

基于局域分析的疲劳短裂纹群体 演化随机模型¹⁾

乔 宇 洪友士

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室(LNM),北京 100080)

摘要 采用局域裂纹数密度描述金属材料中不同局部区域的疲劳短裂纹群体损伤的发展情况. 通过考虑在不同局域存在的材料性质的随机涨落及局部损伤对损伤总量发展的影响,建立了局域裂纹数密度演化随机方程. 对方程数值求解从而模拟了材料的疲劳短裂纹损伤过程. 结果显示主裂纹出现的随机性,并讨论了裂纹总数与最大裂纹尺度在统计意义上的演化特征.

关键词 疲劳短裂纹,局域裂纹数密度,群体损伤,随机演化

引 言

金属材料在疲劳损伤的初期处于短裂纹阶段. 疲劳短裂纹的尺度与材料细观组织单元尺度相近^[1]. 在短裂纹阶段,材料的损伤行为不是由个别裂纹控制,而是大量短裂纹群体共同作用的结果^[1,2]. 短裂纹损伤阶段通常占材料疲劳寿命的主要部分,所以对其研究无论在理论还是工程上都具有重要的意义.

在实际中人们注意到,即使在给定的载荷条件下,由相同制备规范得到的材料试样的疲劳损伤细观进程也会有很大的不同,这是研究材料疲劳损伤的一个主要困难. 利用文献[3]提出的平均场理论的相空间内裂纹数密度守恒的理论来描述材料的疲劳损伤过程,可以研究群体短裂纹的演化规律. 由此,裂纹数密度演化方程的无量纲化形式^[4]为

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n}(c, t) + \frac{\partial}{\partial c} [\bar{A}(c) \cdot \bar{n}(c, t)] = N_g \cdot \bar{n}_N(c) \quad (1)$$

式中, c 表示裂纹长度; t 表示广义时间即对应于疲劳周次; \bar{A} 是裂纹生长速率; \bar{n} 是裂纹数密度,在时刻 t , 尺度为 c 与 $c + dc$ 之间的裂纹数量为 $\bar{n}dc$; \bar{n}_N 是裂纹成核率,广义而言, \bar{n}_N 可以表示单位时间内裂纹成核以及裂纹之间相互作用引起的裂纹数密度变化. 另外,无量纲化系数 $N_g = (N_N^* \cdot d) / (n^* \cdot A^*)$, 其中, n_N^* 为特征裂纹成核率, A^* 为特征裂纹生长速率, n^* 为特征裂纹数密度, d 为材料特征尺度. 式(1)体现了平均场理论下裂纹数密度在相空间内的守恒,即认为疲劳损伤在全场均衡地发展.

式(1)中的 \bar{A} 和 \bar{n}_N 均指全场平均量,若设定 \bar{A} 和 \bar{n}_N , 然后由式(1)得到裂纹数密度演化的结果亦代表平均上的意义. 而事实上,疲劳损伤并非在材料中各处均匀发展. 实验中观察到,在材料的某些区域出现较密集的疲劳短裂纹的同时,另一些局部区域却可能几乎没有损伤^[5~8].

¹⁾国家杰出青年科学基金,国家自然科学基金和中科院资助项目.

1997-03-17 收到第一稿,1998-05-18 收到修改稿.

各局域的裂纹数量和最大裂纹尺度一般也不具有相同的发展趋势: 在一些情况下, 材料试件中裂纹较稀疏区域或早期未出现大于材料特征尺度(如晶粒直径) 裂纹的区域最终却成为主裂纹的形成地^[9]. 为此, 应引入随机分析的概念.

为了研究一个 m 维随机系统的统计特性, 一般需要知道系统的 m 维概率密度或 m 维分布函数; 为此需要重复进行大量的实验以得到足够多的样本函数, 这在实际中往往是困难的. 但对于各态历经的系统, 若已知一个样本函数, 通过随机分析就可以推知系统的数字特征. 本文考虑, 所讨论的金属短裂纹疲劳损伤演化就是这样一个过程. 通过建立并求解微裂纹演化系统的随机偏微分方程, 从而模拟计及损伤局部化的疲劳短裂纹数密度演化, 同时对疲劳损伤总量的演化特征作初步探讨.

1 随机模型及随机控制方程

定义局域裂纹数密度 $n(c, t, x)$ 来描述材料局部区域的疲劳损伤, 它表示材料表面 x 点处一小局域的裂纹数密度. 这一小局域相对于材料宏观尺度足够小以至可以作为几何点来近似对待, 同时又应包含足够数量的短裂纹, 以适应局域裂纹数密度演化方程的分析方法. 在每个小局域内均应满足相应的裂纹数密度演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t} n(c, t, x) + \frac{\partial}{\partial c} [A(c, t, x) \cdot n(c, t, x)] = N_g \cdot n_N(c, t, x) \quad (2)$$

式中, $A(c, t, x)$ 和 $n_N(c, t, x)$ 分别表示 x 局域的裂纹扩展速率和裂纹成核率.

裂纹成核率和裂纹扩展速率与当地材料性质密切相关. 裂纹成核主要受材料中夹杂物、第二相、晶粒取向等因素的控制; 而裂纹扩展的控制因素更加复杂, 除上述因素外, 还包括材料的晶界能、相邻晶粒取向的配合程度等等, 且影响机理也不尽相同. 由于这些条件事实上不可能事先逐点测定, 所以可以将不同局域的裂纹扩展速率和裂纹成核率视为 x 的随机函数. 考虑到裂纹成核率和裂纹扩展速率均受本区域内部和邻近局域损伤情况的影响, 根据裂纹数密度演化的稳定性分析^[10], 局域疲劳损伤对短裂纹群体行为的影响主要取决于局域裂纹总数 $D_0(t, x)$. 这样, 局域裂纹扩展速率和局域裂纹成核率可写为

$$A(c, t, x) = A \left\{ c, x, D_0(t, x), \frac{\partial D_0(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 D_0(t, x)}{\partial x^2}, \dots \right\} \quad \text{内的} \quad (3)$$

$$n_N(c, t, x) = n_N \left\{ c, x, D_0(t, x), \frac{\partial D_0(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 D_0(t, x)}{\partial x^2}, \dots \right\} \quad (4)$$

以上二式中的偏微分取均方微分的意义. 式(2)~(4)构成了裂纹数密度随机演化方程组. 式(3), (4)中 $D_0(t, x)$ 表示 x 局域中的损伤程度对裂纹行为的影响, 其各阶均方导数项则包含了其领域损伤程度影响的信息. 如果只考虑最近邻影响, 则式(3), (4)成为

$$A(c, t, x) = A \left\{ c, x, D_0(t, x), \frac{\partial D_0(t, x)}{\partial x} \right\} \quad (5)$$

$$n_N(c, t, x) = n_N \left\{ c, x, D_0(t, x), \frac{\partial D_0(t, x)}{\partial x} \right\} \quad (6)$$

上二式中忽略了表示远场信息的 $D_0(t, x)$ 的高阶均方微分项.

对金属材料疲劳短裂纹演化过程的实验观察显示出: 损伤在材料内部并非均匀分布, 在短裂纹演化过程中往往会形成一些损伤集中区域^[9]. 在损伤集中区域外, 裂纹分布相对稀疏(如图 1

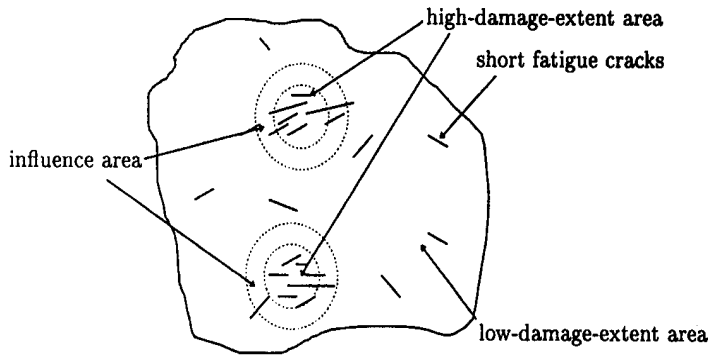


图 1 疲劳短裂纹损伤分布示意图

Fig. 1 Schematic of damage distribution for short fatigue cracks

示意). 这一特征随疲劳进程的发展越来越明显. 在损伤集中区域内部, 裂纹之间相互作用对裂纹的成核与生长有较强的影响, 而损伤集中区域之间和裂纹稀疏区域中的裂纹之间的作用则相对较弱. 对于这种情况, 可以认为短裂纹仅受本局域内损伤程度的影响, 而与本局域外的材料损伤程度无关, 即裂纹扩展与成核和 $D_0(t, x)$ 的各阶均方微分均无关. 考虑到裂纹扩展速率和裂纹成核率中的材料损伤因素的影响 (由裂纹总数描述) 与裂纹尺度因素的影响可以写为分离变量的形式^[10], 并认为裂纹总数的作用 可以用指数函数表征, 且不受各局域材料性质随机行为的影响, 则 x 局域内裂纹扩展速率和裂纹成核率具有如下形式

$$A(c, t, x) = [A_0(c) + L(c) W_1(x)] \cdot [\cdot D_0(t, x)] \tag{7}$$

$$n_N(c, t, x) = [n_{N0}(c) + L^*(c) W_2(x)] \cdot [p \cdot D_0^q(t, x)] \tag{8}$$

式中, $A_0(c)$ 与 $n_{N0}(c)$ 分别表示裂纹扩展速率和裂纹成核率的均值部分; $W_1(x)$ 与 $W_2(x)$ 为白噪声, 表示两个相互独立的随机过程; $L(c)$ 和 $L^*(c)$ 为控制随机过程分布的函数; \cdot, p, q 为材料常数. 基于分离变量处理, 以上两式中等号右边第一个因式分别反映裂纹扩展速率和裂纹成核率随裂纹尺度的连续变化及其在空间位置的随机分布, 此因式与时间无关; 第二个因式则分别反映裂纹扩展速率和裂纹成核率受局域损伤程度的影响, 此因式是时间和位置的函数而与裂纹尺度无关. 对式(8)积分, 可得

$$\int_0^t \int_0^c n_N(c, \cdot, x) dc = D_0(t, x) = \int_0^t D_0^q(\cdot, x) d \int_0^c p [n_{N0}(c) + L^*(c) W_2(x)] dc \tag{9}$$

将上式对时间求导, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} D_0(t, x) = [a + bW_2(x)] D_0^q(\cdot, x) \tag{10}$$

其中, $a = \int_0^c p \cdot n_{N0}(c) dc$, $b = \int_0^c p \cdot L^*(c) dc$. 解此偏微分方程, 可得

$$D_0(t, x) = \{ t(1 - q) [a + bW_2(x)] \}^{\frac{1}{1-q}} \tag{11}$$

将上式代入式(7)和(8), 并将所得结果代入式(2), 就可推导出本问题的随机控制方程

$$\frac{\partial}{\partial t} n(c, t, x) + \beta_1 \{ t [a + bW_2(x)] \}^{1-q} \cdot \frac{\partial}{\partial c} \{ n(c, t, x) [A_0(c) + L(c) \cdot W_1(x)] \} = N_g \cdot p_1 [n_{N0}(c) + L^*(c) \cdot W_2(x)] \{ t [a + bW_2(x)] \}^{1-q} \tag{12}$$

式中, $\beta_1 = (1 - q)^{-1}$, $p_1 = p(1 - q)^{-1}$.

2 数值结果与讨论

式(12)描述了局域裂纹数密度在当地疲劳损伤影响下,由于材料性质的随机分布特性而随空间位置随机演化的过程. 为了进一步研究疲劳短裂纹群体损伤的随机特征,需要对式(12)进行数值求解. 考虑到裂纹行为受局域裂纹数量影响的特性,计算中取 $\beta_1 = -q = 0.5$, $\beta_2 = p = 1.0$. 并设定 $A_0(c)$ 与 $n_{N0}(c)$ 具有如下形式

$$A_0(c) = \begin{cases} 1 - (1 - A_d) \frac{c}{\bar{d}} & (c \leq \bar{d}) \\ \frac{c}{\bar{d} \cdot c} & (c > \bar{d}) \end{cases} \tag{14}$$

式中 $0 < A_d < 1$, 是裂纹达到晶界时的扩展速率, \bar{d} 是反映晶粒平均尺度的常数. 同时,设定 $L(c)$ 与 $L^*(c)$ 的形式分别与式(13), (14)相同. 将以上设定代入式(12), 并采用两个独立的子程序来生成 $W_1(x)$ 和 $W_2(x)$. 初始条件取为 $n(c, 0, x) = 0$, 每一次求解所得结果代表一次样本实验. 为使讨论方便,记

$$\tilde{D}_0(t) = \int_x D_0(t, x) \tag{15}$$

和

$$\tilde{c}_{max}(t) = \max [c_{max}(t, x)] \tag{16}$$

其中, $\tilde{D}_0(t)$ 为 t 时刻全场的裂纹总数, $\tilde{c}_{max}(t)$ 为 t 时刻全场的最大裂纹尺度. 通过研究不同样本实验的 $\tilde{D}_0(t)$ 和 $\tilde{c}_{max}(t)$, 可以讨论材料整体疲劳损伤总量的统计演化特征.

图 2 是一次样本实验结果,图中显示不同时刻各局域最大裂纹尺度 $c_{max}(x)$ 的演化情况. 从图中看到,随着疲劳进程的发展,各局域 $c_{max}(x)$ 的演化具有显著的随机性. 图中的 A, B, C, D 四个局域代表四种典型的演化过程: A 局域 c_{max} 始终很小; B 局域 c_{max} 在疲劳的初始阶段发展缓慢,但随疲劳时间的增加而加速上升,最后发展为全场的主裂纹; C 局域 c_{max} 始终为全场的最大裂纹之一; D 局域 c_{max} 初期发展较快,但其随疲劳进程减速上升,最终未能成为全场的较大裂纹.

图 3 是与图 2 同一次样本实验得到的另一结果,图中显示各局域 $D_0(x)$ 的演化情况. 图 3 与图 2 对比观察到: A, B 局域的裂纹数量始终较少,而 C, D 局域的裂纹数量相对较多. 联系到式(7)和式(8),可以看出,局域裂纹数量明显影响裂纹扩展速率和裂纹成核率,从而影响疲劳进程中 c_{max} 的演化. A, B 局域裂纹成核不利,裂纹生长在疲劳进程的初期相对困难;而 C, D 局域对应着裂纹成核有利的情况,使得在疲劳演化刚开始时本局域内裂纹就相对易于扩展. 注意到影响裂纹生长的因素和影响裂纹萌生的因素是相互独立的,萌生有利的局域不一定有利

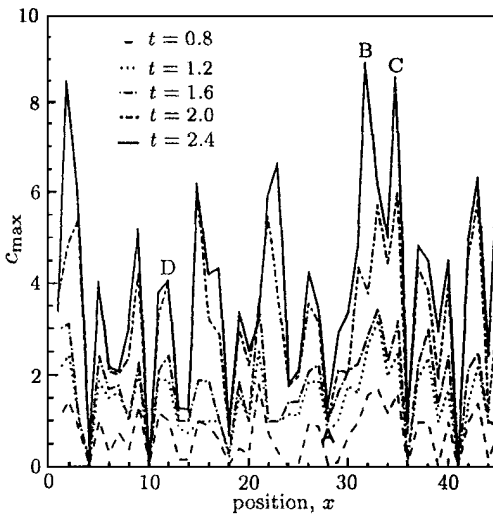


图2 不同局域最大裂纹尺度随时间 t 的演化特征
 Fig.2 Evolution characteristics of the maximum crack size with time t at different local positions

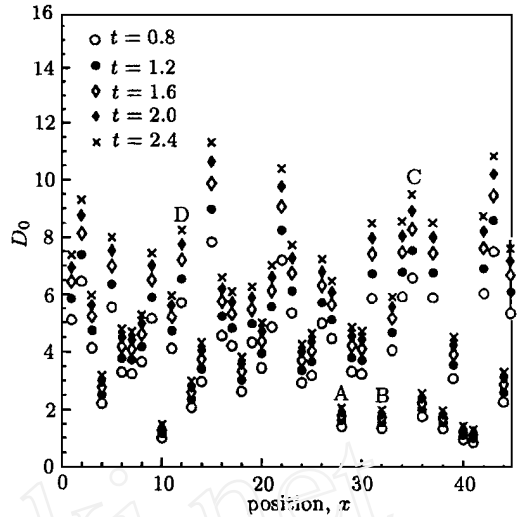


图3 不同局域裂纹总数随时间 t 的演化特征
 Fig.3 Evolution characteristics of the total crack number with time t at different local positions

于裂纹生长. 可以推测: A, D 局域不利于裂纹扩展, 所以 A 局域未出现大尺度裂纹, 而 D 局域在裂纹萌生后损伤发展缓慢直至趋于停滞; B, C 局域情况则相反.

综合图 2 和图 3 可见, A, B, C, D 分别对应着四种情况不同的局域: A 局域: 萌生不利, 生长不利; B 局域: 萌生不利, 生长有利; C 局域: 萌生有利, 生长有利; D 局域: 萌生有利, 生长不利. 在影响裂纹萌生和生长两类因素共同作用下, 疲劳短裂纹初期损伤发展快的局域不一定成为主裂纹的产生地. 损伤程度初始发展慢的局域却有可能产生导致最后疲劳破坏的裂纹.

图 4 显示了多次样本实验中 \tilde{c}_{max} 的演化情况. 图中实线表示平均场理论的结果, 即在式 (7), (8) 中令 $L(c) = 0, L^*(c) = 0$ 的数值计算结果. 图中虚线表示考虑裂纹行为随机变化的多次样本实验数据点的回归结果. 可以看到, 随着疲劳进程的发展, 二者出现差别且差别逐渐增大, 表现出平均场理论所得的最大裂纹尺度明显大于计及随机因素的样本实验的结果. 换言之, $t < 1.4$ 时平均场理论与随机分析的结果差异很小, 而 $t > 1.4$ 后其差异不可忽略. 这里无量纲时间 $t = t \cdot A^* / d$. 若取晶粒尺度 $d = 50 \mu\text{m}$, 特征裂纹生长速率 $A^* = 10^{-3} \mu\text{m}/\text{cycle}$, 则 $t = 1$ 对应着疲劳周次 $t = 5 \times 10^4$ 周. 可以认为, 对于高周疲劳寿命的预测, 必须计入随机因素的作用; 而对于低周疲劳范畴, 应用平均场理论即可得到较好的近似.

图 5 给出了 \tilde{c}_{max} 随 \tilde{D}_0 变化的样本实验结果. 实线表示平均场理论的结果, 数据点表示随机样本实验结果. 从图中看出, 平均场理论与样本实验所得结果无明显差别, 表明若以 \tilde{D}_0 作为 \tilde{c}_{max} 的描述函数, 则采用平均场理论描述材料疲劳损伤具有与随机分析相近的结果.

3 结 论

考虑材料性质在各局域具有随机涨落, 在裂纹扩展速率和成核率中分别引入独立的随机变化项, 建立了局域裂纹数密度随机演化方程组. 通过对裂纹扩展和成核的模化, 可以对群体疲

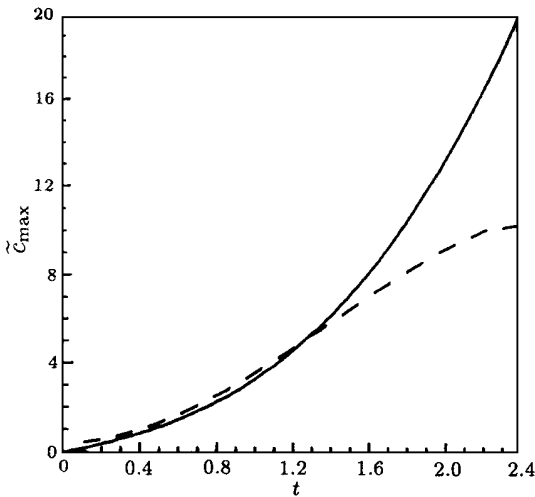


图 4 全场最大裂纹尺度的演化特征,实线表示平均场理论的结果,虚线表示多次随机样本模拟的回归结果

Fig. 4 Evolution characteristics of whole field maximum crack size, solid curve representing result of mean field theory, dashed curve representing regression result of stochastic simulations

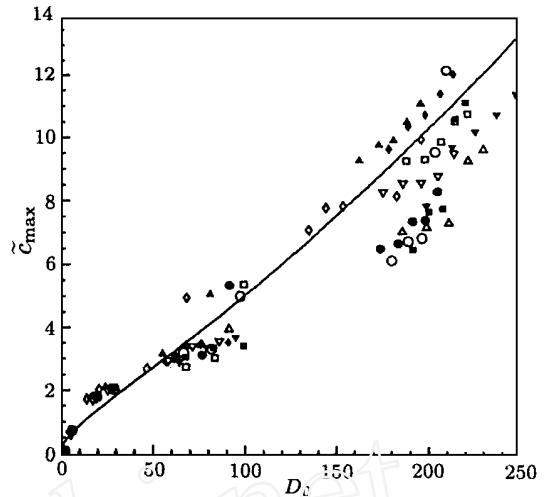


图 5 全场最大裂纹尺度与裂纹总数的关系,实线表示平均场理论的结果,数据点表示不同随机样本模拟的结果

Fig. 5 Relationship between whole field maximum crack size and total crack number, solid curve representing result of mean field theory, datum points representing result of stochastic simulations

劳短裂纹数密度随机演化进行考察。在忽略局域间相互作用的情况下,对方程组数值分析的结果表明:

1) 在裂纹成核、扩展这两个随机变量的共同作用下,裂纹数密度随机演化方程描述了材料疲劳损伤在空间上的随机非平衡发展:在材料内部的各个局域中,以局域最大裂纹尺度和局域裂纹总数描述的疲劳损伤的演化相当不平衡,而且局域之间的这种不平衡的程度随着疲劳进程的进行不断增大。

2) 裂纹数密度随机演化方程还描述了局域裂纹数密度演化在时间上的非均匀特征:初始损伤发展快的局域有可能在疲劳进程后期呈停滞趋势;而初始损伤发展缓慢的局域也有可能后期发展为主要破坏区。这是裂纹萌生、扩展随机涨落共同作用的结果。

3) 材料性质的随机变化特性对高周疲劳损伤程度的预测有不可忽略的影响。平均场理论的结果较随机样本实验的结果偏高,这是系统的非均匀性所导致。

4) \tilde{c}_{\max} 随 \tilde{D}_0 的变化关系对是否考虑损伤的随机特性不敏感。

参 考 文 献

- 1 洪友士,方飙. 疲劳短裂纹萌生及发展的细观过程和理论. 力学进展, 1993, 23:468~486 (Hong Youshi, Fang Biao. Microscopic process and description for the initiation and propagation of short fatigue cracks. *Advances in Mechanics*, 1993, 23: 468~486 (in Chinese))
- 2 Goto M. Statistical investigation of the behaviour of small cracks and fatigue life in carbon steels with different ferrite grain sizes. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 1994, 17:635~649
- 3 柯孚久,白以龙,夏蒙芬. 理想微裂纹演化系统的特征. 中国科学(A辑),1990(6): 621~631 (Ke Fujiu, Bai Yilong, Xia

- Mengfen. Evolution of ideal micro - crack system. *Science in China A*, 1990(6) : 621 ~ 631 (in Chinese))
- 4 Fang Biao, Hong Youshi, Bai Yilong. Experimental and theoretic study on numerical density evolution of short fatigue cracks. *Acta Mechanica Sinica (English Edition)*, 1995, 11 : 144 ~ 152
- 5 Price CE. The progression of bending fatigue in nickel. *Fatigue Fract. Engng Mater Struct*, 1988, 11 : 483 ~ 491
- 6 Hong Youshi, Lu Yonghua, Zheng Zhemin. Initiation and propagation of short fatigue cracks in a weld metal. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 1989, 12 : 323 ~ 331
- 7 Hong Youshi, Lu Yonghua, Zheng Zhemin. Orientation preference and fractal character of short fatigue cracks in a weld metal. *J Mater Sci*, 1991, 26 : 1821 ~ 1826
- 8 Weiss J, Pineau A. Fatigue and creep - fatigue damage of austenitic stainless steels under multiaxial loading. *Metall Trans A*, 1993, 24A : 2247 ~ 2261
- 9 Hong Youshi, Gu Ziyang, Fang Biao, Bai Yilong. Collective evolution characteristics and computer simulation of short fatigue cracks. *Phil Mag A*, 1997, 75 : 1517 ~ 1531
- 10 乔宇,洪友士. 疲劳短裂纹数密度演化的稳定性分析. 材料设计与加工, '96 中国材料 研讨会文集. 1996 年 11 月, 北京: 化学工业出版社, 1997. II - 1 : 102 ~ 106 (Qiao Yu, Hong Youshi. A stability analysis on distribution of crack number density for short fatigue cracks, in: Materials Design and Processing, Proceedings of '96 China Materials Symposium, Beijing: Chemical Industry Press, 1997. II - 1 : 102 ~ 106 (in Chinese))

A STOCHASTIC MODEL FOR EVOLUTION OF COLLECTIVE SHORT - FATIGUE - CRACKS BASED ON LOCAL FIELD ANALYSIS¹⁾

Qiao Yu Hong Youshi

(*Lab for Nonlinear Mechanics of Continuous Media (LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract It has been observed that, the evolution process of short fatigue cracks in some metallic materials presents collective damage characteristics. The cumulation of the damage is produced by a number of short fatigue cracks. The extent of damage is not dependent on a single crack, but on the whole response of total short cracks. For this situation, we adopted the method of the balance of crack number density to describe such an evolutionary process. The basic consideration of the model is that, at a certain time duration, the number of cracks with a given length is due to two aspects: (a) crack nucleation, and (b) crack growth. In the previous study, the evolution of short cracks is considered uniform throughout the gauge area of a specimen. However, during a fatigue damage process, the initiation and the growth of short cracks are always randomly distributed. In some local areas, short cracks may densely appear; simultaneously, there may exist some other areas even without any short crack damage. In this paper, the development of collective damage for short fatigue cracks in different local fields of metallic materials is described by local crack numerical densi-

¹⁾ The project supported by the National Outstanding Youth Scientific Award of China, the National Natural Science Foundation of China and the Chinese Academy of Sciences.

Received 17 March 1997, revised 18 May 1998.

ty. By considering the influence of the local damage and the stochastic fluctuation of local material properties on the evolution of total extent of damage, the evolution equation of local crack numerical density is established. The process of short crack fatigue damage is simulated by solving the evolution equation numerically. The results demonstrate the stochastic distribution of short crack growth, which imply that fast damage development area in the beginning stage may not be the location of a main crack, whereas the local area with slow speed of damage development at the beginning may form a main crack leading to final fracture. In addition, with the progression of fatigue process, the difference between the mean - field theory and the stochastic analysis becomes evident, showing the value of the maximum crack length in the whole field obtained by the mean - field theory being larger than that obtained by the stochastic analysis. The characteristics of statistical development for the maximum crack length and the total number of cracks are further discussed.

Key words short fatigue cracks, local crack numerical density, collective damage, stochastic evolution