

短纤维 / 晶须增强金属基复合材料的弹塑性本构关系 *

刘秋云 刘晓宇 王乃鹏 梁乃刚

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 研究了短纤维 / 晶须增强金属基复合材料在弹塑性变形中的应变分布, 得到了增强体与基体应变的统计规律, 提出了短纤维 / 晶须增强金属基复合材料的材料模型, 导出了相应的弹塑性本构关系, 预测了磷酸铝晶须增强 Al 基 ($[AlBO]_w/Al$) 复合材料单轴拉伸应力应变关系, 结果与实验吻合良好。

关键词 复合材料, 弹塑性, 本构关系

中图分类号 TB331, O344.3 文献标识码 A 文章编号 0412-1961(2001)05-0555-06

ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE RELATION OF SHORT FIBER/WHISKER REINFORCED METAL MATRIX COMPOSITES

LIU Qiuyun, LIU Xiaoyu WANG Naipeng LIANG Naigang

State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080

Correspondent: LIU Qiuyun, Tel: (010)62545533-3182, Fax: (010)62561284,

E-mail: lqy@lnm.imech.ac.cn

Manuscript received 2000-07-04, in revised form 2000-12-04

ABSTRACT Aimed at metal matrix composites reinforced by short fiber/whisker, a material model is proposed. Based on the statistical description of strain distribution in reinforcer and matrix, the elasto-plastic constitutive relation of short fiber/whisker reinforced aluminum matrix composites is derived. The tensile stress-strain curve of $[AlBO]_w/Al$ composites is predicted, and the result is agreement well with the experimental one.

KEY WORDS composite, elasto-plastic, constitutive relation

当增强体的形状为球体或椭球体、其体积分数低于 10%, 呈规则排列时, 复合材料的有效弹性模量是可以精确得到预测^[1-4]。但对于实际工程复合材料, 增强体的体积分数通常为 10%—40%; 增强体常常有棱有角、形状远比球或椭球复杂, 分布极不均匀、纵横交错, 很难划分出包含孤立增强体的胞体, 因而精确预测实际工程复合材料的有效弹性模量仍是亟待解决的难题^[5]。关于短纤维 / 晶须增强金属基复合材料塑性本构方面的研究开展得非常少^[6], 尤其对于增强体含量较高, 分布不规则的复合材料弹塑性本构的研究, 目前还是空白。

实际上, 材料的宏观力学性能, 特别是弹性性能, 对材料某些微观应力应变分布细节并不敏感, 可以避开所

谓的精确微观力学计算过程。正如匡震邦^[7]指出, 面内随机分布短纤维复合材料的性能可按经验公式^[8]来估计。对于空间随机分布短纤维复合材料, 文献^[9]给出了形式略有不同的经验公式。可见, 欲实现随机分布短纤维 / 晶须增强复合材料性能的预测, 需在不丢失其基本特性的情况下, 尽量简化复合材料的微观结构细节。在这方面, Withers 等^[10], Liang 等^[11]和 Liu 等^[12]开展了有意义的工作。Withers 等^[10]认为: 确定平均的基体应力可不依赖表述应力局部变化的复杂表达式。理由是, 尽管局部应力场的精确细节对增强体形状敏感, 但在基体内, 它们的大部分应力场却惊人地相似。Liang 等^[11]指出: 尽管实际材料内纤维的分布和变形并不均匀, 但在模拟宏观效应的均匀化模型中可用与宏观变形相协调的纤维构元作为真实纤维的等效耗能机构。Liu 等^[12]考虑短纤维 / 晶须空间取向分布对材料宏观性质的影响, 忽略短纤维 / 晶须空间位置分布的随机性及其端部应变分布的细节, 定义了同一取向增强体的均方根应变与该方向上

* 国家自然科学基金项目 19872065, 19732060、中国科学院基金项目 KJ951-1-201 和中国博士后基金项目资助

收到初稿日期: 2000-07-04, 收到修改稿日期: 2000-12-04

作者简介: 刘秋云, 女, 1969 年生, 博士

宏观线应变的比值为变形特征参数 λ_f 。在弹性变形范围内, λ_f 是由复合材料中增强体体积分、长径比和基体与增强体的模量比等材料参数决定的常数, 与变形方式无关。利用 λ_f 与增强体分布密度函数导出了复合材料的刚度张量表达式, 可预测工程复合材料在增强体任意取向分布、任意变形条件下的刚度模量^[13]。

本文重点研究弹塑性变形阶段, 随复合材料变形增加的变化规律及基体刚度的变化规律, 建立材料模型, 导出短纤维 / 晶须增强复合材料弹塑性本构方程, 预测 [AlBO]_w/Al 复合材料单轴拉伸应力 - 应变响应, 并与实验结果进行比较。

1 复合材料的弹性性能与预测

1.1 增强体变形规律与应变能

如图 1 所示, 无限大基体中埋着一根孤立增强体, 不失一般性, 以增强体的轴向 l 方向为 x 轴建立局部直角坐标系。远离增强体的基体中的应变分量为 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 和 γ_{xy} , 增强体轴向应变可写为

$$\epsilon_f = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}) \quad (1)$$

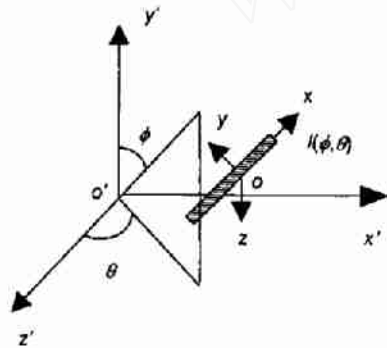


图 1 增强体取向示意图
Fig.1 Orientation of a whisker

由于增强体的直径远小于增强体的长度, 因此可忽略增强体横截面即在 yoz 平面内的变形, 故略去 3 个应变分量 ϵ_y, ϵ_z 和 γ_{yz} 对应变能的贡献。剪切应变 γ_{zx} 和 γ_{xy} 对增强体轴呈反对称, 不会引起增强体的轴向变形。因而, 只有正应变 ϵ_x 引起增强体伸长, 式 (1) 可简化为

$$\epsilon_f = f(\epsilon_x) = \lambda_f \epsilon^{(1)} \quad (2)$$

其中, ϵ_f 为增强体轴向应变 (均方根应变), $\epsilon^{(1)}$ 为沿增强体轴向的宏观线应变, λ_f 为比例系数。在弹性变形情况下, λ_f 与宏观变形方式无关, 仅与增强体的体积比、长径比及基体与增强体的模量比等材料微观结构、物理参数有关

$$\lambda_f = f\left(\frac{E_m}{E_f}, \frac{L}{d}, \varphi_f\right) \quad (3)$$

用图 2 所示三维链网模型^[14]数值模拟了增强体随机多方向铺设的情况下, 弹性变形阶段增强体应变分布规律。下述典型算例中增强体的总数为 8462 个, 随机分布在给定的 13 个方向上, 加载方向为 [001], 取该方向上的应变为单位应变。

任意一方向上增强体应变分布的直方图见图 3, 呈正态分布。各方向上增强体应变的均方根应变 $\bar{\epsilon}_f$ 示于图 4, 记 [001] 方向上增强体均方根应变与该方向上宏观应变的比值为 λ , 进行统计计算, 结果在图 4 中同时给出。

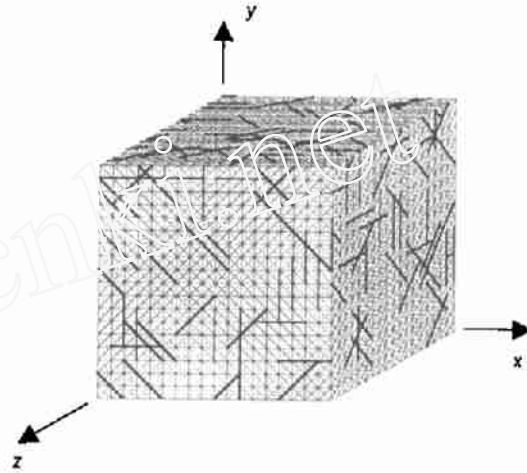


图 2 三维计算模型示意图。短链网络模拟基体, 长链模拟增强体
Fig.2 A 3D network model (short chain network=matrix, long chains=reinforcers)

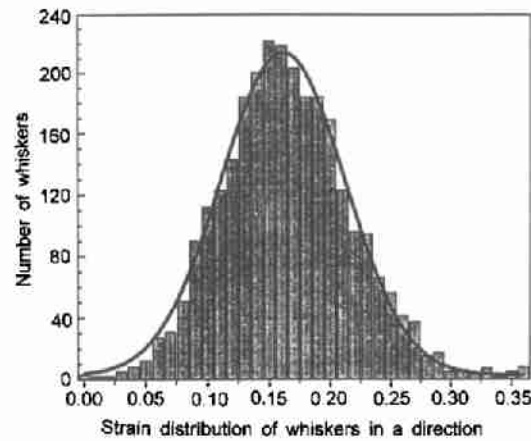


图 3 同一取向增强体应变分布直方图
Fig.3 Strain distribution in reinforcers along a direction

由图 3 和 4 知, 增强体中应变各不相同, 不同取向增强体的平均应变差异也很大, 但各方向上增强体应变的均方根应变与该方向上宏观应变分量的比值却非常接近。在弹性变形情况下, λ_f 与宏观变形方式无关, 仅与增强体的体积比、长径比及基体与增强体的模量比等材料微观结

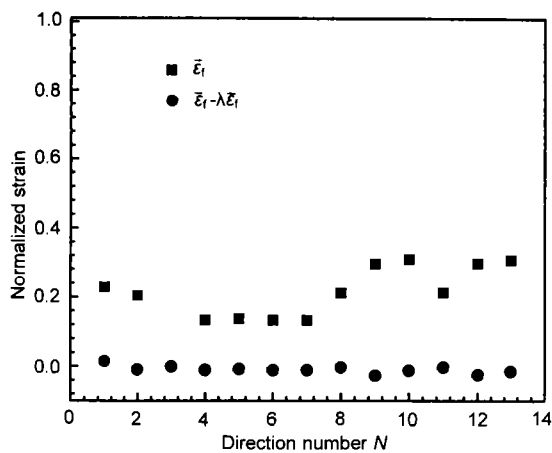


图 4 多向群体增强体在弹性阶段的应变特点

Fig.4 The regularity of strain distribution in reinforcers oriented in 13 directions during elastic deformation

构、物理参数有关,而且可由下式计算

$$\lambda_f = 1.4(0.94 + 0.3\varphi_f) \left(\frac{E_m}{E_f}\right)^{(0.84 - 0.03\frac{\varphi_f}{a})} \quad (4)$$

其中, φ_f 为增强体的体积分数, L, d 分别为增强体平均长度与平均直径, E_f 和 E_m 分别为增强体和基体的弹性模量. 当增强体体积分数小于 50% 时, 不同取向上增强体的交互作用可被忽略.

增强体空间连续分布时单位体积复合材料内增强体的应变能为

$$W_f = \frac{1}{2} E_f \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cdot \left[\int_0^{2\pi} \lambda_f^2(\theta, \phi) \rho(\theta, \phi) n_i n_j n_r n_s d\theta \right] d\phi \quad (5)$$

其中, ϕ 与 θ 的定义见图 1, $\rho(\theta, \phi)$ 为增强体的取向分布密度函数, $\lambda_f(\theta, \phi)$ 为取向 (θ, ϕ) 的增强体均方根应变与该方向宏观线应变的比值, $n_i (i=1, 2, 3)$ 为单位向量的方向余弦

$$\begin{cases} n_1 = \sin \phi \cdot \cos \theta \\ n_2 = \sin \phi \cdot \sin \theta \\ n_3 = \cos \phi \end{cases} \quad (6)$$

1.2 基体的应变能

基体的应变能可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \lambda_m^2 \varphi_m S_{(m)ijrs} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \quad (7)$$

其中, φ_m 为基体的体积分数, $S_{(m)ijrs}$ 为基体材料的刚度张量, λ_m 为基体变形特征参数, 对于增强体单向或随机取向分布的复合材料有

$$\lambda_m \varphi_m + \lambda_f \varphi_f = 1 \quad (8)$$

1.3 复合材料的刚度矩阵

复合材料的应变能等于基体与增强体的应变能之和

$$W_c = \frac{1}{2} \lambda_m^2 \varphi_m S_{(m)ijrs} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} + \frac{1}{2} E_f \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin \phi \int_0^{2\pi} \lambda_f^2(\theta, \phi) \rho(\theta, \phi) n_i n_j n_r n_s d\theta d\phi \quad (9)$$

将上式对应变进行二次微分可得到复合材料的刚度张量

$$S_{(c)ijrs} = \lambda_m^2 \varphi_m S_{(m)ijrs} + E_f \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cdot \int_0^{2\pi} \lambda_f^2(\theta, \phi) \rho(\theta, \phi) n_i n_j n_r n_s d\theta d\phi \quad (10)$$

在弹性变形范围内, 上式可以预测增强体任意分布、任意加载方式下复合材料刚度模量. 例如, 增强体单一取向排列时, 其分布密度函数为单位脉冲函数, 即 $\rho(\theta, \phi) = \varphi_f \delta(\theta, \frac{\pi}{2})$. 以增强体轴向为 x 轴方向, 由上式知复合材料在 x 轴方向上的刚度模量

$$S_{(c)1111} = \lambda_m^2 \varphi_m S_{(m)1111} + \lambda_f^2 \varphi_f E_f \quad (11)$$

当 $\lambda_f = S_{(m)1111}/S_{(m)1111}\varphi_f + E_f\varphi_m, \lambda_m = E_f/S_{(m)1111}\varphi_f + E_f\varphi_m$ 时, 式 (11) 给出的刚度模量取最小值. 此时 $\lambda_f E_f = \lambda_m S_{(m)1111}$, 增强体应力与基体应力相等. 也就是说, 现有理论预测的最小值为 Reuss^[15] 的下限解.

由于 $0 < \lambda_f \leq 1$, 当 $\lambda_f = \lambda_m = 1$ 时, 式 (11) 给出刚度模量的上界, 其表达式为

$$S_{(c)1111} = \varphi_m S_{(m)1111} + \varphi_f E_f \quad (12)$$

此时有 $\varepsilon_{(f)ij} = \varepsilon_{(m)ij} = \varepsilon_{ij}$, 增强体应变与基体应变相等, 对应于 Voight 提出的等应变模型^[16]. 综上所述, 本模型的上下限解分别与等应变 (混合法则)、等应力模型相对应. 图 5 表明, 复合材料刚度模量从上限到下限之间的任意取值, 都对应一组特定的 λ_f, λ_m . 因此, 使用本文导出的刚度模量计算公式, 恰当的 λ_f, λ_m 值能保证预测精度.

2 塑性变形阶段中增强体、基体的变形规律与本构关系

当超过弹性变形阶段后, 复合材料切线刚度仍类似式 (10), 但基体材料的刚度要用 $S_{(m)ijrs}^{e,p}$ 代替, 增强体的变形特征参数 λ_f 要随所在方向上的宏观线应变的增加而变化, 记为 $\lambda_f = \lambda_f(\varepsilon(\theta, \phi))$. 即

$$S_{(c)ijrs}^{e,p} = \varphi_m S_{(m)ijrs}^{e,p} + E_f \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cdot \int_0^{2\pi} \lambda_f^2(\varepsilon(\theta, \phi)) \rho(\theta, \phi) n_i n_j n_r n_s d\theta d\phi \quad (13)$$

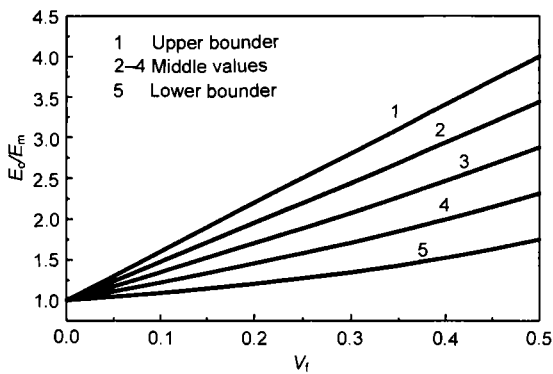


图5 复合材料刚度模量随增强体体积分数的变化

Fig.5 The stiffness modulus vs the volume fraction of reinforcements

其中上标 e 和 p 分别代表弹性、塑性变形阶段.

2.1 塑性变形阶段增强体的变形特点与统计规律

用二维链网模型^[9]研究了增强体随机分布情况下 λ_f 随复合材料变形增加的变化规律. 设基体材料的塑性硬化模量为常数, 取复合材料屈服时的相对应变为 1. 采用控制边界位移的方式改变加载的方向, 分别计算了取向与加载方向成 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ 和 45° 方向上的增强体均方根应变随控制应变的变化, 结果如图 6 所示.

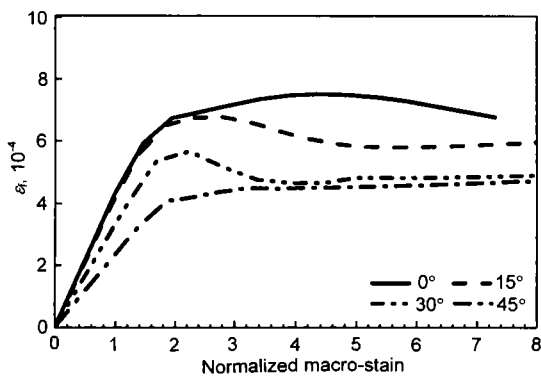


图6 不同取向增强体的均方根应变

Fig.6 Root-mean-square strain in various orientations

图 7 显示了各取向上增强体的 λ_f 值随该方向宏观线应变的变化. 在线弹性变形阶段, 各个方向上的 λ_f 值都是相同的; 进入塑性阶段后, 不同取向增强体的 λ_f 值随所在方向宏观线应变的变化规律可用同一曲线表示. 用最小二乘法进行回归^[17]可以得到塑性变形阶段 λ_f 的计算公式为

$$\lambda_f^{(p)} = \lambda_f^{(e)} [2.46\kappa + (1 - 2.46\kappa)e^{-0.68(\epsilon^{(l)} - 1)}] \quad (14)$$

其中 κ 为塑性硬化模量与弹性模量的比. 图 7 中的实线是式 (14) 的计算结果.

对于一个单调加载过程, 可将复合材料作为非线性弹性材料, λ_f 的变化反映了基体刚度的变化. 由式 (4) 知,

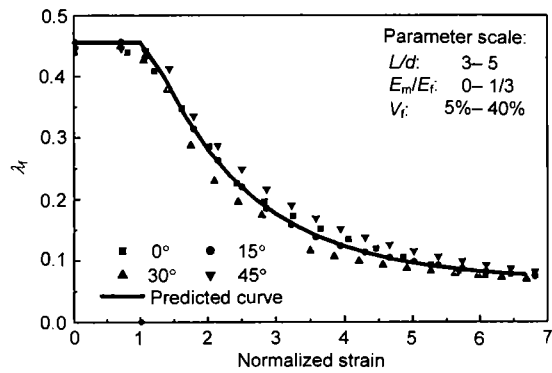


图7 λ_f 随增强体所在方向宏观线应变的变化

Fig.7 λ_f vs macro linear strain along the same direction

增强体体积比为 20% 时, 单轴拉伸时基体刚度可表示为

$$E_m = E_m(\epsilon) = E_f \left[\frac{\lambda_f(\epsilon)}{1.4} \right]^{1/(0.84 - 0.03L/d)} \quad (15)$$

由上式可知复合材料中基体单轴拉伸应力 - 应变曲线, 见图 8.

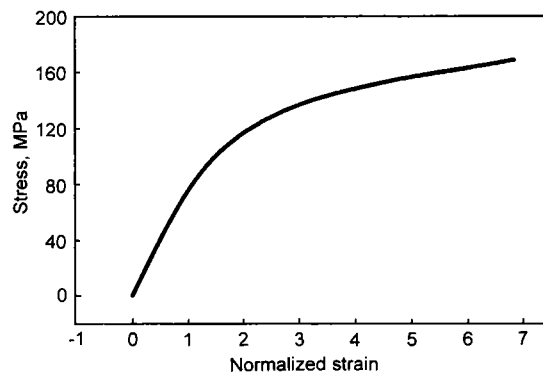


图8 复合材料中基体单轴拉伸应力应变曲线

Fig.8 Tensile stress-strain curve of matrix in composite

2.2 材料模型与弹塑性本构关系

如图 9a 所示的增强体随机均匀分布的金属基复合材料中, 由于增强体的刚度模量和强度均远大于基体材料, 因此增强体本身在变形过程中保持弹性, 但其变形特征参数 λ_f 随该方向上的宏观线应变增加而减小, 见图 7. 所以, 同一取向的增强体可用一弹塑性纤维束代替, 纤维束的模量变化由图 7 决定. 而基体材料的塑性变形规律可用多晶金属的弹塑性本构模型描述, 而且图 8 中的曲线就是基体材料的单轴拉伸应力应变响应. 这样, 图 9b 所示的长纤维增强金属基复合材料可以作为图 2 所示短纤维增强金属基复合材料的模型材料. 当然, 长纤维具有相应的弹塑性性质.

2.3 复合材料的弹塑性本构关系

初始各向同性的多晶金属, 塑性变形主要是晶粒内的晶体学滑移与晶界滑移形成的, 取向各异、随机分布的晶

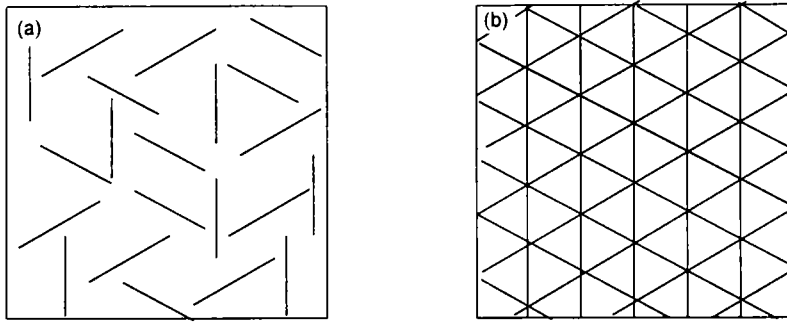


图 9 随机分布晶须增强复合材料与模型材料示意图

Fig.9 Schematic diagram of composite with whiskers oriented randomly (a) and modeling materials (b)

体学或非晶体学微小滑移面上的滑移消耗塑性功. 由文献 [18] 知, 滑移面法线方向落在 m 的 Ω 立体角域内而滑移方向落在 l 的 $d\psi$ 平面角域内的多晶金属的柔度张量为

$$C_{(m)ijrs} = C_{(m)ijrs}^e + \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \int_{\psi} \frac{1}{h} (m_i l_j + m_j l_i) (m_r l_s + m_s l_r) d\Omega d\psi = C_{(m)ijrs}^e + C_{(m)ijrs}^p \quad (16)$$

其中 h 为滑移硬化模量(视未开动滑移系的滑移硬化模量为无穷大), 可用图 8 所示基体单轴拉伸应力 - 应变曲线标定.

滑移系沿正反两方向开动的临界条件为

$$\begin{cases} \text{若 } \tau = \tau_{+cr}, \text{ 则 } \dot{\gamma} > 0, \dot{\tau}_{+cr} = \dot{\tau} = h\dot{\gamma} \\ \quad \quad \quad \dot{\tau}_{+cr} - 2\tau_{cr0} \\ \text{若 } \tau = \tau_{-cr}, \text{ 则 } \dot{\gamma} < 0, \dot{\tau} = h\dot{\gamma} \\ \quad \quad \quad \dot{\tau}_{+cr} = \dot{\tau}_{cr} + 2\tau_{cr0} \\ \text{否则, } \dot{\gamma} = 0, \dot{\tau}_{\pm cr} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中, $\dot{\gamma}$ 为同一方位上所有微小滑移面滑动引起剪切变形率的体积平均, τ 为分解剪应力, $\tau_{\pm cr}$ 为正反方向的临界分解剪应力, $\tau_{\pm cr}$ 为正反方向的临界分解剪应力率, τ_{cr0} 为初始临界分解剪应力. 图 9b 所示增强体纤维束产生塑性变形的临界条件与强化律为

$$\begin{cases} \text{若 } \varepsilon_f = \varepsilon_{+cr}, \text{ 则 } \dot{\varepsilon}_{+cr} = \dot{\varepsilon}_f / h_f \\ \quad \quad \quad \dot{\varepsilon}_{-cr} = \dot{\varepsilon}_{+cr} - 2\varepsilon_{cr0} \\ \text{若 } \varepsilon_f = \varepsilon_{-cr}, \text{ 则 } \dot{\varepsilon}_{cr} = \dot{\varepsilon}_f = \dot{\sigma}_f / h_f \\ \quad \quad \quad \dot{\varepsilon}_{+cr} = \dot{\varepsilon}_{cr} + 2\varepsilon_{cr0} \\ \text{否则, } \dot{\varepsilon}_{\pm cr} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中 ε_f 增强体的宏观应变, $\varepsilon_{\pm cr}$ 为正反方向的屈服应变, $\varepsilon_{\pm cr0}$ 为初始屈服应变, h_f 为强化模量.

由基体的柔度张量, 不难导出刚度张量

$$S_{(m)ijrs}^{e,p} = [C_{(m)ijrs}]^{-1} =$$

$$[C_{(m)ijrs}^e + C_{(m)ijrs}^p]^{-1} \quad (19)$$

将上式代入到式 (13), 可得到复合材料弹塑性刚度张量

$$S_{(c)ijrs}^{e,p} = \varphi_m [C_{(m)ijrs}^e + C_{(m)ijrs}^p]^{-1} + E_f \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cdot \int_0^{2\pi} \lambda_f^2 \cdot \varepsilon(\theta, \phi) \cdot \rho(\theta, \phi) n_i n_j n_r n_s d\theta d\phi \quad (20)$$

复合材料的弹塑性本构方程为

$$\dot{\sigma}_{(c)ij} = S_{(c)ijrs}^{e,p} \dot{\varepsilon}_{rs} \quad (21)$$

其中 $\dot{\sigma}_{(c)ij}$ 为应力率, $\dot{\varepsilon}_{rs}$ 为应变率.

3 复合材料的拉伸变形行为预测

利用式 (21) 预测了 [AlBO]_w/Al 复合材料的单轴拉伸应力 - 应变曲线, 结果示于图 10. 其中, 虚线为实验曲线, 实线为模型预测结果. 可见, 预测的复合材料弹塑性应力 - 应变响应曲线与实验结果吻合良好.

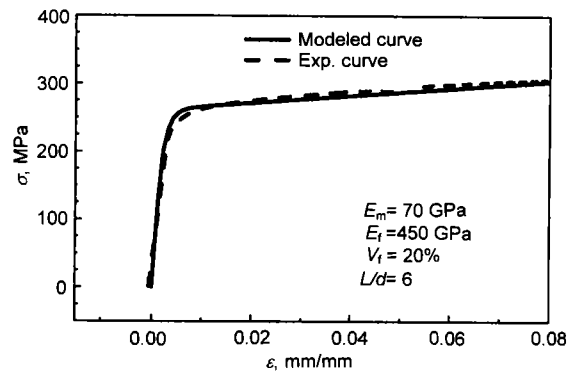


图 10 [AlBO]_w/Al 复合材料的拉伸应力应变曲线

Fig.10 Tensile stress-strain curves of [AlBO]_w/Al composite

此外, 还对三种不同长径比的复合材料的应力 - 应变关系进行了预测, 如图 11 所示. 随着增强体长径比的增大, 复合材料的刚度和强度均明显提高.

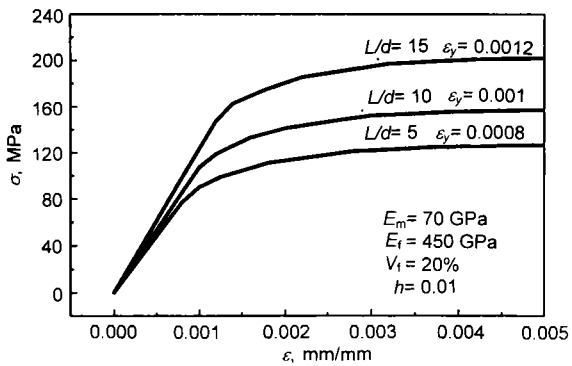


图 11 不同长径比复合材料的拉伸应力应变曲线

Fig.11 Tensile stress-strain curves of composite under various aspect ratios

4 结论

(1) 复合材料中基体的塑性变形仍可用多晶金属的塑变理论来描述, 只是其屈服应力与滑移硬化模量不同于纯基体材料的变形常数.

(2) 导出了复合材料的弹塑性本构方程, 可以预测增强体任意分布、任意加载方式下复合材料的变形行为.

(3) 预测了 $[AlBO]_w/Al$ 复合材料单轴拉伸应力-应变曲线, 预测结果与实验曲线吻合良好, 证明了文中得到回归公式的适用性.

参考文献

- [1] Eshelby J D. *Proc Roy Soc*, 1957; A241: 376
 [2] Hill R. *J Mech Phys Solids*, 1965; 13: 213

- [3] Budiansky J C. *J Mech Phys Solids*, 1965; 13: 223
 [4] Roscoe R A. *Brit J Appl Phys*, 1952; 3: 267
 [5] Boland F, Colin C, Salmon C, Delannay F. *Acta Mater*, 1998; 46: 6311
 [6] Du S Y, Wang B. *Meso Mechanics of Composite*. Beijing: Science Press, 1998: 118
 (杜善义, 王彪. 复合材料细观力学. 北京: 科学出版社, 1998: 118)
 [7] Kuang Z B, Gu H C, Li Z H. *Mechanical Behavior of Materials*. Beijing: Advanced Education Publishing, 1998: 380
 (匡震邦, 顾海澄, 李中华. 材料的力学行为. 北京: 高等教育出版社, 1998: 380)
 [8] Smith J C. *J Res National Bureau Standards*, 1974; 78A: 355
 [9] Nielsen L C, Landel R F. *Mechanical Properties of Polymers and Composites*. 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 1994: 180
 [10] Withers P J, Chorley E M, Clyne T W. *Mater Sci Eng*, 1991; A135: 173
 [11] Liang N G, Cheng P S. *Sci China*, 1993; 36: 692
 [12] Liu Q Y, Liang N G, Liu X Y. *Chin J Aeronautics*, 2000; 13(3):182 (in press)
 [13] Liu X Y, Liu Q Y, Liang N G. *Chin J Aeronautics*, 2000; 13(3):188 (in press)
 [14] Liu X Y, Yan W D, Liang N G. *Met Mater*, 1998, 4: 242
 [15] Ruess A. *Z Angew Math Mech*, 1929; 9: 49
 [16] Voigt W. *Wied Ann*, 1889; 38: 573
 [17] Gui X M, Li C H, Cai C Z. *Mathematics Handbook*. Shanghai: Shanghai Science Popularization Press, 1993: 468
 (归行茂, 李重华, 柴常智. 数学手册. 上海: 上海科学普及出版社, 1993: 468)
 [18] Liang N G, Liu H Q, Wang T C. *Sci China*, 1998; 41: 887