

比较两种模型下饱和土的动态响应*

林 緬

(中国科学院力学研究所工程科学部, 北京 100080)

摘要 比较 Biot 和 Yamamoto 两种模型下饱和土的动态响应, 指出了这两种土模型的特点. 首先从土骨架和孔隙水所满足的运动方程出发分析了两种土模型所反映能量损耗, 然后计算了粗砂质和细砂质土层内弹性波随加载频率及土参数的衰减规律, 总结了黏性摩擦和 Coulomb 摩擦在两种模型中具体体现, 最后讨论了当加载为海浪时, 两种模型对应的波浪衰减特点以及土床内孔隙水压力和应力相位角随孔隙度、渗透系数、黏性系数及剪切模量等土参数的变化.

关键词 海洋土模型 波衰减 应力场相位角

关于海洋土动态响应问题是近些年海洋工程界关注的热点话题. 在水动力学领域, 有关波浪运动的理论研究大都假设底床为固壁, 得到的参数(如波长)没有考虑波浪和底床相互作用的影响. 而在土力学界, 一些工程师参照 Zienkiewicz 判别准则^[1], 认为风浪作用下海洋土的动力响应属于慢荷载, 无需进行动力分析. 然而在实际工程实践中发现, 一些海工建筑物的坍塌并不是由于其本身结构的问题, 而是因为没有考虑波浪作用下所带来的底床失稳^[2,3]. 另外还发现一些现场实测数据和理论结果不符, 无法用静态模型或准动态模型解释^[4-6]. 因此, 近几年人们开始越来越重视海洋土动态响应的研究^[7, 8], 常见的海洋土模型有两种: Biot 模型^[9]和 Yamamoto 模型^[10]. 本文将重点讨论这两种土模型在波浪作用范畴下的特点, 为在实际应用中选择恰当的土本构关系提供参考依据.

1 两种模型基本方程的比较

海洋土是一个复杂的三相体, 固态(土骨架)和液态(孔隙水)以及孔隙中的少量气体. 当波浪在底床上传播时, 孔隙水压力梯度使得孔隙水有相对于土骨架的位移, 同时孔隙水的作用还使得土骨架变形. 这样水和土颗粒之间的黏性摩擦以及土颗粒之间的库仑摩擦消耗了波能量. 因此研究波浪和海洋土之间的动态响应, 涉及到的基本问题就是怎样考虑孔隙水和土颗粒间以及土颗粒之间的相互作用.

Biot 模型的特点在于, 假设土体具有统计各向同性且均匀, 其中孔隙相互连通, 孔隙尺寸远小于波长, 土骨架为理想弹性多孔介质, 土体可压缩并且可变形. 孔隙流体可压缩, 其流动服从广义 Darcy 定律, 并且考虑了土中固液两相的惯性耦合和黏性耦合. 这些特点可以说基本上囊括了土在静态时的基本概貌, 而在动态情况下, 又充分考虑到能量在土体中传播时的损耗. 当考虑土骨架和孔隙水有相对位移时其耦合波动方程可表述为:

2002-06-28 收稿, 2002-08-22 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 40176027)

$$\begin{cases} G\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\varepsilon^2M+G)\nabla e-\varepsilon M\nabla\zeta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho\mathbf{u}+\rho_f\mathbf{w}) \\ M\nabla(\varepsilon e-\zeta)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_f\mathbf{u}+m\mathbf{w})+\frac{\eta_f}{k_s}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\rho=(1-\beta)\rho_r+\beta\rho_f$, ρ 为饱和土总密度, ρ_r, ρ_f 分别为土颗粒和孔隙水密度, β 为土体的孔隙度; $\zeta=-\beta\nabla\cdot(\mathbf{U}-\mathbf{u})$ 为流体的相对膨胀比, \mathbf{U} 和 \mathbf{u} 分别为孔隙水和土骨架位移; $e=\nabla\cdot\mathbf{u}$ 为土骨架的体积应变; $\mathbf{w}=\beta(\mathbf{U}-\mathbf{u})$, \mathbf{w} 为流体相对于土骨架的位移; $\varepsilon=i-K_r/K_r$, 表征土的压缩性, K_r 和 K_s 分别为土颗粒和土骨架的体积模量; $M=K_r^2/[K_r[1+\beta(K_r/K_f-1)]-K_s]$, 表征孔隙流体压缩性, K_f 为孔隙流体的体积模量; $\lambda=2\nu G/(1-2\nu)$ 为固体土骨架(干土状态)的 Lamé 常数, G 为剪切模量; η_f 和 k_s 分别为流体黏滞系数和渗透系数。

由于方程组(1)过于复杂,在实际应用中人们均采用简化模式。如:准静态模型^[11],这种模型既没有考虑土颗粒的惯性也没有考虑孔隙水的惯性;准动态模型^[12],该模型只是考虑土颗粒的惯性,或者只考虑孔隙水的可压缩性。为了更好地和 Yamamoto 模型进行比较,了解各个物理量所起作用,我们这里采用没有简化的模型,即完全考虑孔隙水惯性及土颗粒之间的相对运动。

Yamamoto 首先提出了具有库仑摩擦的多孔弹性介质模型。当考虑土骨架和孔隙水可压缩时,土骨架和孔隙水所满足的动力学方程为:

$$\begin{cases} \tilde{\mu}\nabla^2\mathbf{u}+(\tilde{H}-\tilde{\mu})\nabla e-\tilde{C}\nabla\zeta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho\mathbf{u}+\rho_f\mathbf{w}) \\ \nabla(\tilde{C}e-\tilde{M}\zeta)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_f\mathbf{u}+m\mathbf{w})+\frac{\eta_f}{k_s}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

该模型考虑了土颗粒之间摩擦引起的弱非线性衰减,所描述的行为类似于黏弹性材料。

为便于比较方程组(1)和(2),表 1 列出了两种模型中各个参数的表达式。

表 1 两种模型所用参数比较

Biot 模型	Yamamoto 模型
剪切模量 G	复剪切模量 $\tilde{\mu}=G(1+i(\Delta w/w)_s/2\pi)$
土骨架体积模量 K_s	复体积模量 $\tilde{K}_s=K_s(1+i(\Delta w/w)_c/2\pi)$
$C=\varepsilon M=\frac{K_s(K_r-K_s)}{K_r[1+\beta(K_r/K_f-1)]-K_s}$	$\tilde{C}=\frac{K_s(K_r-\tilde{K}_s)}{K_r[1+\beta(K_r/K_f-1)]-\tilde{K}_s}$
$H=\lambda+\varepsilon^2M-2G=\frac{(K_r-K_s)^2}{K_r[1+\beta(K_r/K_f-1)]-K_s}+\frac{2-2\nu}{1-2\nu}G$	$\tilde{H}=\frac{(K_r-\tilde{K}_s)^2}{K_r[1+\beta(K_r/K_f-1)]-\tilde{K}_s}+\frac{2-2\nu}{1-2\nu}G+i[G(\Delta w/w)_s+K_s(\Delta w/w)_c]/2\pi$
$m=\frac{\rho_f}{\beta}$, 为与土骨架有关的参数	$m=\frac{\rho_f}{\beta}(1+\alpha)$, α 为附加质量系数

其中, $(\Delta w/w)_s$ 和 $(\Delta w/w)_c$ 分别为循环剪切和循环压缩能量损失比。

由表 1 可见,两组方程从数学形式上完全相同,但一些参数物理意义不同。Yamamoto 模型中的 $\tilde{H}, \tilde{C}, \tilde{M}, \tilde{\mu}$ 为复弹性模量(在本文中所有带上“~”线的均为复数),这些复弹性模量的实

部为土骨架的动力学弹性模量,虚部是土颗粒间摩擦形成的非线性库仑摩擦的线性化表示,它考虑了在每一次波浪循环载荷下所带来的能量损失.

一些早期的研究者认为,波能量损耗主要是由于黏性摩擦造成的^[13],而后来一些现场测量结果表明^[14,15],波浪的动态扰动下海洋沉积物内部除了土颗粒和孔隙水发生耦合运动以外,土颗粒之间也有相对运动,所以造成海洋土中波能量损失有两个因素,一是由于孔隙水相对于土骨架运动时的黏性摩擦,二是由于沙粒间的摩擦.那么具体体现在两个模型上,我们认为 Biot 模型只反映了黏性摩擦, Yamamoto 模型则即考虑了库仑摩擦又顾及了黏性摩擦.下面我们首先从土体内弹性波传播特征来讨论这两种模型特点.

2 弹性波波衰减的比较

在饱和多孔介质中有 3 种体波存在:(i) 由于土骨架和孔隙水同时运动而产生的快压缩波(简称 f 波);(ii) 孔隙水相对于土骨架运动而产生的慢压缩波(简称 s 波);(iii) 土骨架所带来的剪切波(简称 T 波).若假设加载波为具有 $e^{i(\omega t - \bar{k}x)}$ 形式的谐波运动,在 Biot 模型中 3 种体波弥散方程为:

$$\begin{cases} (HM - C^2) \left(\frac{\bar{k}_{f,s}}{\omega} \right)^4 - (\rho M + m'H - 2\rho_f C) \left(\frac{\bar{k}_{f,s}}{\omega} \right)^2 + (\rho m' - \rho_f^2) = 0 \\ Gm' \left(\frac{\bar{k}_T}{\omega} \right)^2 - (\rho m' - \rho_f^2) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

这里 $m' = m - i\eta_f / k_s \omega$. 同样,只要做替换 $H \rightarrow \bar{H}$, $C \rightarrow \bar{C}$, $M \rightarrow \bar{M}$, $G \rightarrow \bar{\mu}$ 就可以得到 Yamamoto 模型中体波弥散方程^[16],下面我们分别讨论上述 3 种弹性波的波衰减.

波衰减定义为: $d_{f,s,T} = 8.686\omega \operatorname{Im}(\bar{k}_{f,s,T} / \omega)$,脚标 f, s, T 分别表示快压缩波、慢压缩波和剪切波.计算参数见表 2.

表 2 计算参数

孔隙度(β)	0.4	渗透系数/ $k_s \cdot \text{m}^{-2}$	1.0×10^{-9} (粗砂), 7.3×10^{-12} (细砂)
泊松比(ν)	0.33	剪切模量(G)/ $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	5.0×10^7 (粗砂), 1.6×10^6 (细砂)
土骨架附加质量(ω)	0.25	库仑损耗(δ)	0.05
土颗粒密度(ρ_s)/ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2.65×10^3	土颗粒体积模量(K_s)/ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	3.6×10^{10} / $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
孔隙水密度(ρ_f)/ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1.0×10^3	孔隙水体积模量(K_f)/ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	1.92×10^9 / $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

2.1 波速衰减随加载频率变化

加载频率(ω)变化范围取 $10^{-2} \sim 10^4$ Hz(图 1).在低频段($10^{-2} < \omega < 10$ Hz),压缩波衰减(f 波和 s 波)对于粗砂质底床(图 1(a))和细砂质底床(图 1(b))来说,两种模型给出的结果基本一致.这说明在低频情况下,两种模型所反映出来的压缩波传播特点相同.而剪切波(T 波)衰减,两种砂质底床下 Yamamoto 模型的结果均比 Biot 模型大.在共振柱仪实验中发现^[14],土颗粒间的库仑摩擦导致剪切能量耗散.因此可以说颗粒间库仑摩擦不论在粗砂底床还是在细砂底床都有不同程度的体现,在实际工程中不应忽略粗砂质底床中库仑摩擦的影响.一些现场观测结果也证实了这一点^[17].

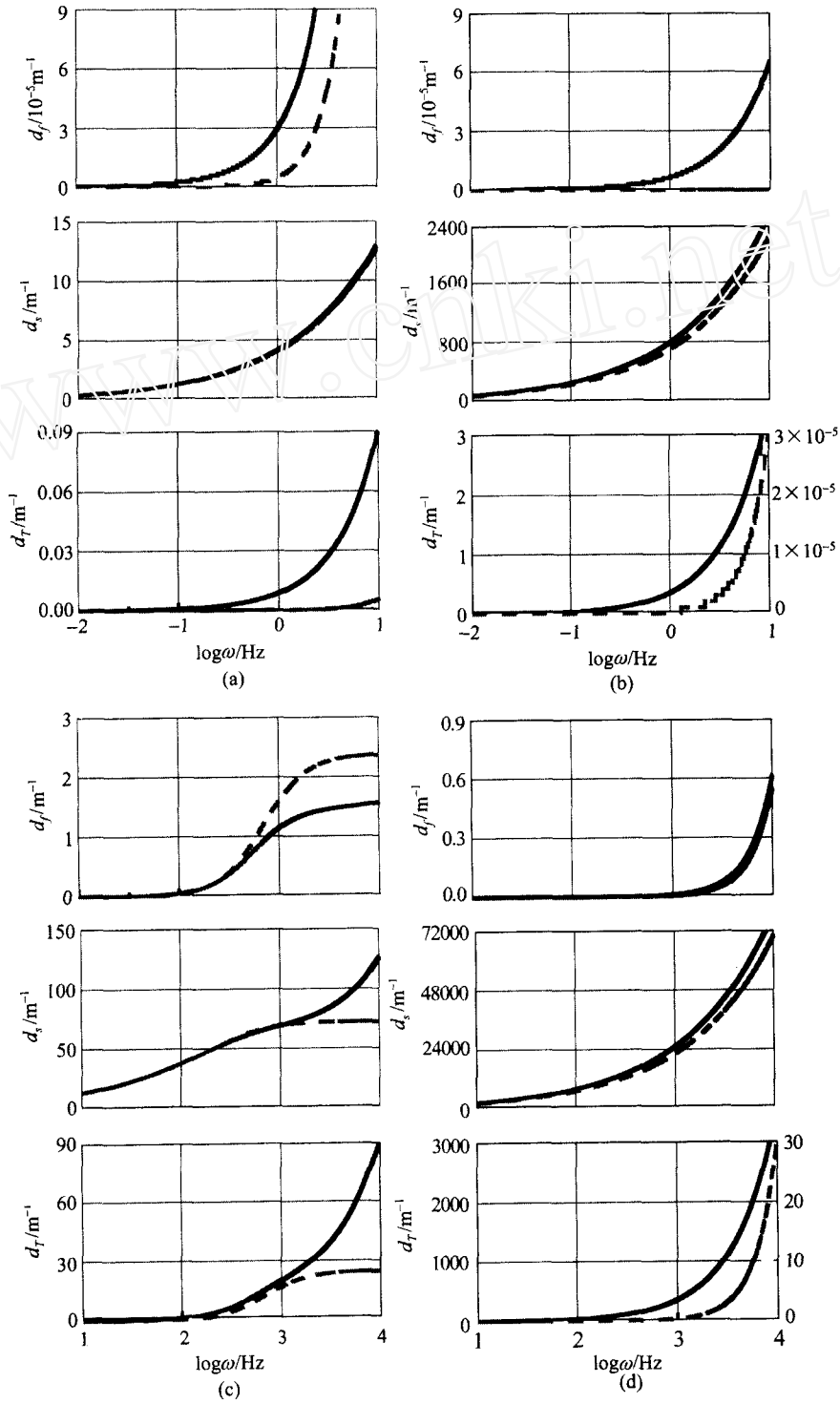


图 1 波衰减随加载波频率的变化曲线
实线为 Yamamoto 模型, 虚线为 Biot 模型

在高频段($100 \text{ Hz} < \omega < 10000 \text{ Hz}$), 对粗砂底床而言(图 1(c)), 两种模型给出的弹性波衰减规律不同. 当 $\omega > 1780 \text{ Hz}$ 时, Biot 模型得到的波衰减基本上不再随加载波频率变化, 对于 Yamamoto 模型而言, 波衰减仍随加载频率的增加而增加. 这说明当频率高到一定程度后黏性摩擦不再随加载频率变化, 而库仑摩擦仍随加载波频率的增加而加大. 对细砂底床而言(图 1(d)), 两种模型得到的压缩波衰减趋势基本一致. 剪切波情况和低频类似, Yamamoto 模型下的 T 波衰减比 Biot 模型大, 细砂时大两个量级, 粗砂时大一个量级.

总的来说, 在粗砂质底床中低频段以黏性摩擦为主, 高频段以库仑摩擦为主; 细砂质底床则都是以库仑摩擦为主. 另外, 从上述计算数据可见, 微小的库仑损耗 $\delta (=0.05)$, 会对底床内应力波的传播产生显著的影响.

2.2 波衰减随孔隙度、剪切模量、渗透率及黏性系数的变化

参照实际海浪周期, 我们取加载波周期为 10 s. 从图 2(a)可知, 随着孔隙度的增加两种模型下的 f 波和 T 波的衰减趋势不一样, Biot 模型下 f 波衰减是非线性的, 在 $\beta = 0.13$ 时达到最大, T 波衰减则是线性增加的; 而 Yamamoto 模型下 f 波衰减随孔隙度加大而线性增加, T 波衰减则随着孔隙度的增加而减少. 虽然如此, 两种模型下的 T 波所带来的能量损耗仍相差 3 个量级. 这说明孔隙度的增加并不能淹没库仑摩擦所带来能量损耗.

由图 2(b)中分析可知, 当剪切模量增加时, 两种模型得到的 f 波衰减趋势相反, Biot 模型下波衰减减少; Yamamoto 模型下波衰减增加, 这说明刚度的增加, 意味着黏性摩擦作用的减弱 (Biot 模型), 库仑摩擦增加, 并且其幅度比黏性摩擦减少幅度大 (Yamamoto 模型). 另外, 两种模型下 T 波波衰减趋势一致, 均随刚度的增加呈现急速下降. 当剪切模量大于 $5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 时, 库仑摩擦和黏性摩擦所带来的能量损耗可以忽略.

渗透率取 $10^{-10} \sim 10^{-9} \text{ m}^2$, 由图 2(c)可知, 当渗透系数增加时, 两种模型得到的 f 波和 T 波衰减均呈线性增加, 但其增加幅度非常小, 可以说此时的 f 波和 T 波的波衰减不受渗透率的影响.

波衰减与流体黏性的变化关系如图 2(d)所示. 可以看到, 当黏性系数增加一个量级时, Yamamoto 模型所反映的 f 波和 T 波的波衰减几乎不变, 而在 Biot 模型中则迅速降为零. 这说明 Yamamoto 模型所反映的库仑摩擦损耗远远大于黏性摩擦, 而 Biot 模型所反映的黏性摩擦仅体现在慢压缩波的波衰减上.

比较这 12 组曲线可以发现, 两种模型下所有 s 波的波衰减基本相同, 而 f 波和 T 波的波衰减则都存在量级之差, 尤其是 Yamamoto 模型所得到的 T 波衰减比 Biot 模型至少大 3 个量级. 也就是说两种模型所反映的黏性损耗随土参数变化一致, 库仑损耗随土参数的变化体现在 Yamamoto 模型得到的 T 波波衰减上.

3 加载波波衰减及底床内应力场幅角的比较

在实际工程中考虑加载波对底床内应力场的影响是至关重要的, 下面我们讨论这两种模型下的波衰减及应力场相位问题. 由前面的比较分析可知, Biot 模型和 Yamamoto 模型的土运动方程在形式上是完全一样的, 因此我们可以采用文献[16]推导的关系式, 计算波浪衰减及土层中应力场分布.

3.1 波浪衰减

图 3 描述了波浪分别在粗砂底床和细砂底床传播时波衰减情况. 波浪在粗砂底床传播时两

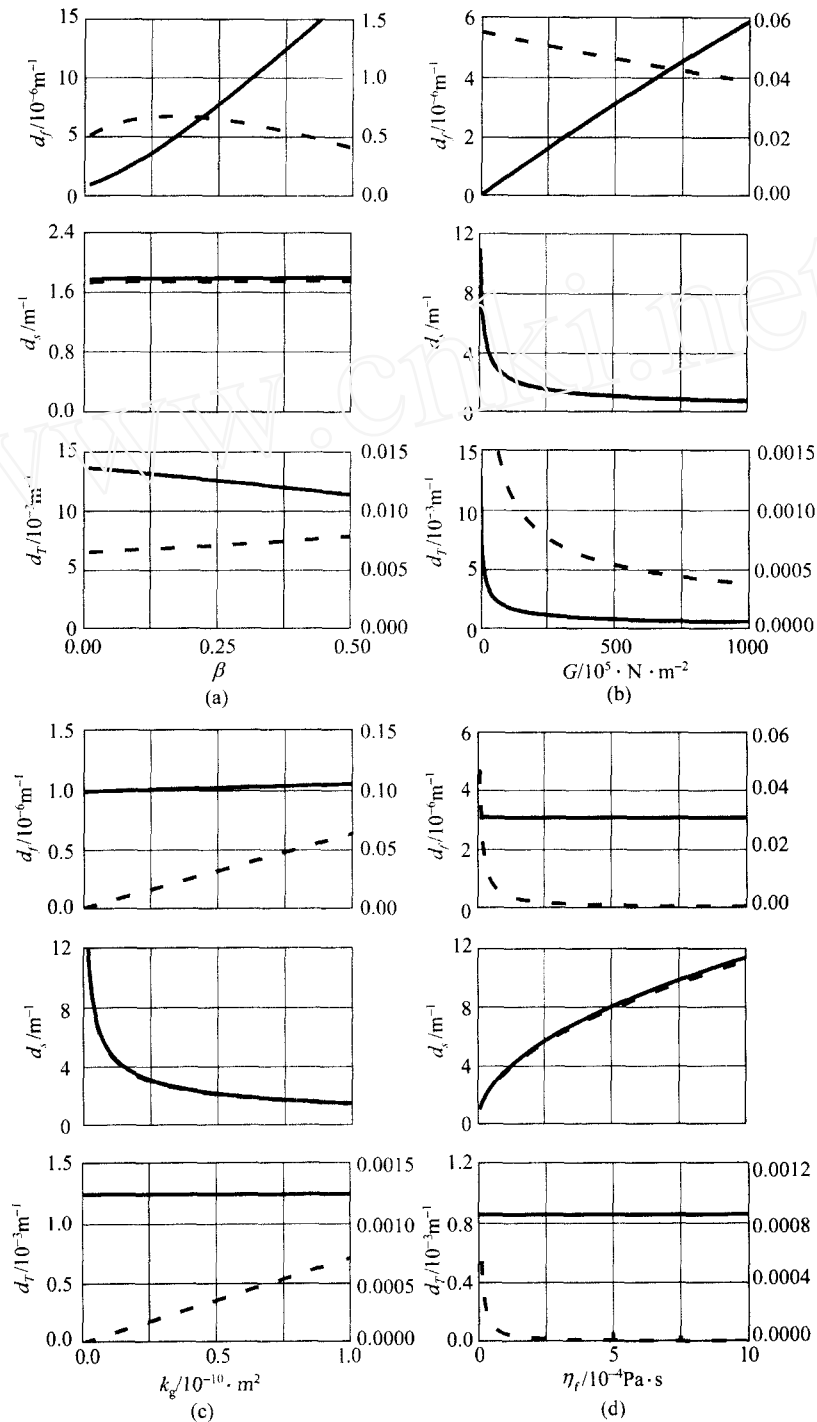


图 2 不同土参数下的波衰减曲线
实线为 Yamamoto 模型, 虚线为 Biot 模型

种模型所反映的波衰减基本一样(图 3(a)). 在细砂底床情况下, 两个模型给出的结果相差两个量级(图 3(b)). 水槽实验证明, Yamamoto 模型得到的结果和实验结果基本吻合^[18], 这说明波浪

作用下的底床土层运动加剧了土颗粒之间的库仑摩擦,使得波衰减增加.若没有考虑库仑摩擦,即便是考虑了底床运动,也无法反映这一特点.

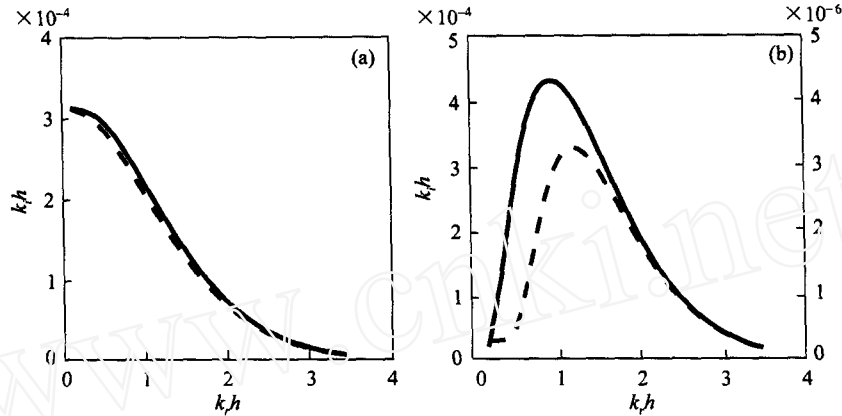


图 3 不同砂质底床上加载波衰减曲线
实线为 Yamamoto 模型,虚线为 Biot 模型

3.2 比较应力场幅角

下面我们分析底床内的应力场相位随孔隙度、剪切模量、渗透系数及黏性系数的变化.当孔隙度、渗透系数变化时,两种模型下孔隙水压力相位角几乎完全一致,正应力和剪应力幅角变化趋势也一致,只是 Yamamoto 模型下结果的略大于 Biot 模型.虽然黏性系数变化时,孔隙水压力的变化趋势相反,但相差仅 2° 左右(如图 4(a), (b), (c)所示).所以大致上可以认为,两种模型下应力场幅角随着这 3 种土参数的变化是一致的,也就是说此时库仑摩擦对应力场的影响比较弱,可以忽略.

值得注意的是,当剪切模量小于 $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 时(图 4(b)), Biot 模型得到的孔隙水压力和加载波相位差很小,而 Yamamoto 模型得到相位差为 10° , 和 Sleath^[19] 的实验结果非常接近.同样此时两种模型下的正应力和切应力幅角反向.当剪切模量大于 10^6 N/m^2 时,这两种模型基本上等价.总的来说,两种模型下的应力场幅角均对剪切模量的变化最为敏感,而且在剪切模量小于 $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 时,采用 Yamamoto 模型计算更为恰当.

4 结论

从以上分析我们可以得到以下几点结论:

- (1) 两种模型所体现的能量损耗力学机制不同, Biot 模型主要反映的是黏性摩擦, Yamamoto 模型则反映了黏性摩擦和库仑摩擦.
- (2) 低频情况下,粗砂质底床以黏性摩擦为主,细砂质底床以库仑摩擦为主;高频情况下,粗砂质底床中黏性摩擦和库仑摩擦都需要考虑,细砂质底床则仍以库仑摩擦为主.
- (3) 两种模型所反映的黏性摩擦是一致的, Biot 模型所反映的黏性摩擦主要体现在慢压缩波的波衰减上, Yamamoto 模型所反映的库仑摩擦主要体现在剪切波的波衰减上.
- (4) 当剪切模量小于 $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 时,应采用 Yamamoto 模型;当剪切模量大于 $5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 时,两种模型等价.

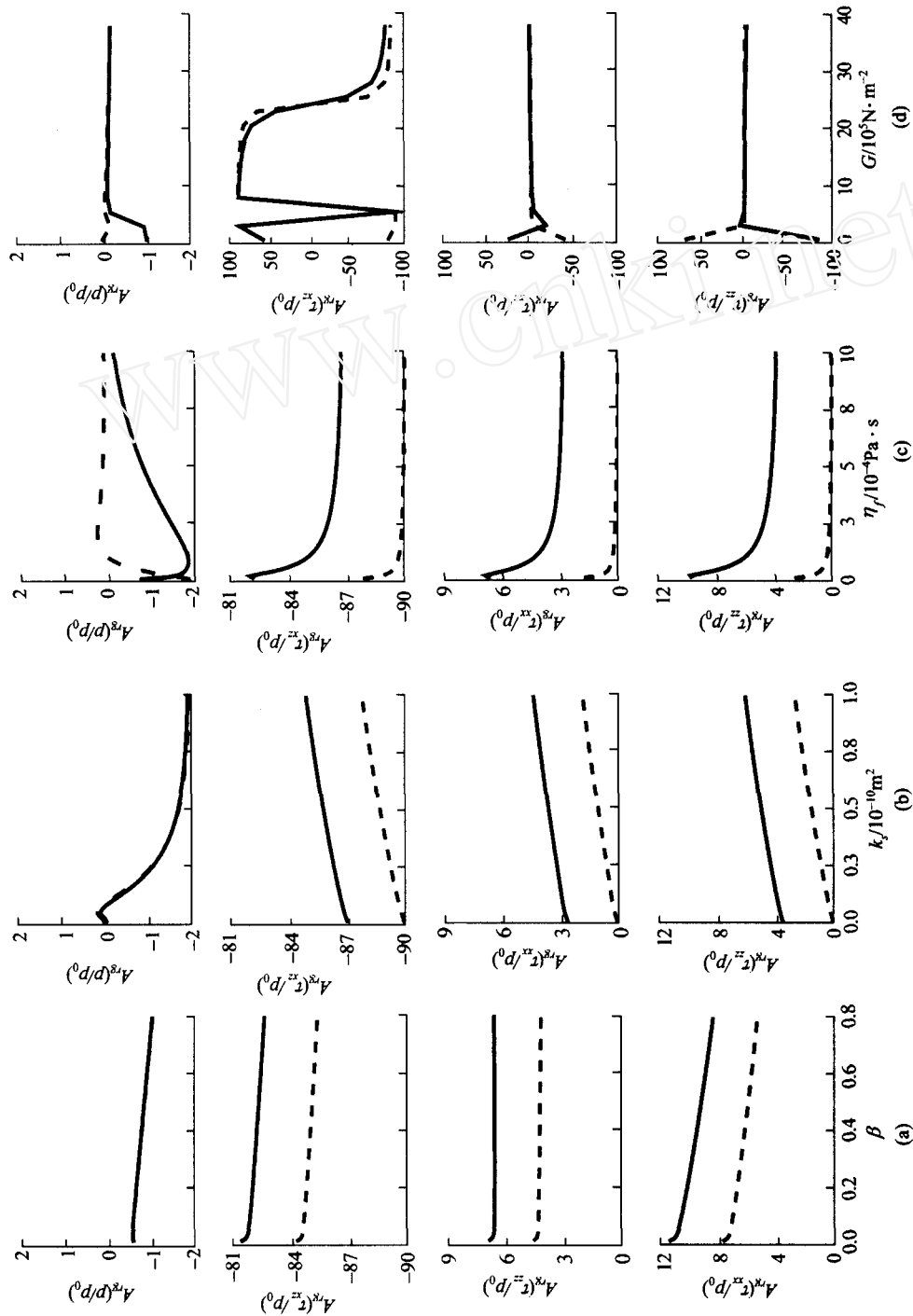


图 4 底床内应力场相位角随土参数变化曲线
实线为 Yamamoto 模型, 虚线为 Biot 模型

参 考 文 献

- 1 Zienkiewicz O C, Bettess P. Soil and other Saturated Media under Transient, Dynamic Conditions; General Formulation and the Validity of Various Simplifying Assumptions, Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads. Pande G N, Zienkiewicz O C, ed. John Wiley & Sons Ltd, 1982. 1~16
- 2 Smith A W, Gordon A D. Large breakwater toe failures. Journal of Waterways, Harbor and Coastal Engineering Division. ASCE, 1983, 109(2): 253~255
- 3 Lundgren H, Lindhardt J H C, Romhild C J. Stability of breakwaters on porous foundation. In: Proceedings 12th International Conference Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1989, 1: 451~454
- 4 Sakai T, Hatanaka K, Mase H. Wave-induced effective stress in seabed and its momentary liquefaction. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. ASCE, 1992, 118(2): 202~206
- 5 Zen K, Yamazaki H. Field observation and analysis of wave-induced liquefaction in seabed. Soils and Foundations, 1991, 31(4): 161~179
- 6 Nye T, Yamamoto T. Field test of buried ocean-wave directional spectrometer system. Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. ASCE, 1994, 120(5): 451~466
- 7 Lee T L, Tsai C P, Jeng D S. Ocean waves propagating over a Coulomb-damped poroelastic seabed of finite thickness: an analytical solution. Computers and Geotechnics, 2002, 29: 119~149
- 8 Jeng D S, Lee T L. Dynamic response of porous seabed to ocean waves. Computers and Geotechnics, 2001, 28: 99~128
- 9 Biot M A. Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media. Journal of Applied Physics, 1962, 33: 1482~1498
- 10 Yamamoto T. On the response of a Coulomb-damped poroelastic bed to water waves. Marine Geotechnology, 1983, 5: 93~130
- 11 Rahman M S, Lee T L. Effects of inertia forces on wave-induced seabed response. International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1999, 9: 307~313
- 12 Jeng D S, Rahman M S. Effective stresses in a porous seabed of finite thickness: inertia effects. Canadian Geotechnical Journal, 2000, 37(4): 1383~1392
- 13 Dalrymple R A, Liu P L F. Waves over Soft Mud: a Two-Layer Fluid Model. Journal of Physical Oceanography, 1978, 8: 1121~1130
- 14 Stokoe K H J, Isenhower W M, Hsu J R. Dynamic properties of offshore silty samples. Offshore Technology Conference Proceedings, 1980, 2: 289~302
- 15 Stoll D R. Acoustic waves in ocean sediments. Geophysics, 1977, 42: 715~725
- 16 林 緬. 波浪作用下粉土特性分析. 中国科学, E 辑, 2001, 31(1): 86~96
- 17 Okusa S, Nakamura T, Fukue M. Measurements of wave-induced pore pressure and coefficients of permeability of submarine sediments during reversing flow. In: Denness B, ed. London: Seabed Mechanics Graham and Trotman Ltd, 1983. 113~122
- 18 Yamamoto T, Schuckman B. Experiments and Theory of Wave-Soil Interaction. J Engng Mech, 1984, 110(1): 95~112
- 19 Sleath J F A. Wave-induced pressures in beds of sand. Journal of Hydraulics Division. ASCE, 1970, 96(2): 367~378