

# 一种易于并行求解 Euler 方程组的分区技术

胡宗民, 张德良\*, 张嘉华

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要: 在具有复杂边界的计算区域内, 求解偏微分方程组时, 经常需要分区和并行计算, 分区方法直接关系到数值计算的并行化程度, 本文在应用时间算子分裂方法求解 Euler 方程组的过程中, 提出了一种非常容易实现并行化计算的分区技术。

关键词: 并行; 分区; CFD

中图分类号: O35 文献标识码: A

## 1 引言

在 CFD 中, 分区计算的基本思想就是根据问题的特征将总计算区域划分为若干子区, 对各子区分别建立网格和设置初值及边界条件, 然后在各子区网格上独立求解流体力学方程。此分区算法的关键问题是各子区之间公共边界(内边界)的数据通讯。一个很简单的例子是激波绕射后台阶问题, 如图 1, 其计算区域通常分为两个子区  $a$  和  $b$ , 内边界为  $AB$ , 分区并行计算时在同一时间层上,  $a$  和  $b$  两区在公共边界  $AB$  上需要数据传递。从这个方面讲,  $a$  和  $b$  两区的计算并没有完全独立。

在求解一些具有复杂边界(直线边界)的非定常的工程问题时, 使用以上分区方法是非常困难的, 甚至无法实施。但是如果问题可以应用分裂算法来求解, 就可以应用本文的分区方法——独立分区法, 这一分区方法不再需要专门处理子区之间

的数据传递。

## 2 独立分区方法

所谓分裂算法就是在空间离散求解时, 在各空间方向上分别独立计算, 然后“叠加”, 如下式  $U^{t+1} = L_x L_y U^t$  算子分裂求解为

$$U^{t+1/2} = L_y U^t, \quad U^{t+1} = L_x U^{t+1/2}$$

其中  $L_x$  和  $L_y$  分别是  $x$  和  $y$  方向的差分算子, 如果有源项, ( $U^{t+1} = SL_x L_y U^t$ ) 分裂计算中再加上源项积分算子, 其中  $S$  为源项积分算子。既然在求解过程中, 不同计算方向分别独立进行, 那么在计算区域中不同计算方向上也可以独立分区。例如激波绕射后台阶问题, 如图 2 和图 3, 可以在  $x$  和  $y$  方向上把计算区域分别划分为  $x_a, x_b$  和  $y_a, y_b$  各两个区, 分别对应  $x$  和  $y$  两个空间差分算子的计算。这种分区方法使得所有子区的计算包括初始条件和边界条件的计算都是独立进行的, 因而没有数据交叉传递等影响并行化程度的缺陷。计算区域越是复杂, 分区越多, 这种分区方法的优点就越突出。这就是独立分区方法, 计算实例表明, 这是一个简单可行的

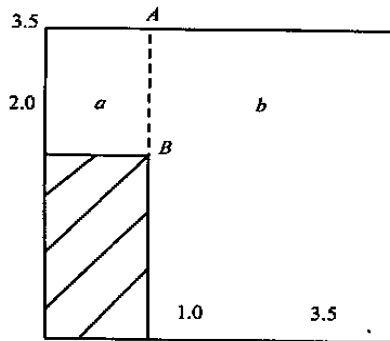


图 1 后台阶问题计算区域

Fig.1 Computational domain for back-facing step problem

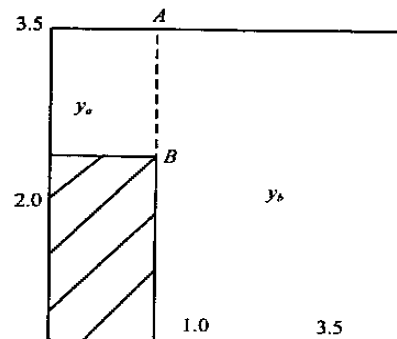


图 2 后台阶问题 y 向分区

Fig.2 Divided zone in y-direction

收稿日期: 2002-05-27; 修改稿收到日期: 2002-07-08.

基金项目: 国家自然科学基金; 中国工程物理研究院 (102756035) 联合资助项目.

作者简介: 胡宗民(1970-), 男, 博士生;

张德良\*(1939-), 男, 教授.

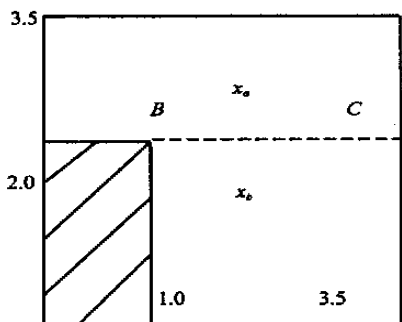


图 3 后台阶问题 x 向分区  
Fig.3 Divided zone in x-direction

稳定性好的分区方法。以下将以几个求解 Euler 方程的算例来验证这种分区方法的可靠性和实用性。

### 3 控制方程和数值方法

本文的算例应用无粘理想气体的 Euler 方程, 二维平面和轴对称坐标系中 Euler 方程组为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} + \frac{i}{y}S(U) = 0 \quad (1)$$

其中各列向量分别为

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{bmatrix}$$

$$G(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ v(e + p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

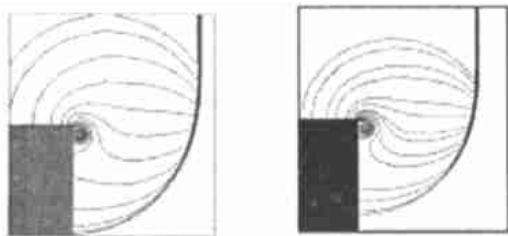


图 4 Ms=1.2 a:(TVD)密度等值线 b:(DCS)密度等值线 c:数值干涉条纹 d:实验干涉条纹<sup>[9]</sup>  
Fig.4 Ms=1.2 density contour a:(TVD) b:(DCS) interferogram c:numerical d:experimental<sup>[9]</sup>

对二维平面模型  $i = 0$ , 二维轴对称模型  $i = 1$ . 未知量为密度  $\rho$  速度分量  $u$  和  $v$ 、单位体积总能  $e$ , 压力为  $p$  通过理想气体状态方程导出:

$$p = (\gamma - 1) \left( e - \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (3)$$

为验证本文的分区方法对数值格式的适用性, 以下算例分别应用两种数值差分方法, 一种是显式迎风 TVD 格式<sup>[11]</sup>, 另一种是频散可控格式<sup>[12]</sup>, 这两种格式在消除间断解附近的非物理振荡时是从两个方向进行的, 两者都从差分格式的截断误差出发, 但是前者是基于耗散控制的, 而后者则是基于色散(频散)控制的, 对于后者, 本文以下部分简称之为 DCS 格式。

### 4 算例验证

#### 算例 1 后台阶问题

对后台阶问题, 按照  $\lambda$  射激波马赫数  $M_s = 1.2$  和  $M_s = 2.33$  进行计算。在初始时刻, 将激波波阵面置于台阶的拐角位置, 在激波波阵面左侧根据激波马赫数赋值后气体参数, 在激波波阵面右侧气体静止, 初始时刻参变量导数为零。在上、下边界给定反射边界条件, 而在左、右边界则为无反射边界条件。计算区域的分区如图 2 和图 3 所示。结果如图 4 和图 5。

#### 算例 2 激波在楔面绕射——斜线边界

为了验证独立分区方法对斜线边界的适用性, 对入射激波  $M_s = 2$  在楔面绕射进行计算, 如图 6, 双点划线为  $x$  向分区界线, 虚线为  $y$  向分区界线。

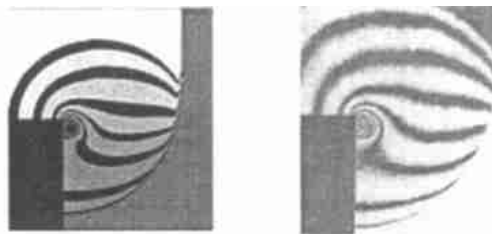


图 5 Ms=2.33 激波后台阶绕射 a:(DCS)密度等值线 b:数值纹影 c:实验纹影<sup>[9]</sup> d&e:(TVD)  
Fig.5 Ms=2.33 a:(DCS) density contour schlieren b:numerical c:experimental<sup>[9]</sup> d&e:(TVD)

计算区域的网格根据楔面角度进行调整, 使得楔面上的所有点落在网格点上。计算和实验结果如图 7。其中楔角为 46 度。

算例 3 超音速楔面绕流  $M = 4$

本算例的计算区域是算例 2 的计算区域上下对称得到的, 初始条件与算例 2 不同, 在全流场给马赫数为 4 的超音速流。得到的结果如图 8 和图 9。图 8 中楔角为 38 度, 由规则反射向复杂马赫反射转变, 而图 9 中的楔角为 24 度, 为规则反射。

算例 4 激波在变截面圆管内传播 —— 有源项的情况

对于有源项的轴对称坐标系下的 Euler 方程组, 分别对  $x$  向差分算子、 $y$  向差分算子、源项积分算子进行分别计算, 得到的结果如图 11 和图 12, 计算区域划分如图 10 所示。

算例 5 激波在 Baffle 系统中传播

一个较为复杂的算例是激波在具有阻尼板的 Baffle 消波系统中传播和诱导波涡相互作用问题。图 13 是文献中的实验结果给出的纹影图以及应用本文的分区方法和 DCS 数值格式得到的数值结果, 两者吻合得很好。

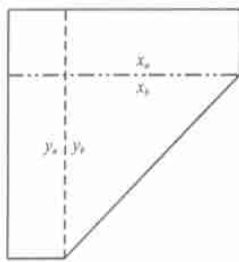
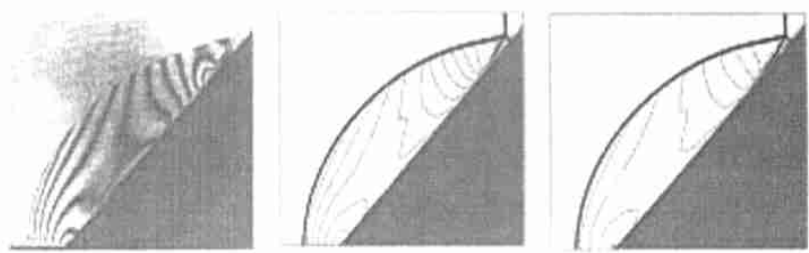
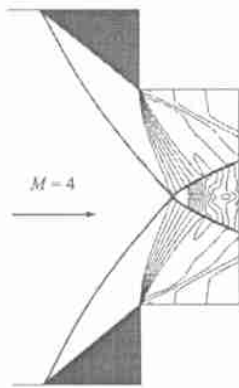


图 6 激波楔面绕射计算区域  
Fig.6 Computational domain for shock wave reflection over a wedge

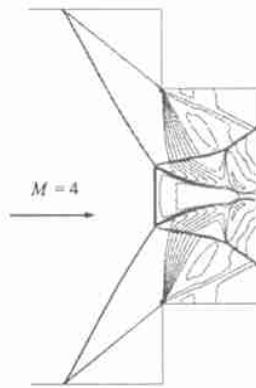


(a) 实验干涉条纹  
(b) (DCS) 密度等值线  
(c) (TVD) 密度等值线  
(a) Experimental interferogram density contour  
(b) (DCS) Density contour  
(c) (TVD) Density contour

图 7 激波楔面反射  
Fig.7 Shock wave reflection over a wedge



(a) (DCS) 规则反射  
(a) (DCS) RR



(b) (DCS) 马赫反射  
(b) (DCS) MR

图 8  $M=4$  超音速绕流  
Fig.8  $M=4$  Supersonic flow diffraction

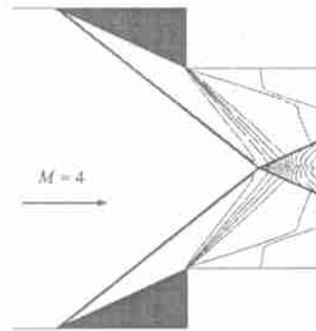
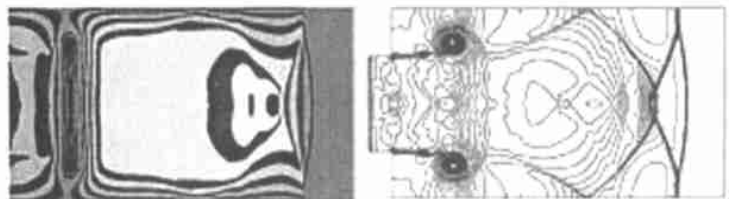


图 9  $M=4$  超音速绕流 (TVD) 规则反射  
Fig.9  $M=4$  Supersonic flow diffraction (TVD) RR



图 10 半计算区域  
Fig.10 Computational domain



(a) 数值干涉条纹  
(b) 密度等值线  
(a) Numerical interferogram  
(b) Density contour

图 11  $Ms=1.3$  激波在变截面管内传播 (DCS)  
Fig.11  $Ms=1.3$  Changing section (DCS)

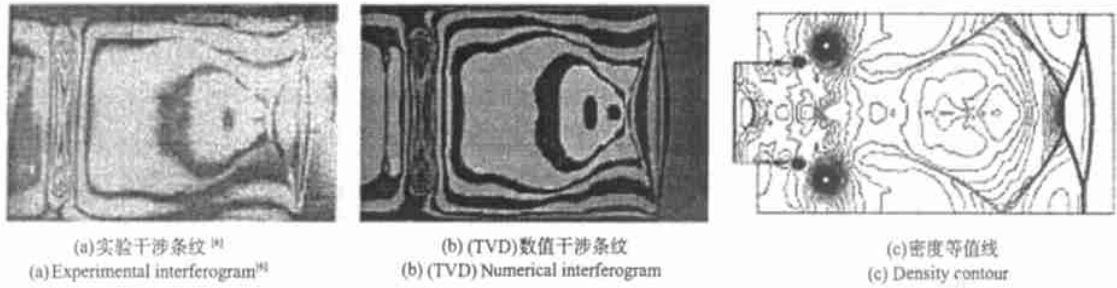


图12  $Ms=1.3$ 激波在变截面管内传播  
Fig.12  $Ms=1.3$  Changing section

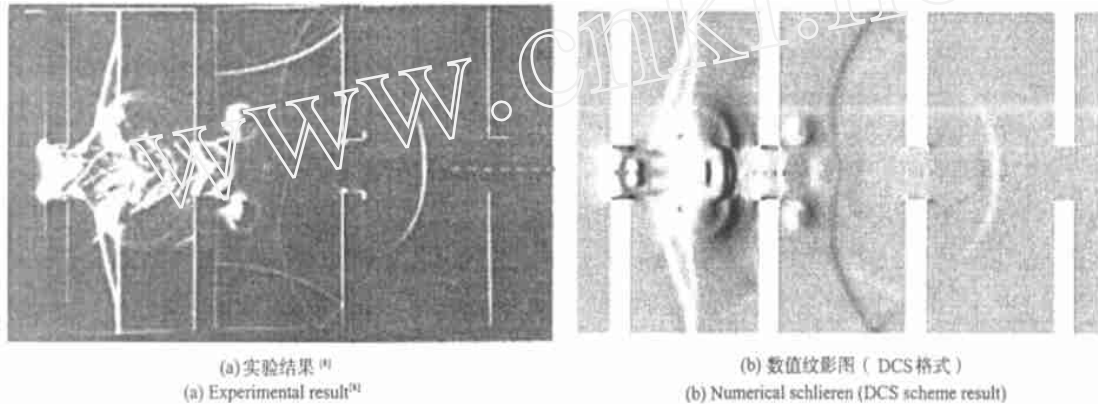


图13 纹影图  
Fig.13 Schlieren photo

## 5 结论

本文通过对五个算例的计算,并结合实验结果验证了文中提出的分区方法的可行性和可靠性,同时在计算时分别应用了两种不同的差分格式以证实此分区方法对差分格式的适用性,由计算结果可以看出,这种分区方法是合理的。应用本文分区方法,可以实现良好的并行化计算,特别是对计算区域比较复杂的工程问题,此方法是实用的,便于实施的,而且这种方法也能容易推广到三维问题的计算。

## 参考文献(References):

- [1] Yee H C, Warming R F, Harten A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady state calculations[J]. *AIAA Paper*, 1983: 83-1902
- [2] Zong L injiang, Kazuyoshi Takayama, Chen Yao-song Dispersion conditions for non-oscillatory shock Capture schemes and its applications [J]. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 1995, 4(2): 137-150
- [3] Matsuo K, Aoki T, Kashimura H. Diffraction of a shock wave around a convex corner[A]. *Proc 17th Intl Symp. on Shock Waves and Shock Tubes*[C], AIP: 1990 252-257.
- [4] Hiller. Computation of shock wave diffraction at a ninety degree convex edge[J]. *Shock Waves* 1991, 1: 89-98
- [5] Takayama K, Jiang Z. Shock wave reflection over wedges: a benchmark test for CFD and experiments [J]. *Shock Waves*, 1997, 7: 191-203
- [6] Jiang Z, Takayama K, Babinsky H, et al Transient shock wave flows in tubes with a sudden change in cross section [J]. *Shock Waves*, Springer Verlag, 1997, 7: 151-162
- [7] Kleine H, Ritzerfeld E, Gronig H. *Shock Wave Diffraction-new Aspects of Old Problem* [M]. *Shock Waves @ Marella IV*, Springer Verlag Heidelberg 1995
- [8] Krehl P, et al Flash lighting instrumentation for color schlieren shock wave photograph [J]. *Shock Waves*, 1995, 4: 195-207.

## A divided-zone method for parallel computation of Euler equations

Hu Zongmin, Zhang Deliang\*, Zhang Jiahua

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract** Divided-zone technology is always needed in CFD parallel computation, particularly for those problems with complex geometry flow fields. The properties of divided-zone determine the realization of parallel calculation, as well as the CPU time consumed by the calculation. In this paper, a new divided-zone method was brought forward firstly. Different zone decomposition were used for the calculation in  $x$  and  $y$  directions, so this method can be applied to CFD problem solution with the time fractional calculation technology. Using this method the calculation need not pay particular attention to the data transfer process between conjoint zones as needed by traditional divided-zone method. Then five cases were calculated to implement this divided-zone method. Numerical results were also compared with experimental results to make verification and validation. The nice agreement shows that this method is reasonable and valid. This method can be easily applied to solve inviscid CFD problems with parallel computation technology.

**Key words:** parallel computation; divided-zone method; CFD