

基于比拟理论的翼型扰流声场数值模拟¹⁾

胡国庆 傅德薰・马延文 *

(LNM, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

*(LHD, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 从二维模型方程的全离散形式出发, 重点分析了差分格式的色散特性和各向异性效应, 证实迎风紧致格式比对称格式有更好的色散和各向同性特性, 故有利于声场的数值模拟. 并采用三阶迎风紧致格式 (UCD3) 和四阶对称紧致格式 (SCD4) 计算了绕 NACA0012 翼型的可压缩非定常流场, 并将此流场作为近场声源, 运用声学比拟理论对气动声进行模拟.

关键词 气动声学, 数值模拟, 声学比拟理论, 紧致差分格式, 翼型

引 言

气动声学是一门近年来蓬勃发展的学科, 作为气动力学和声学之间交叉性的分支学科, 它着重研究流动及其与物体作用导致噪声的机理. Lighthill^[1] (1952) 提出的声学比拟理论极大地促进了气动声学的发展. 此理论将整个流场划分为近场和远场两部分, 近场为声源区域, 远场为声的传播区域. Lighthill 证明了无界流体介质中的非定常流动区域在声学上等价于四极子声源. 当流场中存在固壁边界时, Curle^[2] (1955) 在 Lighthill 的基础上导出了由流动 - 固壁相互作用引起的气动噪声的积分公式. Curle 证实除了四极子声以外, 固壁边界所引起的脉动应力可产生更强的二极子声辐射. 气动声学比拟理论大大地简化了气动声学的物理模型.

计算气动声学从计算区域来看可分为全场模拟和混合模拟. 全场模拟对近场和远场均采用数值方法. 混合方法在近场用计算流体力学方法如直接数值模拟 (DNS)、大涡模拟 (LES) 等进行计算, 远场则利用声学比拟理论进行积分计算. 气动声学的物理特征使得计算气动声学有更多的困难^[3]: 气动噪声的频率范围非常宽; 流场尺度相差极大; 声波的能量和主流能量相比非常小等等. 如果想要采用全场模拟, 对网格数的要求就非常高, 往往超出计算机运算能力. 因此, 在目前条件下, 采用混合模拟是一种较为可行的方法.

计算气动声学所要模拟的是实际过程中的物理波, 包括色散、耗散、方向性等, 因此要求差分方法有较高精度. 满足色散关系是数值格式最为重要的内容, 因为声波是各向同性波, 同时, 气动声是一种非定常现象, 计算准确性同时受空间离散和时间离散的控制. 因此, 本文从二维模型方程的全离散形式出发, 比较几种差分格式, 从中选出合适的方法进行近场声源模拟. 在此基础上, 运用 Lighthill 比拟理论和 Curle 积分, 计算远场声场.

1999-03-10 收到第一稿, 1999-12-07 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19872069)、国家科学技术部 (九五) 攀登 A 预选项目“流体及空气动力学关键基础问题研究”资助课题.

1 全离散 Fourier 分析

1.1 模型方程及其离散

将二维欧拉方程作为模型方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

这里 $Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$, 为了便于分析, 设系数矩阵 A 和 B 为常数矩阵。对流项空间离散分别采用二阶中心差分、三阶迎风紧致格式 (UCD3) 和四阶中心紧致格式 (SCD4)^[4], 时间离散采用 Runge-Kutta 方法。

1.2 Fourier 分析

考虑在无限物理平面上, 二维方程 (1) 具有周期解, 并且对应于计算域 $[L_x, L_y]$. 用单波分量代替离散的 Fourier 展开, 放大矩阵 $G(p, q)$ 可定义为

$$\hat{Q}^{n+1}(p, q) = G(p, q) \hat{Q}^n(p, q) \quad (2)$$

这里 \hat{Q} 表示原始变量 Q 的 Fourier 变换, p 和 q 分别为 x 和 y 方向的波数。通过矩阵 G 的对角化, 可得到 G 的特征值, 即为数值格式的放大因子。

对于 m 阶 R-K 方法的放大矩阵为

$$G = I + \sum_{s=1}^m \frac{1}{s!} Z^s \quad (3)$$

式中 $Z = AZ_x + BZ_y$, 系数 Z_x 和 Z_y 分别由 x 和 y 方向一维空间离散的 Fourier 变换确定。对应不同差分格式的 Z_x, Z_y 分别为

$$\begin{aligned} \text{二阶中心: } Z_{x,y} &= \left(-\frac{\Delta t}{h} \right) \sin(p, q)i \\ \text{UCD3: } Z_{x,y} &= \left(-\frac{\Delta t}{h} \right) \left\{ \frac{[1 - \cos(p, q)]^2}{5 + 4 \cos(p, q)} + \frac{\sin(p, q)[8 + \cos(p, q)]}{5 + 4 \cos(p, q)} i \right\} \\ \text{SCD4: } Z_{x,y} &= \left(-\frac{\Delta t}{h} \right) \frac{3 \sin(p, q)}{2 + \cos(p, q)} i \end{aligned}$$

由于 G 是关于矩阵 Z 的多项式, 所以可通过对角化 Z 得到 G 的特征值。引入 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, 这里 λ 为 Z 的特征值, 有

$$\Lambda = T^{-1} Z T$$

矩阵 T^{-1} 和 T 的具体表达式可参见文献 [5]。

我们得到特征值 $\lambda_l (l = 1, 2, 3, 4)$ 为

$$\lambda_{1,2} = Z_x u + Z_y v, \quad \lambda_{3,4} = \lambda_{1,2} \pm c(Z_x^2 + Z_y^2)^{1/2} \quad (4)$$

最后, 对应于方程 (3) 的放大因子为

$$g_l = 1 + \sum_{s=1}^m \frac{1}{s!} \lambda_l^s \quad (5)$$

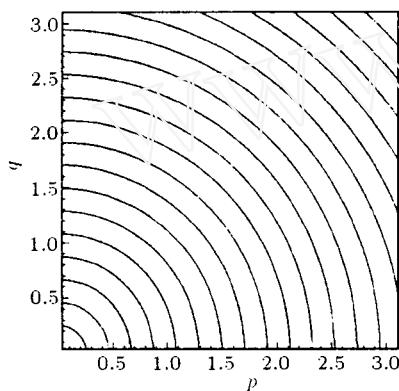
从(4)式可以看出, 在数值解中存在三种不同形式的波。 $\lambda_{1,2}$ 代表速度波, 它和主流一起运动, $\lambda_{3,4}$ 代表两种声波, 以声速相对于主流运动.

放大因子 g_l 属于复平面, 它的模和幅角分别对应于数值格式的耗散和色散误差. 令 $\omega = \omega_r + \omega_i i$, g_l 可写作

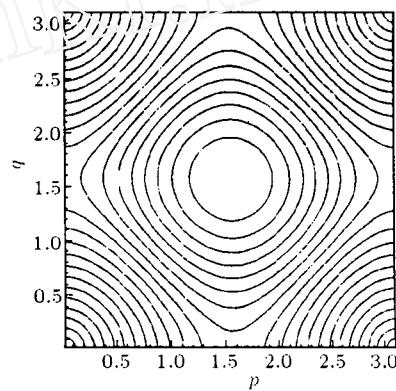
$$g_l = e^{-\omega i} \quad (6)$$

ω_i 代表全离散的耗散误差, 当 $\omega_i > 0$ 时格式是不稳定的, ω_r 代表色散误差, 它是与数值波相速度和传播方向有关的量, 在二维情形下可表征出格式的各向异性行为.

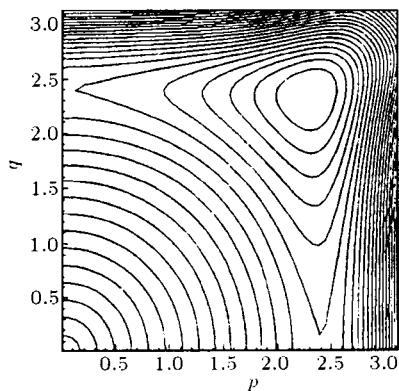
下面我们以 $\lambda_{3,4}$ 为例, 考察三种差分格式结合三阶 R-K 方法的全离散色散特性. 我们取 $u = v = \sqrt{2c}/2$ 即数值波沿 45° 方向传播, 临界 CFL_c 定义为^[5] $CFL_c = \max\{|\lambda_3|, |\lambda_4|\} \times \Delta t / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 并取网格步长 $\Delta x = \Delta y$, $CFL_c = 0.6$. 为清楚起见, 我们在对流坐标系中观察声波, 即从 $\lambda_{3,4}$ 减去流动分量 $\lambda_{1,2}$ 项. 图 1(a) 为实际物理波的传播特性, 它是以圆形波向外



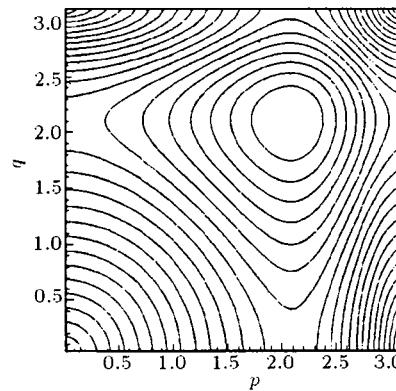
(a) Physical wave



(b) 2-order central difference-RK3



(c) UCD3-RK3



(d) SCD4-RK3

图 1 不同格式声波 $|\lambda_{3,4} - \lambda_1|$ 色散误差比较
Fig.1 Dispersion of acoustic wave $|\lambda_{3,4} - \lambda_1|$ for different schemes

传播的，(b), (c), (d) 分别对应于二阶中心、UCD3 和 SCD4 的 ω_r 等值线图。如图所示，二阶中心差分格式在 $[0, \pi/6] \times [0, \pi/6]$ 范围、UCD3 格式 $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ 范围内、SCD4 格式在 $[0, \pi/3] \times [0, \pi/3]$ 范围内具有较小的色散误差和较好的各向同性特征，即它们分别只能准确捕捉波长大于 $12\Delta x$, $4\Delta x$ 和 $6\Delta x$ 的声波分量^[6]，而更小波长的分量存在数值误差。随着波数增大，三种格式的相速度都开始减小，到高波数时相速度连方向都产生改变，这说明在高波数范围数值格式有很大的色散误差，同时也难以保持各向同性性质。从图 1 我们还可看出，迎风紧致格式不仅比普通差分格式，而且比同阶对称紧致格式有更大的各向同性范围，适于模拟各向同性的声波。

2 气动声计算

2.1 流场计算

考虑绕 NACA0012 翼型的二维非定常流动。雷诺数定义为 $Re = \bar{U}_\infty \bar{L} / \nu$ ； \bar{U}_∞ , \bar{L} , ν 分别为来流速度、翼型弦长和黏性系数。流动控制方程为贴体坐标系下的非定常可压缩 N-S 方程

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{E}_\nu}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_\nu}{\partial \eta} \right) \quad (7)$$

方程中上标 \wedge 代表曲线坐标系下的变量，各项定义及无量纲系统参见文献 [7]。

方程 (7) 中的对流项采用三阶迎风紧致差分逼近，并应用 Van Leer^[8] 通量分裂技术，黏性项采用对称四阶中心紧致逼近，时间方向采用三步三阶 R-K 方法，计算 $M_\infty = 0.5$, $Re = 10^4$, α 为 5° 和 8° 两种情况，无量纲时间步长取 $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ 。计算网格为 $\xi \times \eta = 815 \times 100$ 的 C 型网格， ξ 从下半平面顺时针增长， η 从翼型表面沿法向向外边界增长。

在计算中，沿 C 型外边界的值固定为自由流的值，翼型表面采用无滑移边界条件。受计算机速度的限制，下游边界不可能取得很远，为了防止非物理反射引起尾迹流场畸变，我们在出口采用如下无反射边界条件

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial^- \hat{E}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial^+ \hat{E}^-}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (8)$$

式中，当 $\xi = 1$ 时，取 $\hat{E}^+ = 0$ ；当 $\xi = 815$ 时，取 $\hat{E}^- = 0$ 。

为验证计算程序的可靠性，我们首先计算了 $M_\infty = 0.504$, $\alpha = 4.06^\circ$ 情况下的翼面 C_p 分布并和文献 [9] 的实验结果进行对比，如图 2 所示。计算中为了得到定常解， Re 数取 1000。

在迎角 $\alpha = 5^\circ$ 、 $Re = 10^4$ 的条件下，上翼面的附面层很快发展并开始分离，在后缘处和下翼面的附面层相互作用，产生周期性的涡脱落现象。当迎角 $\alpha = 8^\circ$ 时，将产生非周期的涡脱落现象。分别如图 3(a) 和图 3(b) 所示。

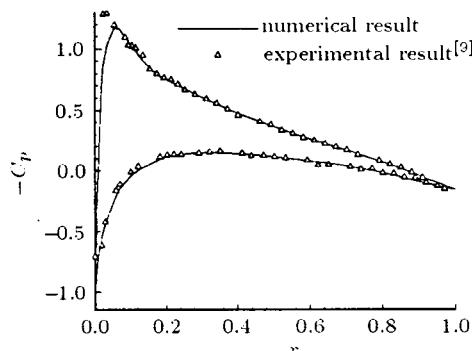


图 2 $M_\infty = 0.504$, $\alpha = 4.06^\circ$, $Re = 1000$ 时
压力系数 C_p 分布比较

Fig.2 Distribution of pressure coefficient C_p for
 $M_\infty = 0.504$, $\alpha = 4.06^\circ$, $Re = 1000$



图 3 $M_\infty = 0.5$, $Re = 10^4$, $t = 28$ 时 NACA0012 翼型绕流涡量等值线
Fig.3 Contours of vorticity for a flow past NACA0012 at $M_\infty = 0.5$, $Re = 10^4$, $t = 28$

2.2 声学理论

近场气动声源引起声波传动，由此产生的密度波动受对流方程的控制^[1]

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{M_\infty^2} \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (9)$$

式中所有量均为无量纲量， T_{ij} 称作 Lighthill 应力张量

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p_{ij} - a_0^2 \rho \delta_{ij} \quad (10)$$

其中 $v_1 = u - u_\infty$, $v_2 = v - v_\infty$, $p_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_{ij}$ 为可压缩应力张量.

针对存在固壁边界的方程 (9), Curle (1955) 得到以下解^[2]

$$\begin{aligned} \rho(x, t) - 1 = & - \frac{M_\infty^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{n_j p_{ij}(y, t - M_\infty r)}{r} dS(y) + \\ & \frac{M_\infty^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(y, t - M_\infty r)}{r} dy \end{aligned} \quad (10)$$

式中 x 和 y 分别表示观测点和声源的位置, $r = |r| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, n_j 为垂直于固壁 S 向外的方向余弦. 定义声学远场 $r \gg l_e/M$, l_e 为典型涡尺度, 如果和典型声波波长 l_e/M 比较, 近场声源尺度相对较小, 那么远场密度可近似为^[10]

$$\begin{aligned} \rho(x, t) - 1 \approx & (M_\infty^3 / 4\pi) (x_i / |\mathbf{x}|^2) \dot{D}_i(t - M_\infty |\mathbf{x}|) + \\ & (M_\infty^4 / 4\pi) (x_i x_j / |\mathbf{x}|^3) \ddot{Q}_{ij}(t - M_\infty |\mathbf{x}|) \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\dot{D}_i(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S n_j p_{ij}(y, t) dS(y) \quad (12)$$

$$\ddot{Q}_{ij}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T_{ij}(y, t) dy \quad (13)$$

$\dot{D}_i(t)$ 是由于固壁边界存在而引起的, 称为偶极子声源, $\ddot{Q}_{ij}(t)$ 是流动本身产生的, 称为四极子声源.

2.3 出口边界条件

对 Curle 积分解进行计算时, 式 (12) 在翼型表面进行面积分不存在任何问题. 但对式 (13)

在整个流场内进行体积分时，由于计算区域是有限的，故尾迹流场被人工截断。而在出口边界上，Lighthill 应力仍然相当大，突然截断会产生很强的非物理噪声，这些非物理声会掩盖真实的气动声。本文采用文献 [10] 提出的边界修正方法，将它应用于可压缩流动

$$\ddot{Q}_{ij}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T_{ij}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_0} U_e T_{ij}(\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) \quad (14)$$

式中第二项就是边界修正，积分域 S_0 为出口边界， U_e 为涡流出速度。

3 计算结果和讨论

3.1 偶极子声源

首先，根据 (12) 式计算偶极子声源 \dot{D}_i 。图 4(a) 和图 4(b) 分别为 $M_\infty = 0.5$, $Re = 10000$, 不同迎角 ($\alpha = 5^\circ$ 和 8°) 下的偶极子声源。其中 \dot{D}_1 是由阻力引起的，称为阻力偶极子， \dot{D}_2 是由升力引起的，称为升力偶极子。从图 4(a) 可以看出，当 $\alpha = 5^\circ$ 时，因为流动具有周期特性，偶极子声源也呈现周期特性。 \dot{D}_1 大小只有 \dot{D}_2 的 6% 左右。随着迎角增加，流动产生非周期性，偶极子声源同样有非周期特性，并且 \dot{D}_1 和 \dot{D}_2 振幅增加， \dot{D}_1 相对于 \dot{D}_2 的比例变大。

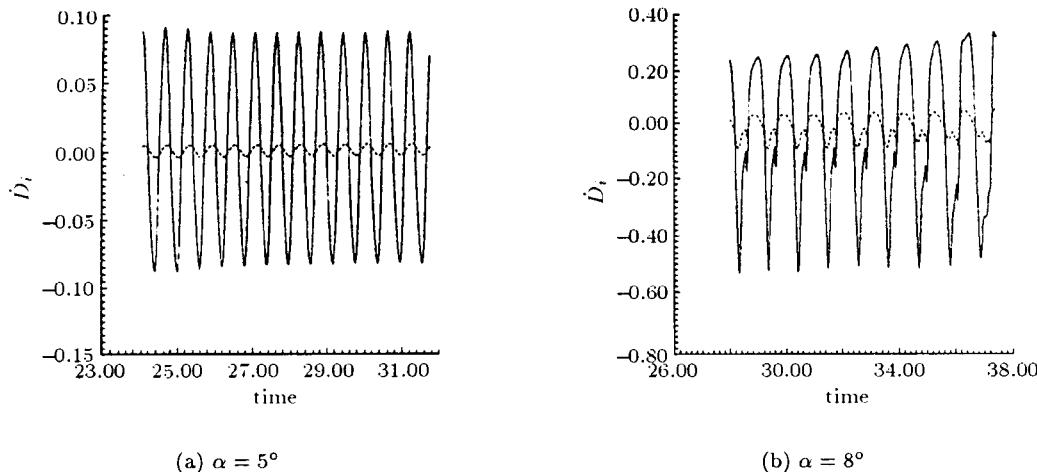


图 4 由 (12) 式计算所得的偶极子声源，--- 阻力偶极子声源 \dot{D}_1 , —— 升力偶极子声源 \dot{D}_2
Fig.4 Acoustic dipoles calculated from Eq. (12), --- drag dipole \dot{D}_1 , —— lift dipole \dot{D}_2

3.2 四极子声源

在具体计算中，四极子 \ddot{Q}_{ij} 分为三个不同的量： \ddot{Q}_{11} , \ddot{Q}_{12} 和 \ddot{Q}_{22} 。算例以 $M_\infty = 0.5$, $Re = 10000$, $\alpha = 5^\circ$ 为主。

为了检验出口边界修正公式 (14) 的有效性，我们采用两种计算区域， X_{exit} 为 4.1 和 3.9。图 5(a) 和图 5(b) 分别表示未经修正和修正后的 \ddot{Q}_{ij} 。可以看出，边界修正之前，不同计算域所得的 \ddot{Q}_{ij} 有很大的差异，经过边界修正后，两者的曲线除了有一相位差以外非常接近，这一相位差是由于延迟时间而引起的，大小接近 $M_\infty |\Delta x|$ 。

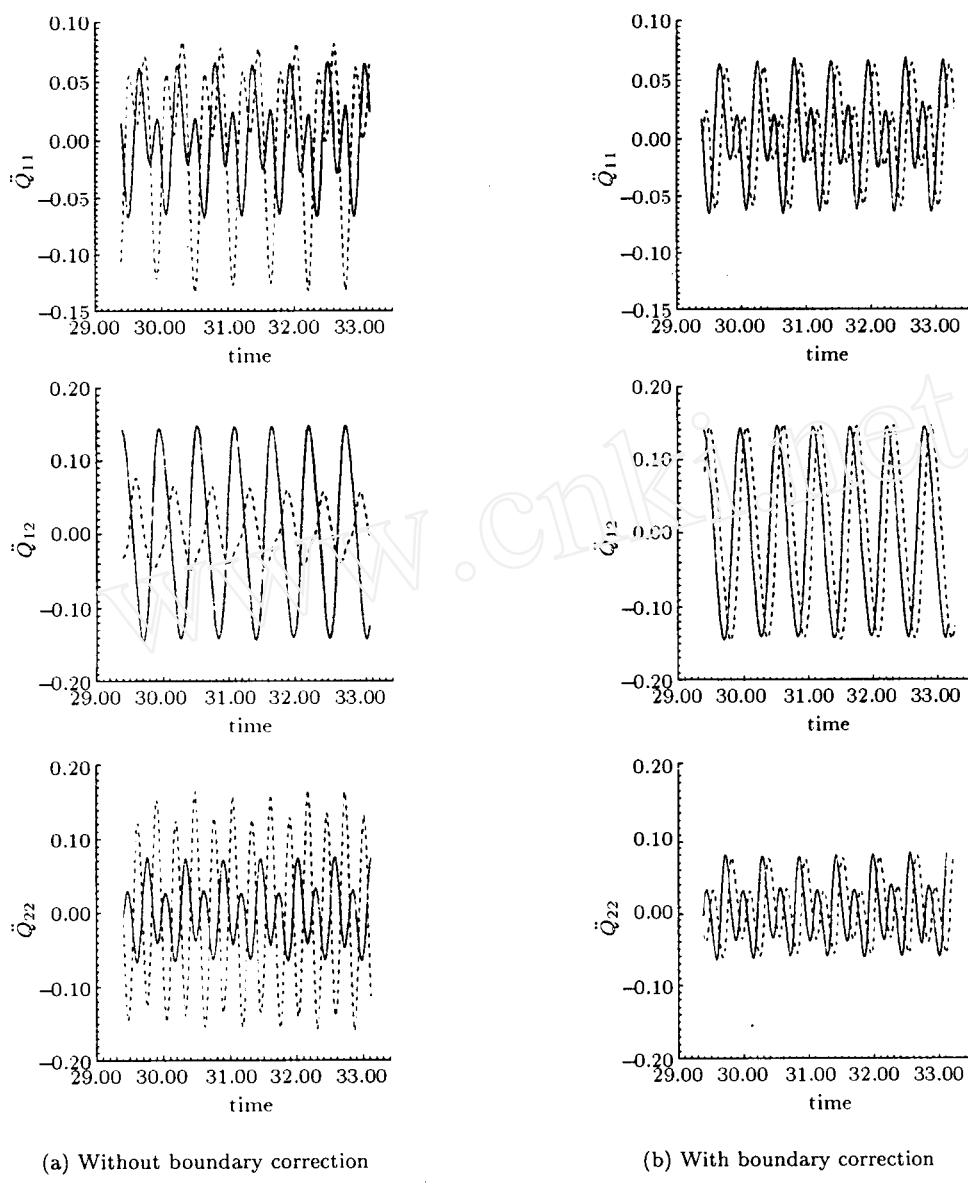


图 5 不同计算区域的 \ddot{Q}_{ij} , --- $X_{\text{exit}} = 3.9$, —— $X_{\text{exit}} = 4.1$, $\alpha = 5^\circ$

Fig.5 \ddot{Q}_{ij} calculated from different size source domains, --- $X_{\text{exit}} = 3.9$, —— $X_{\text{exit}} = 4.1$, $\alpha = 5^\circ$

3.3 远场声计算

利用(11)公式第一项,我们可以计算出由偶极子声源引起的远场密度变化 $\rho_d = \rho - 1$,再通过关系 $p_d = \gamma \rho_d$,就得到远场偶极子声压的变化.同样利用(11)式的第二项,可以计算出远场四极子声压 p_q .图6为远场 $|x| = 50$, $\theta = 30^\circ$ 处的四极子声压和偶极子声压变化.在低马赫数流动中,四极子噪声远小于由升力和阻力引起的偶极子噪声^[10],而从图6可以看出,当马赫数较大时,四极子噪声和偶极子噪声量级相同,不能被忽略.

为更好地比较偶极子声源和四极子声源在远场噪声中的比例,我们采用 Fourier 变换将时域

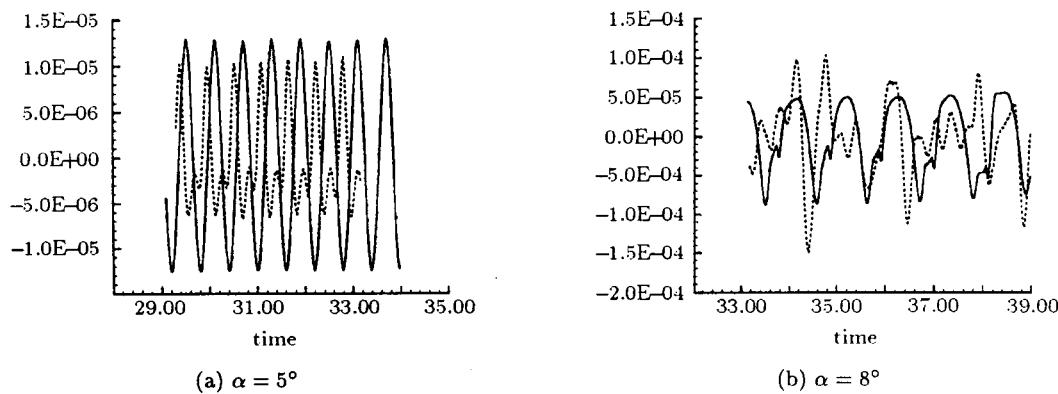
图 6 位于远场 $|x| = 50, \theta = 30^\circ$ 处的噪声声压, —— 偶极子声压 p_d , --- 四极子声压 p_q

Fig.6 Acoustic pressure at far field $|x| = 50, \theta = 30^\circ$,
— dipole acoustic pressure p_d , --- quadrupole acoustic pressure p_q

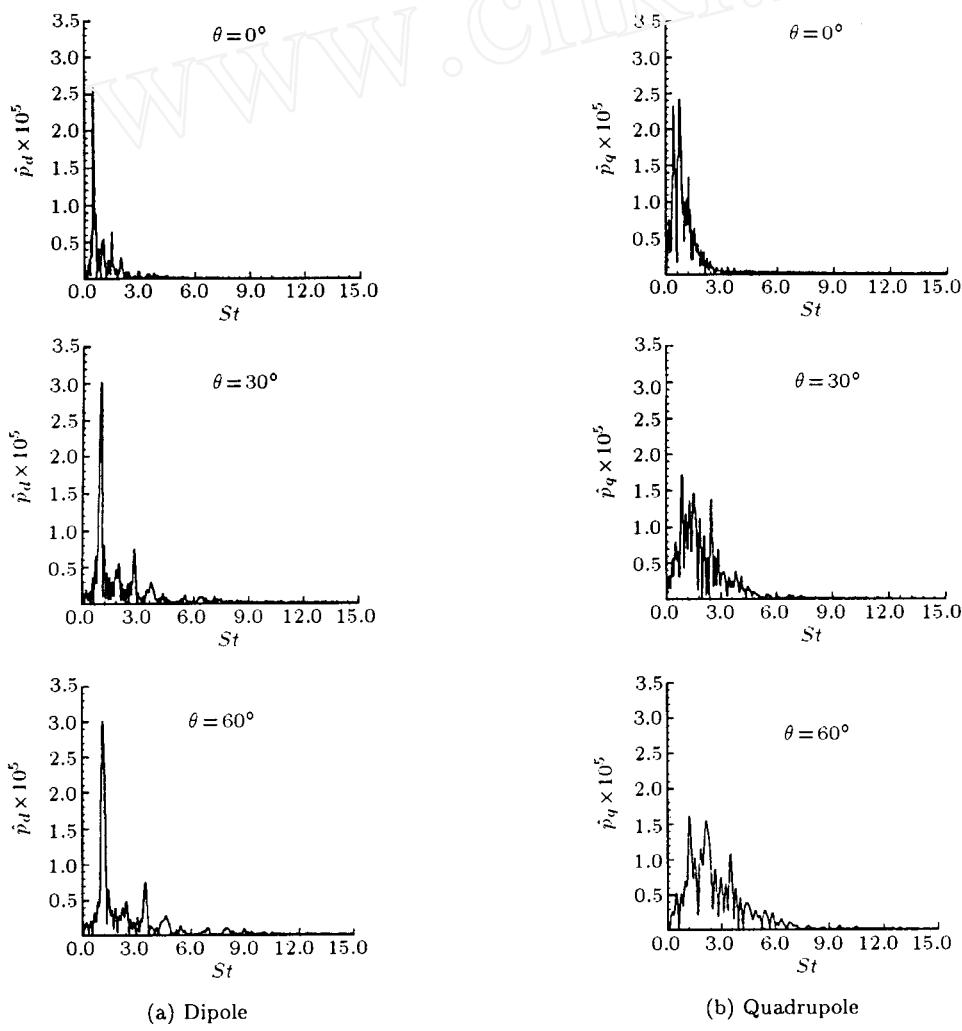
图 7 $\alpha = 8^\circ$ 时位于 $|x| = 50$, 不同 θ 角处的声压谱

Fig.7 Spectra of the acoustic pressure at $|x| = 50$ and different θ angle when $\alpha = 8^\circ$

曲线转化为频域曲线, 即声压随 Strouhal 数 $St = f\bar{U}_\infty/\bar{L}$ 变化的趋势。图 7 为 $\alpha = 8^\circ$; $|x| = 50$; θ 分别为 0° , 30° 和 60° 时, \hat{p}_d 和 \hat{p}_q 随 St 变化的曲线。图 7 显示, 随着 θ 角偏离主流方向, 偶极子声压 \hat{p}_d 的峰值向更高频率移动。四极子声压 \hat{p}_q 的峰值也向高频移动, 并且能量分布频率范围扩大。上述趋势和文献 [11] 关于射流噪声的结论一致。

4 结 论

本文首先从全离散的二维常系数矩阵 Euler 方程出发, 分析了几种差分格式的数值特性, 特别比较了格式的色散误差和各向异性效应; 认为迎风紧致格式具有较高的波数捕捉范围和较好的各向同性特征, 适于模拟包括多尺度、非定常的气动声问题。在此基础上采用三阶迎风紧致格式、四阶中心紧致格式和三阶 R-K 方法, 求解 N-S 方程, 数值模拟了二维翼型的非定常流场, 给出了近场声源的结果。其次, 运用 Lighthill 的声学比拟理论, 计算了存在固壁边界的非定常可压缩流动引起的气动声, 验证了适用于四极子声源计算的边界条件。结果表明, 当马赫数较大时, 由尾涡引起的四极子远场噪声和由物面非定常脉动压力所产生的偶极子噪声相比同样重要。

参 考 文 献

- 1 Lighthill MJ. On sound generated aerodynamically I. General theory. *Proc Roy Soc A*, 1952, 222(1107): 564~587
- 2 Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. *Proc Roy Soc A*, 1955, 231(1187): 505~514
- 3 Tam CKW. Computational aeroacoustics: Issues and methods. *AIAA J*, 1995, 33(10): 1788~1796
- 4 Fu Dexun, Ma Yanwen. High resolution schemes. In: Hafez M, Oshima K eds. *Computational Fluid Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1995. 234~250
- 5 Yu ST. Direct calculations of waves in fluid flows using high-order compact difference scheme. *AIAA J*, 1994, 32(9): 1766~1773
- 6 Lockard DP, Breiter KS, Atkins HL. High-accuracy algorithms for computational aeroacoustics. *AIAA J*, 1995, 33(2): 246~251
- 7 傅德薰主编. 计算空气动力学. 北京: 宇航出版社, 1994. 357~360 (Fu Dexun ed. *Computation Aerodynamics*. Beijing: Astronautics Publishing House, 1994. 357~360 (in Chinese))
- 8 Van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations. ICASE Rept. No.82-30, 1982
- 9 Cook PH, McDonald MA, Fireman MCP. Experimental data base for computer program assessment. AGARD-AR-138, 1979
- 10 Meng Wang, Lele SK, Moin P. Computation of quadrupole noise using acoustic analogy. *AIAA J*, 1996, 34(11): 2247~2254
- 11 Soh WY. Unsteady jet flow computation towards noise prediction. AIAA Paper-94-0138, Jan, 1994

NUMERICAL SIMULATION OF NOISE GENERATED BY FLOW PAST AN AIRFOIL USING ACOUSTIC ANALOGY¹⁾

Hu Guoqing Fu Dexun Ma Yanwen*

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

* (LHD, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract The numerical dispersion and anisotropic effects of several finite difference schemes are assessed by Fourier analysis from the full-discretized, two-dimensional model equations. It is found that there are three kinds of numerical waves propagating in the numerically dispersive medium, namely, the flow velocity waves and two acoustic waves superimposed on the flow velocity. The investigation shows that the upwind compact difference scheme suffers less significantly from the anisotropic effect than the symmetrical compact difference scheme with the similar accuracy and thus is more suitable for the simulation of aeroacoustic noise.

Acoustic analogy computations of vortex shedding noise are carried out in the context of a two-dimensional flow past a NACA0012 airfoil. The near-field flow governed by the compressible Navier-Stokes equations is solved by 3-order upwind compact difference scheme combined with 3-order Runge-Kutta method. The unsteady flow generates aeroacoustic dipole and quadrupole sources. The radiated far-field noise is calculated based one Curle's extension to the Lighthill analogy. A method for reducing the spurious noise caused by eddies crossing the exit boundary is checked. Numerical results confirm that the quadrupole noise cannot be neglected compared with the noise due to lift and drag dipoles when the freestream Mach number is high. The far-field sound pressure has the directivity and spectra show that low frequency peaks shift toward higher frequency regions as the observation angle diverges from the flow direction.

Key words aeroacoustics, numerical simulation, acoustic analogy, compact difference scheme, airfoil

Received 10 March 1999, revised 7 December 1999.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19872069) and the National Climbing A Pre-selected Projects of Department of Science and Technology.