

文章编号:1672-3961(2006)03-0100-03

库仑材料平面轴对称问题极限分析

崔新壮^{1,2}, 金青¹, 商庆森¹

(1. 山东大学 土建与水利学院, 山东 济南 250061; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

摘要:根据塑性流动正交法则确定了库仑材料平面轴对称问题上限分析所需的速度场,提出了用体积应变率求解变形区内部能量耗散率的一般方法.对厚壁圆筒的轴对称渗流问题进行了求解,得到了渗透力场.用上限法对渗透力作用下的厚壁圆筒进行了极限分析,发现上限解与精确解相同.

关键词:库仑材料;平面轴对称;极限分析;上限法

中图分类号: O344.5 **文献标识码:** A

Limit analysis of plane axial symmetry problem for Coulomb materials

CUI Xin-zhuang^{1,2}, JIN Qing¹, SHANG Qing-sen¹

(1. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China;
2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The velocity field in upper-bound analysis of plane axial symmetry problem for Coulomb materials is established according to the normal plastic flow rule. The general solving method of internal energy dissipation rate in terms of bulk stain rate in deforming region is presented. The axial symmetry permeation problem of thick-walled cylinder is solved and the permeating force field is obtained. The stability of thick-walled cylinder under permeating force is analyzed with upper-bound method and the upper-bound solution is found the same as the true solution.

Key words: Coulomb materials; plane axial symmetry; limit analysis; upper-bound method

0 引言

极限分析理论是塑性理论的一个重要分支,它首先从金属塑性理论的课题发展而来,现在已推广到岩土力学中,被用来求解边坡稳定性及桩的承载力等实际问题^[1~4].极限分析包括上限法和下限法两种基本方法,其中上限法应用最广泛.在用上限法求解问题时,首先假设一种有效的破坏机构,然后计算内部能量耗散率与外荷载所做的外功率,并令两者相等,得到某特定假想机构对应的上限解,最后借助优化方法求出最优上限解^[1].

岩土等地质材料及混凝土等建筑材料,其本构关系可用莫尔-库仑理想弹塑性模型来描述,这类材料称为库仑材料.许多由库仑材料建成的工程体,其几何尺寸及受力状态在分析时都可近似看作是平面轴对称的,如过水涵洞、高压输油管道等.对这类平面轴对称问题进行稳定性分析时,一般仅进行弹塑性分析,而很少有人借助极限分析方法.

本文将推导平面轴对称问题极限分析所需的速度场,提出一种求解变形区内部能量耗散率的一般方法,并通过实例说明平面轴对称问题极限分析的过程.

收稿日期:2005-06-06

基金项目:国家973项目(2002CB412706)和国家自然科学基金项目(10372104)资助

作者简介:崔新壮(1974-),男,山东寿光人,讲师,于中国科学院力学研究所获工程力学博士学位.

E-mail: cuixz@sdu.edu.cn

1 平面轴对称问题的速度场

在极坐标系中,设环向速度为 V_θ ,径向速度为 V_r . 因为轴对称,所以有 $V_\theta = 0$. 已知速度场,由几何方程可得张量应变率场为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{dV_r}{dr} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{V_r}{r} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

因剪应变率为零,故 $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta$ 为主应变率. 轴对称问题一般是径向受压,若以拉为正,则最大主应变率 $\dot{\epsilon}_{max}$ 和最小主应变率 $\dot{\epsilon}_{min}$ 分别为 $\dot{\epsilon}_r$ 和 $\dot{\epsilon}_\theta$.

对库仑材料,若塑性流动符合正交法则,则^[1]:

$$\dot{\epsilon}_{min} = -\dot{\epsilon}_{max} \tan^2\left(\frac{\phi}{4} - \frac{\phi}{2}\right), \quad (2)$$

式中: ϕ 为材料的内摩擦角.

设 $A = 1 - \tan^2\left(\frac{\phi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$, 则由式(1), (2)可得:

$$\frac{dV_r}{dr} = (A - 1) \frac{V_r}{r}, \quad (3)$$

对上面方程进行求解可得:

$$V_r = Cr^{A-1}, \quad (4)$$

式中: C 为积分常数.

对相关库仑材料的平面轴对称问题,式(4)所示的速度场是唯一的.

2 内部能量耗散率

对塑性变形破坏区单位体积的内部能量耗散率,Chen W F^[1]曾给出了用主应变率表示的表达式:

$$\dot{E} = 2c \sqrt{1 - A} \dot{\epsilon}_r, \quad (5)$$

式中: c 为材料的粘聚力; $\dot{\epsilon}_r$ 为主应变率中拉应变率之和(应变率以拉为正).

但是,由速度场及几何方程直接得到的应变率场一般并不是主应变率场,特别对三维情形. 这将为上限法的实施带来很大困难,从而限制了变形破坏机构的应用. 下面将通过理论推导提出一种求解变形区内部能量耗散率的一般方法.

假设变形区速度场为 $\{V_x, V_y, V_z\}$, 则由几何方程可得塑性正应变率 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z$. 在正交坐标系下有:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_t + \dot{\epsilon}_c, \quad (6)$$

式中: $\dot{\epsilon}_v$ 为体积应变率; $\dot{\epsilon}_i (i = 1, 2, 3)$ 为塑性主应变率; $\dot{\epsilon}_c$ 为主应变率中压应变率之和.

对塑性流动符合正交法则的库仑材料,有如下关系式成立^[1]:

$$(1 - A) \dot{\epsilon}_t + \dot{\epsilon}_c = 0. \quad (7)$$

若 $\phi = 0$, 上式即成为熟知的 Tresca 材料的体积不可压缩条件.

将式(6)与式(7)联立可求得:

$$\dot{\epsilon}_t = \frac{\dot{\epsilon}_v}{A}. \quad (8)$$

由式(5), (8)可得变形区单位体积的内部能量耗散率为:

$$\dot{E} = c \cot \phi \dot{\epsilon}_v. \quad (9)$$

上式说明:对库仑材料,内部能量耗散率可以用塑性体积应变率来表示. $c \cot \phi$ 是莫尔-库仑屈服准则对应的主应力空间内六面锥的顶点坐标.

由式(1), (4)及(9)可得平面轴对称问题对应的单位体积的内部能量耗散率为:

$$\dot{E} = C c \cot \phi A r^{A-2}. \quad (10)$$

3 外力功率

外力功率就是指外力在其作用方向上所做的功率. 外力一般包括外载荷与体力. 在有渗流作用时,一般用有效应力法进行分析,若不考虑重力,此时材料骨架(如土骨架)受到的体力就是渗透力.

4 有渗流厚壁圆筒问题的极限分析

下面将以厚壁圆筒问题为例,说明上限分析方法在平面轴对称问题稳定性分析中的应用.

设一由多相介质做成的厚壁圆筒,内外径分别为 r_a, r_b , 内外表面所受压力分别为 p_a, p_b , 内外表面上的水压力 u 分别为 u_a, u_b , 如图 1 所示. 因为 $u_a > u_b$, 所以存在由内向外的渗流. 在用有效应力法进行分析时,若不考虑重力,那么土骨架受到的体力仅是渗透力.

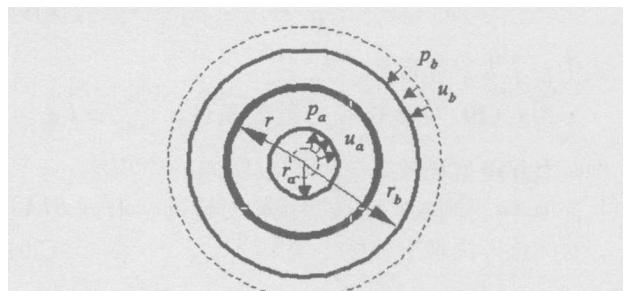


图 1 厚壁圆筒

Fig. 1 Thick-walled cylinder

在半径为 r 处取一环状微元体,如图 1 所示.对该微元体,根据达西定律有:

$$Q = -ki \cdot 2\pi r = -k \frac{du}{dr} \cdot 2\pi r. \quad (11)$$

式中: Q 为进出圆筒水的流量; k 为材料渗透系数; i 为微元体内的径向水力梯度.

对式(11)进行求解得:

$$u = -\frac{Q}{2k} \ln r + C_1. \quad (12)$$

式中: C_1 为积分常数.

由式(12)及边界条件 $u|_{r=a} = u_a$, $u|_{r=b} = u_b$ 得:

$$Q = 2k \frac{u_b - u_a}{\ln(r_b/r_a)}. \quad (13)$$

由多相介质力学及式(12), (13)得水对土骨架的渗透力为:

$$G = -i_w = \frac{w}{r} \frac{u_b - u_a}{\ln(r_b/r_a)}. \quad (14)$$

式中: w 为水的容重.

令 $B = \frac{u_b - u_a}{\ln(r_b/r_a)} w$, 则式(14)成为:

$$G = \frac{B}{r}. \quad (15)$$

已知渗透力,我们想知道的是圆筒在什么样的载荷组合情况下完全屈服,下面将分别求该问题的精确解与上限解,并对它们进行比较.

4.1 精确解

因为圆筒完全屈服,所以每点处的有效应力必须满足莫尔—库仑屈服条件:

$$\sigma_r = (1 - A) \sigma_\theta + 2c \sqrt{1 - A}. \quad (16)$$

另外,还要满足平衡方程:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + G = 0. \quad (17)$$

由式(16), (17)可得:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{A\sigma_r - 2c\sqrt{1-A} + B}{r} = 0. \quad (18)$$

用常数变易法解以上微分方程得:

$$\sigma_r = \frac{2c\sqrt{1-A} - B}{A} + \frac{C_2}{r^A}. \quad (19)$$

式中: C_2 为积分常数.

由式(19)及有效应力边界条件 $\sigma_r|_{r=a} = (u_a - p_a)$, $\sigma_r|_{r=b} = (u_b - p_b)$ 可得:

$$(p_a - u_a) a^A - (p_b - u_b) b^A = (b^A - a^A) (c \cot \phi - B/A).$$

(20)

4.2 上限解

内部能量耗散率为:

$$\dot{D} = \iint_V \dot{\epsilon} r dr = 2\pi \cdot C \cot \phi (b^A - a^A). \quad (21)$$

外力功率包括作用在土骨架上的面力 $p_a - u_a$ 与 $p_b - u_b$ 所做功率之和 \dot{W}_1 及渗透力所做功率 \dot{W}_2 .

$$\dot{W}_1 = 2\pi [a(p_a - u_a) V_r|_{r=a} - b(p_b - u_b) V_r|_{r=b}] = 2\pi \cdot C [(p_a - u_a) a^A - (p_b - u_b) b^A]. \quad (22)$$

$$\dot{W}_2 = \iint_V \dot{w}_r r dr = 2\pi CB (b^A - a^A)/A. \quad (23)$$

根据上限定理^[1],令内部能量耗散率与外力功率相等,可得上限解,而且发现上限解的表达式与式(22)完全相同,即上限解为精确解.这说明用上限法求解平面轴对称问题不仅简单,而且有效.

5 结论

根据塑性流动正交法则确定了库仑材料平面轴对称问题应满足的速度场,提出了一种用体积应变率求解内部能量耗散率的方法.对厚壁圆筒的轴对称渗流问题进行了求解,得到了水对土骨架的渗透力.用上限法对渗透力作用下的厚壁圆筒进行了极限分析,发现上限解与精确解相同,即由上限法得到的平面轴对称问题的上限解即为精确解.

参考文献:

- [1] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Publishing Co., 1975. 43-45.
- [2] CHEN Z Y, WANG X G, HABERFIELD C, YIN J H, WANG Y J. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem: part I: theory and methods[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38:369-378.
- [3] CHEN Z Y, WANG J, WANG Y J, YIN J H, HABERFIELD C. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem: part II: numerical approaches, applications and extensions[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38:379-397.
- [4] MURFF J D, HAMILTON J M. P-ultimate for undrained analysis of laterally loaded piles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 119(1):91-107.

(编辑:董程英)