲化. 参照 Zebib^[8], 将流动速度场分解为两个标量场 Ψ 和 Φ 的组合

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\Psi \mathbf{e}_z) + \nabla \times (\nabla \times \Phi \mathbf{e}_z) \quad (1)$$

其中 $\Psi = \Psi(r, \theta, z, t)$, $\Phi = \Phi(r, \theta, z, t)$, r, θ, z 为柱坐标系, z 轴沿圆柱展向, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 分别为相应坐标方向上的单位向量. 易见这时已满足质量守恒方程

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

对 $N-S$ 方程 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{2}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p$ 两边取旋度以消去 p/ρ 项可得到以涡量 ω 表示的动量方程, 然后对该方程分别点乘 \mathbf{e}_z 及 $\mathbf{e}_z \cdot [\nabla \times]$ 可得关于 Ψ 及 Φ 的方程组

$$\partial_t \nabla_1^2 \Psi = \frac{2}{Re} \nabla^2 \nabla_1^2 \Psi - \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) \quad (2a)$$

$$\partial_t \nabla^2 \nabla_1^2 \Phi = \frac{2}{Re} \nabla^4 \nabla_1^2 \Phi + \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega)) \quad (2b)$$

其中 $\nabla^2 = \nabla_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 而 $\nabla_1^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 为柱坐标中的算子.

流动在柱面满足无滑移条件, 在无穷远趋于势流解. 因此, 由式 (1) 及位势流解可得

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0, \quad r = 1 \quad (3a)$$

$$\Psi \rightarrow r \sin \theta, \quad \Phi \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3b)$$

为便于应用标准的 Galerkin 方法获得有齐次的边界条件, 令

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Psi_0(r, \theta, z) + \psi(r, \theta, z, t) \\ \Phi &= \varphi(r, \theta, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ψ_0 为基本模态, 满足边界条件 (3), 参照文 [6] 可令

$$\Psi_0 = \left(r - \frac{1}{r} \right) [1 - \exp(-(r-1)/\delta_{bm})] \sin \theta \quad (5)$$

其中 $\delta_{bm} = 4/\sqrt{Re}$. 上述基本模态在圆柱附近有类似边界层特征而无穷远处趋于势流解. 将式 (4) 代入 (2), (3) 可得扰动模的方程及其对应的齐次边界条件, 后者为

$$\left. \begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \quad r = 1 \\ \psi = 0, \quad \varphi = 0 \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2.2 扰动模的 Galerkin 分解与基函数

由上述得到的满足齐次边界条件的扰动模 ψ, φ 可构造标准的 Galerkin 算法. 首先要构造一个 ψ, φ 所在的 Hilbert 空间, 在此空间内选择一组标准正交基

$$\begin{aligned} \psi_{ijk} &= R_i^{(1)}(r) \Theta_j(\theta) Z_k(z) \\ \varphi_{ijk} &= R_i^{(2)}(r) \Theta_j(\theta) Z_k(z) \end{aligned}$$

其中, $i = 0, \dots, I_{\max}, j = -J_{\max}, \dots, J_{\max}, k = -K_{\max}, \dots, K_{\max}$. 而后可将 ψ, φ 按这组正交基展开, 即

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, \theta, z, t) &= a_{ijk}^{(1)}(t) R_i^{(1)}(r) \Theta_j(\theta) Z_k(z) \\ \varphi(r, \theta, z, t) &= a_{ijk}^{(2)}(t) R_i^{(2)}(r) \Theta_j(\theta) Z_k(z) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上述 $R_i^{(k)}(r), \Theta_j(\theta)$ 及 $Z_k(z)$ 分别为径向基, 周向基及展向基. 下标为约定求和. 利用基本方程及边界条件可得求解展开式系数 a_{ijk} 所应满足的常微分方程组, 从而得以求解.

由于 ψ 和 φ 并不是我们熟知的平方可积空间 L_2 的元素, 因此需构造一个 Hilbert 空间使在此空间内 ψ 和 φ 的范数有界. 参照文 [6], 定义内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{\Omega} r^{-\alpha} f \cdot g dV = \frac{2\pi}{L} \int_1^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz r^{1-\alpha} f \cdot g \quad (8)$$

得到一个带权 $r^{-\alpha}$ 的 H 空间, 在 $\alpha \geq 3/2$ 时可使尾迹区中的 ψ 和 φ 满足范数有界, 本文计算时取 $\alpha = \frac{3}{2}$. 标准正交基应在此 H 空间中选取.

2.2.1 径向基 $R_i^{(1)}(r), R_i^{(2)}(r)$

根据所要满足的齐次边界条件及标准正交化条件, $\int_1^{\infty} r^{1-\alpha} R_i^{(k)}(r) R_j^{(k)}(r) dr = \delta_{ij}, k = 1, 2; i, j = 0, \dots, I_{\max}$. 因 Laguerre 多项式 $L_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有带权 e^{-x} 正交特性而 $L_n(x)e^{-x/2}$ 为一完备正交基, 因此我们选择文 [6] 给出的下述基函数

$$R_i^{(k)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\delta^{(k)}}} r^{(\alpha-1)/2} \left(\frac{r-1}{\delta^{(k)}} \right)^{k+1} P_i^{(k)} \left(\frac{r-1}{\delta^{(k)}} \right) \exp \left[-\frac{r-1}{2\delta^{(k)}} / d \right] \quad (9)$$

其中, $P_i^{(k)}$ 为一个 i 阶类似 Laguerre 多项式, $k = 1, 2$. 由于 $e^{-(r-1)/(2\delta^{(k)})}$ 的衰减很快, 本文为了能适当刻画出稍下游流场, 在特征式中除以 $d \geq 1$. 多项式 $P_i^{(k)}$ 的系数可根据正交化条件由 Gram-Schmidt 正交归一化得到. 参数 $\delta^{(k)} = \tanh(a^{(k)}/\sqrt{Re})$, 它的引入可使径向基在大 Re 数时能较好地刻画出具有边界层特征而当 $Re \rightarrow 0$ 时满足蠕流解. $a^{(k)} = (2.45, 2.95)$, 当 $k = (1, 2)$, 容易证明式 (9) 满足齐次边界条件.

2.2.2 周向基 $\Theta_j(\theta)$

由于圆柱绕流后驻点 ($\theta = 0$) 附近及尾迹的流动远比上游复杂得多. 为使周向基能很好分辨下游流动, 引入变换

$$\theta = \theta(y) = y \cdot [1 - a \cdot e^{-c/[1-(y/\pi)^2]}] \quad (10)$$

适当选取参数 a, c 值, 可使 $\theta = \theta(y)$ 的变换为单调函数而且存在逆变换 $y = y(\theta)$. 正反变换将区间 $[-\pi, \pi] \mapsto [-\pi, \pi]$. 该变换使 $\theta-y$ 的变换沿周向有不同的比例尺度, 如实际的 θ 区间在 $[-40^\circ, 40^\circ]$ 及 $[120^\circ, 180^\circ]$ 时经变换后 y 的区间将在 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 及 $[150^\circ, 180^\circ]$, 即可使 $\theta = 0$ 附近放大而在前驻点 $\theta = \pm 180^\circ$ 附近压缩. 周向基定义为

$$\Theta_j(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin[j \cdot y(\theta)], & j > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & j = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos[j \cdot y(\theta)], & j < 0 \end{cases} \quad (11)$$

用上述变换后的周向基对 $\theta = 0$ 附近尾迹区的复杂流动提供了较好的分辨率.

基函数 (11) 是完备的标准正交函数. 因为对任意一个在 $[-\pi, \pi]$ 上的周期函数 $\tau(\theta)$ 都可有

$$\tau(\theta) = \tau[\theta(y)] = \tau(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny) + \frac{a_0}{2} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} t_j \Theta_j(y)$$

这里 $\Theta_j(y)$ 即为式 (11). 展开系数

$$t_j = \int_{-\pi}^{\pi} \tau[\theta(y)] \Theta_j(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} y'(\theta) \tau(\theta) \Theta_j d\theta$$

而正交关系为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Theta_i(y) \Theta_j(y) dy = \delta_{ij}$$

即有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy}{d\theta} \cdot \Theta_i(\theta) \Theta_j(\theta) d\theta = \delta_{ij}$$

由于引入变换 (10), 我们所定义的 Hilbert 空间的内积应定义为

$$\langle f, g \rangle = \frac{2\pi}{L} \int_1^{\infty} r^{-\alpha} dr \int_{-\pi}^{\pi} y'(\theta) d\theta \int_0^L dz \cdot f \cdot g \quad (12)$$

值得指出的是, 对任一周期 2π 的函数 $\tau(\theta)$, 有

$$\frac{d\tau(\theta)}{d\theta} = \frac{d\tau(y)}{dy} \bigg/ \frac{d\theta}{dy}$$

由于在 $\theta = \pm\pi$ 处, 即 $y = \pm\pi$ 时 $\frac{d\theta}{dy} = 1$, 从而保证了 $\frac{d\tau(y)}{dy}$ 和 $\frac{d\tau(\theta)}{d\theta}$ 一样的周期性. 对高阶导数也是如此.

2.2.3 展向基 $Z_k(z)$

展向基表征流场的三维扰动影响. 为分析流动整体稳定性及近尾迹特征, 参考文 [6], 展向基取为

$$Z_k(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{2\pi kz}{L}, & k > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{2\pi kz}{L}, & k < 0 \end{cases} \quad (13)$$

L 为展向波长. 对于整体不稳定性分析在计算时我们可简化, 取 k 为 $-1, 0, 1$ 即可. 图 1 是 $Re = 100$ 时相应的基函数组的等值线示意图. 从中可看出我们所建立的基函数在流动下游更密些, 可较好地刻画尾迹流动特征.

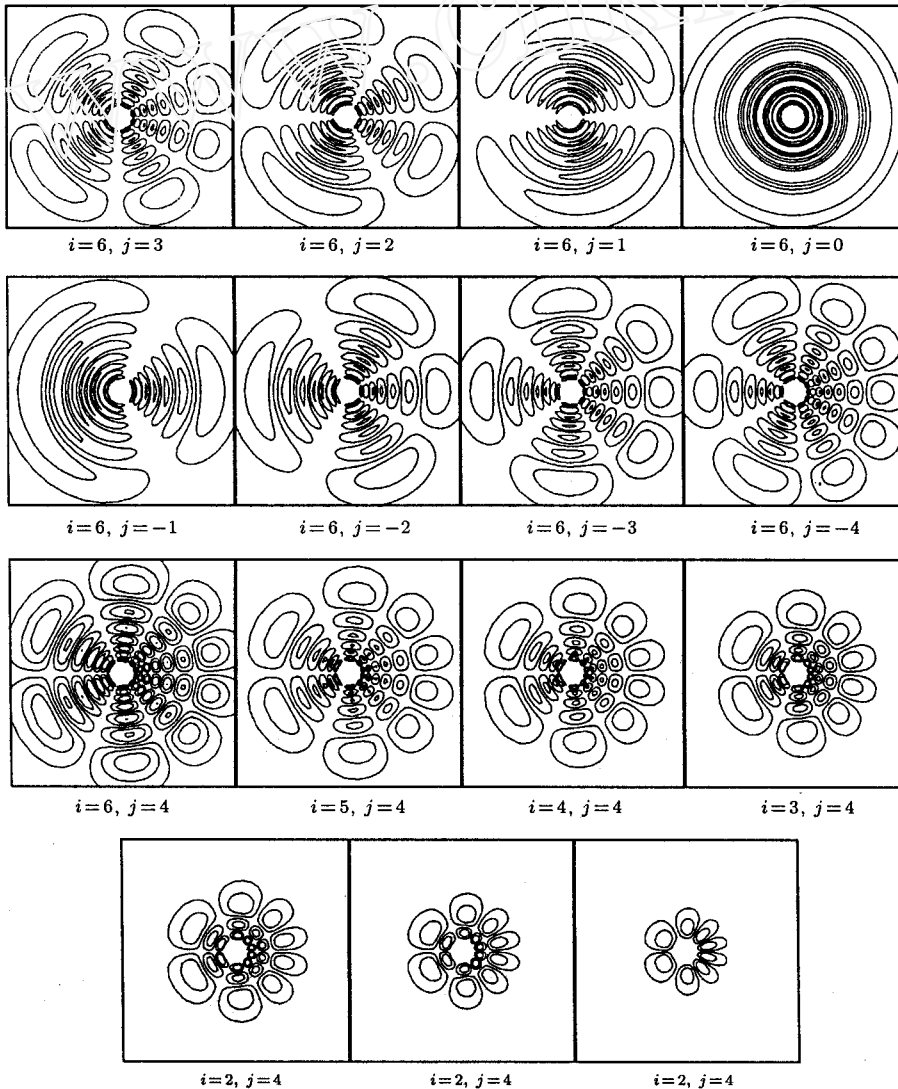


图 1 $r-\theta$ 平面上基组 $R_i^{(1)}(r)\Theta_j(\theta)$ 的等值线图 ($Re = 100$)
 Fig.1 Streamlines of expansion modes $R_i^{(1)}(r)\Theta_j(\theta)$ in $r-\theta$ plane ($Re = 100$)

2.3 Galerkin 投影

将扰动量 ψ, φ 按上述所选的正交基组展开, 利用基本方程 (2), 按标准的 Galerkin 方法作如下投影

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \partial_t \nabla_1^2 \Psi - \frac{2}{Re} \nabla^2 \nabla_1^2 \Psi + e_z \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}), \psi_{lnm} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \partial_t \nabla^2 \nabla_1^2 \phi - \frac{2}{Re} \nabla^4 \nabla_1^2 \phi + e_z \cdot \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})), \phi_{lnm} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

最后可得到一组关于式 (7) 中系数 $a_{ijk}^{(k)}$ ($k=1, 2$) 的常微分方程组, 其形式为

$$\frac{d}{dt} a_{\beta} = c_{\beta} + l_{\beta\alpha} a_{\alpha} + \theta_{\beta\alpha\nu} a_{\alpha} a_{\nu} \quad (15)$$

由此可进行流场计算和稳定性分析. 方程 (15) 的具体形式及推演过程十分繁复. 本文利用计算机推演且将公式中各项、矩阵元素等都进行数据化处理, 公式中的任一项可由几个或几十个数据结构来表达. 最后, 基本方程 (2) 中的算子、速度和涡量、微分运算等在二维情况可有 48 项, 在三维有 376 项之多. 在计算各矩阵元素时发现有些三维数组, 因所占内存极大, 我们无法记录其每个元素. 例如数组 $P_{33\beta\alpha_1\alpha_2}$, $\beta \geq 1, \alpha_1, \alpha_2 \leq N$ 而 $N = (1 + I_{\max})(1 + 2J_{\max})(1 + 2K_{\max})$ 若令 $I_{\max} = 6, J_{\max} = 4, K_{\max} = 1$ 时 $N = 189$, 从而 P_{33} 共有 N^3 , 即 6.75×10^6 个元素. 占用内存 $4N^3$ 个字节 (27 兆字节), 这样的数组有数个也难以运算. 但计算发现这几个矩阵中有 90% 以上的元素为零值, 据此, 设计了算法, 只记录非零值元素值, 较好地实现了数据压缩, 节省了内存, 提高了计算效率. 这些计算方法的改进, 也是实现 Galerkin 方法的一个关键. 为节省本文篇幅, 系数 a_{ijk} 的具体表达形式在此从略.

3 三维线性稳定性分析和流场计算

运用上述理论方法本文先进行了低 Re 数流动计算以考核方法和程序. 证实了当 Re 为 5~6 时圆柱绕流存在运动学分岔, 在柱后出现一对对称的旋涡. 在 $Re = 45$ 时出现动力学 Hopf 分岔, 形成旋涡周期脱落, 其 $St = 0.15$. 这些结果均与前人的实验观测和理论分析一致. 在已建立的二维周期流基础上作三维稳定性分析. 设二维周期流的形式解为 $\mathbf{a}_p(t)$, 则三维小扰动下的解为

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_p(t) + \mathbf{a}'(t) \quad (16)$$

$\mathbf{a}'(t)$ 为小扰动影响项. 注意到二维周期流也是满足基本方程, 将上式代入方程 (13) 并略去小扰动高阶项影响可得线性化扰动方程

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}'_i(t) = [l_{ij} + q_{ijk} a_{pk} + q_{ikj} a_{pk}] \mathbf{a}'_i \quad (17)$$

其中 $l_{ij} + q_{ijk} a_{pk} + q_{ikj} a_{pk}$ 在二维周期流已知时是一个已知的随时间变化且周期为 T (二维解周期) 的 N 阶矩阵. 与 Floquet 系统

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = p(t)\mathbf{a}(t) \quad (18)$$

相比, 式 (17) 即定义了一个 Floquet 系统. 求解方程 (17) 得基本解矩阵 (定义为 Floquet 矩阵), 通过求解该矩阵的 N 个特征值 μ_k ($k = 1, \dots, N$), 即 Floquet 乘子可进行稳定性分析. 当

$|\mu_k| < 1$, 则称为 Floquet 稳定, $|\mu_k| = 1$ 为 Poincare 稳定, 若有 $|\mu_k| > 1$ 则为不稳定. 为节省计算机资源, 本文只对几个 Re 数情况的流动进行计算分析并对 ψ 展开时取 k 为 $-1, 0$. 对 φ 展开时展向基取 $k = 1$. 这样 $N = N' = 139$. 展向波数 $k_j = 1.75$, 展向扰动波长 $L = 2\pi/k_j = 3.6$. 计算表明当 $Re = 190$ 时有 189 个特征值, 得到的最大模为 $\mu_1 = (1.07, 0)$, 即 $|\mu_1| > 1$, 见图 2. 因此, 此时二维周期流对此长波扰动是不稳定的, 在三维小扰动下将会放大失稳成为三维流动, 而临界雷诺数为 $Re_c = 190$. 该结果与 Williamson^[1] 的实验发现, 不稳定的第一个临界雷诺数为 $Re_c \geq 180$, 展向波长为 $3d \sim 4d$ 是相符的. 它比 Noack^[6] 等人用同类方法获得的临界值 $Re_c = 170$, 扰动展向波长 $1.80d$ 更准确, 与 Barkley 和 Henderson^[4] 用 DNS 的计算结果, 长波不稳定性的临界值 $Re_{c_1} = 188.5 \pm 1.0$ 一致, 扰动波长接近.

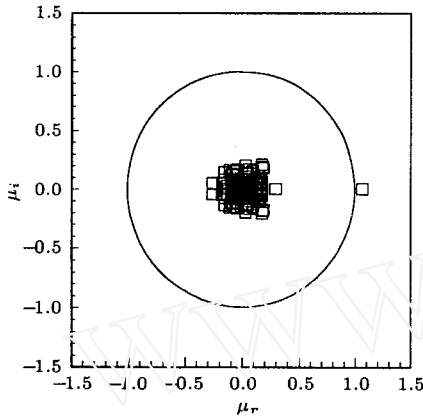


图 2 $Re = 190$ 时的 Floquet 乘子

$\mu = \mu_r + i\mu_i$ 的分布

Fig.2 Floquet multiplier

($\mu = \mu_r + i\mu_i$) distribution for $Re = 190$

本文进一步对 Re 为 180, 190 时两种工况下的三维圆柱绕流进行流场计算. 求出, $\psi(r, \theta, z, t)$ 及 $\varphi(r, \theta, z, t)$ 可以得到三维流场物理量随时间变化特征. 图 3(a), 3(b) 是速度分量随时间变化结果. 在 $Re = 180$ 时展向速度随时间衰减为零, 而在 $Re = 190$ 时在所计算的时间范围内展向速度随时间迅速增大, 显示其三维不稳定性. 图 4 给出展向速度沿展向的周期变化, 表明流场具有三维特征.

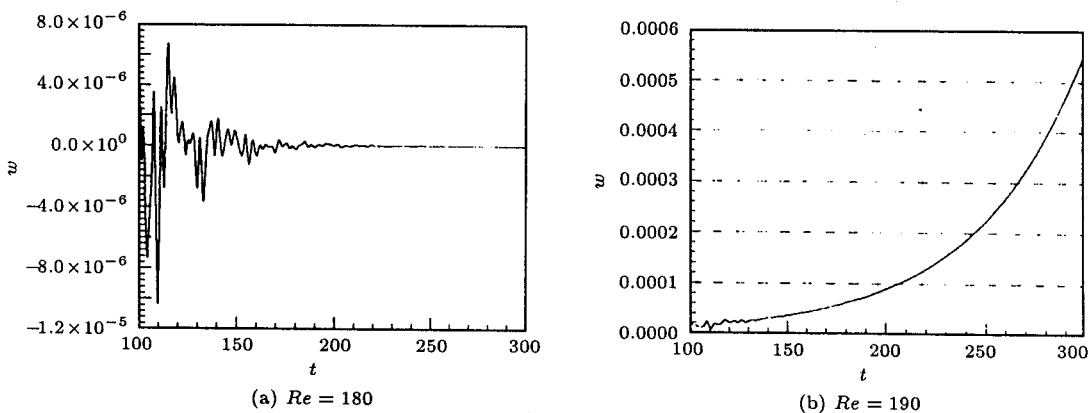


图 3 点 $(4, 2, L/4)$ 处展向速度 w 随时间的变化 (展向波长 $L = 3.6$)

Fig.3 Variations of spanwise velocity w with time at point $(4, 2, L/4)$, nondimensional spanwise wavelength $L = 3.6$

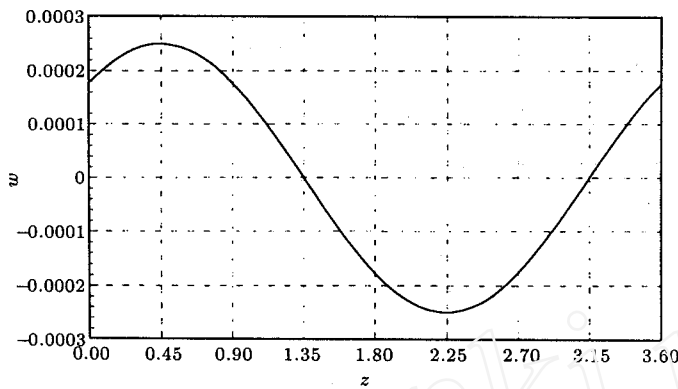


图 4 在某一时刻 ($t > 200$) 展向速度 w 沿展向的分布 ($Re = 190$, 展向波长 $L = 3.6$)

Fig.4 The instantaneous spanwise velocity distribution for $Re = 190$, $L = 3.6$

4 结 论

本文用低维 Galerkin 方法及 Floquet 稳定性分析方法, 通过引入能很好刻画尾迹流动的完备的基函数并改进计算机算法分析了圆柱绕流的三维线性不稳定性, 准确地预计了三维长波失稳的临界雷诺数 $Re_c = 190$. 三维流场的实际计算进一步证实了当 $Re \rightarrow Re_c$ 时流动的三维性. 本文结果表明用低维 Galerkin 法可用较少的空间基来逼近真实流动, 具有展开项少, 易于进行流动状态整体特性分析等优点. 本文结果对 Noack 等人的工作结果有新的发展和改进并与 Barkley 和 Henderson 的 DNS 分析一致, 与 Williamson 的实验观测也相符.

致谢 本文部分计算是在中国科学计算机网络中心 NCFE 超级计算机上完成的, 作者仅表感谢.

参 考 文 献

- 1 Williamson CHK. The existence of two stages in the transition to three-dimensionality of a cylinder wake. *Phys Fluids*, 1988b, 31: 3165
- 2 Williamson CHK. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1996, 28:
- 3 Ling Guocan, Yu Chenwei, Xiong Zhongmin. The nonlinear features of the wake transition behind a circular cylinder. In: Proc of the Third China-Japan Workshop on Turbulence, Beijing, China
- 4 Barkley D. Henderson R D. Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J Fluid Mech*, 1996, 322: 215~241
- 5 Henderson R D. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. *J Fluid Mechanics*, 1997, 352: 65~112
- 6 Noack BR, Eckelmann H. A low-dimensional Galerkin method for the three-dimensional flow around a circular cylinder. *Phys Fluids*, 1994, 6(1): 124~143
- 7 Noack BR, Eckelmann H. A global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *J Fluid Mech*, 1994, 270: 297~330
- 8 Zebib A. Stability of viscous flow past a circular cylinder. *J Eng Math*, 1987, 21, 155

THREE-DIMENSIONAL STABILITY ANALYSIS OF THE
PERIODIC WAKE BEHIND A CIRCULAR CYLINDER
BY LOW-DIMENSIONAL GALERKIN METHOD ^{1),2)}

Ling Guochan Chang Yong

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract Three-dimensional linear instability of flow past a circular cylinder is analyzed by means of a low-dimensional Galerkin method and Floquet instability theory. Some improvements on the construction of the azimuthal modes and calculation algorithm in the present analysis are made. The present results show that the ideal two-dimensional periodic flow around the cylinder is unstable with respect to a small spanwise disturbance. It has long-wavelength instability and the critical Reynolds number predicted is $Re_c = 190$ with spanwise wave-length $\lambda_c = 3.6d$. These predictions are more accurate than the results given by Noack et al., and are in excellent agreement with the results of DNS of Barkley et al. and with the experiment of Williamson. Some computation results for three-dimensional flow field behind the cylinder at $Re = 180$ and 190 demonstrate further the global instability.

Key words three-dimensional stability, cylinder wake, Galerkin method, Floquet stability

Received 3 January 1999, revised 11 May 1999.

1) The project supported by the National Climbing A of Nature Science Foundation of China (19772062), the National Climbing A Pre-selected Projects, and Key-project of Basic Research of Chinese Academy of Sciences.

2) In memory of academician Lin Tongji's 80 anniversary.