

# 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟

傅德薰 马延文

中国科学院力学研究所, 北京 100080

**摘要** 简要介绍了作者近年所发展的高精度差分格式, 给出了两类格式精度的分析方法, 分析了粘性项差分逼近所引入的耗散量低亏效应。文中按群速度将格式分为快型、慢型和混合型三类。对每类格式分析了高频波的传播特性, 指出, 模拟多尺度流场结构采用高精度格式是需要的。对高频波运动规律的分析可用以解释激波附近数值解中产生的非物理振荡的原因, 和指导如何提高激波捕捉的能力。文中还分析了高精度格式对网格雷诺数的限制条件。

**关键词** 高精度格式; 直接数值模拟; 群速度; 网格雷诺数

中图分类号 O 241. 3

## 0 引言

计算流体力学近年来得到了长足的进展。80 年代在算法研究方面一个突破性的进展是 TVD 及 ENO 等类型格式的研究<sup>[1-7]</sup>及其广泛的应用。这类工程方面的应用主要感兴趣的是定常的、宏观的和大大尺度的物理量。当然小尺度的物理量对宏观大尺度量是有影响的, 但在工程上这种影响通常是通过模式理论进行处理的。这种模式理论在应用上受到了很大限制。近年来由于计算技术的发展及方法研究的深入, 一些人开始把注意力转向对非定常、非稳定多尺度流场结构的直接数值模拟研究上, 其中湍流的直接数值模拟是一个典型的例子。为了能更好地捕捉多尺度流动特性, 发展了一些高精度差分方法<sup>[8-11]</sup>。

目前人们还主要是通过典型流动的问题, 对湍流进行直接数值模拟研究。这种研究的目的有二: 其一是研究湍流机理, 深化对湍流的认识; 其二是为湍流的模式研究与改进提供参考。

非定常多尺度流动特性的数值模拟研究, 对计算方法提出了更高的要求。要求方法能更好地模拟不同尺度, 特别是小尺度物理量的演化过程。为此需要对模拟方法作更加深入的研究, 分析方法对不同尺度物理量的模拟能力, 从而加深对方法结构特性的认识。本文重点是分析不同类型格式可能给数值解特性带来的影响, 而不是具体物理问题的流动结构特性分析。

文中简要介绍了作者近年在高精度格式研究及多尺度流动数值模拟研究方面的结果。介绍几种高精度格式, 两种形式逼近精度的分析方法, 对格式的新的分类方法, 差分粘性与物理

本文于 1997 年 2 月 2 日收到。

粘性, 以及数值解的特性分析等。最后给出算例。

## 1 流体力学方程组的离散化

为简便起见考虑如下之模型方程及对应的半离散化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (f = cu; \quad c, \mu = \text{const}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{F_i}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2} S_j \quad (2)$$

这里  $\frac{F_i}{\Delta x}$  为  $\frac{\partial f}{\partial x}$  的逼近式,  $\frac{S_j}{\Delta x^2}$  为  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的逼近式。式(1)可视为 N-S 方程的模型。通过对其离散解的精度及特性分析为 N-S 方程的离散化提供参考。

早期人们曾认为, 二阶精度的格式可以满足应用上的需要。由于所求解问题日趋复杂, 方法研究及认识的深化, 人们逐渐认识到对高精度方法的研究是需要的。一般说来, 对格式的精度要求与具体问题有关。对于有些工程问题的计算, 当所感兴趣的流动参量为零阶量时(指宏观量, 流动参量本身), 通常二阶精度的方法是可以满足需要的。当流动参量梯度很大, 且感兴趣的为参数的一阶量时(指流动参量的一阶导数), 则通常二阶精度的格式就难以满足需要了。当流场之梯度变化很大, 且所感兴趣的是更高阶量时, 采用更高阶精度的格式是有益的。对格式的精度要求与网格尺寸有关, 与计算条件有关, 也与流动结构的尺度有关。关于后者本文将作进一步的讨论。近年研究表明, 为能正确地捕捉小尺度及微尺度物理特征, 采用高阶精度的格式是有益的。这里简要介绍几种高精度格式, 重点是近年的工作。

### 1.1 传统的高精度差分逼近

这里所指传统的差分逼近是指导数的逼近式  $F_j$  和  $S_j$  可直接通过离散函数  $u_j$  或  $f_j$  来表示。一阶导数的逼近式可写为

$$F_j = \sum_m a_m \delta_x^m u_{j+m} \quad (3)$$

$$F_j = h_{j+1/2} - h_{j-1/2} \quad (4)$$

$$h_{j+1/2} = \sum_m a_m u_{j+m+1} \quad (5)$$

这里  $\delta_x^m u_j = \sum_{\mp} (u_{j-\mp} - u_{j\pm 1})$ 。根据精度需要利用 Taylor 级数展开可确定相应系数, 如四阶精度对称差分逼近

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{12} (-f_{j+2} + 7f_{j+1} - f_{j-2}) \quad (6)$$

五阶精度迎风偏斜逼近 (Rai & Mooin)

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{60} (-3f_{j+2} + 27f_{j+1} + 47f_j - 13f_{j-1} - 2f_{j-2}) \quad (7)$$

对二阶导数的逼近可写为如下形式

$$S_j = \sum_m b_m \delta_x^m u_{j+m} \quad (8)$$

这里  $\delta_x^m = \delta_x^+ \delta_x^-$ 。可根据精度需要来确定系数, 如四阶精度的差分逼近式

$$S_j = \frac{1}{12}(-u_{j+2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j-2}) \quad (9)$$

## 1.2 紧致型差分逼近式

对一阶导数的紧致型逼近可写为

$$\alpha_m F_{j+m} = \alpha_m U_{j+m} \quad (10)$$

可以根据需要来确定系数。著名的四阶精度对称紧致型逼近式为

$$\frac{1}{6}F_{j-1} + \frac{2}{3}F_j + \frac{1}{6}F_{j+1} = \delta_x^0 u_j \quad (11)$$

文献[9]中给出了更高阶精度的对称型紧致差分逼近式。文献[10]中给出了迎风型紧致差分逼近式:三阶精度迎风紧致差分逼近( $c > 0$ 情况)

$$\frac{2}{3}F_j + \frac{1}{3}F_{j-1} = \frac{5}{6}\delta_x^- u_j + \frac{1}{6}\delta_x^+ u_j \quad (12)$$

五阶精度迎风紧致差分逼近( $c > 0$ 情况)

$$\frac{3}{5}F_j + \frac{2}{5}F_{j-1} = \frac{1}{60}\delta_x^- [-u_{j+2} + 11u_{j+1} + 47u_j + 3u_{j-1}] \quad (13)$$

对二阶导数的紧致型逼近可写为

$$\beta_m S_{j+m} = \beta_m \delta_x^2 U_{j+m} \quad (14)$$

著名的具有四阶精度的差分逼近式为

$$\frac{1}{12}S_{j-1} + \frac{5}{6}S_j + \frac{1}{12}S_{j+1} = \delta_x^2 u_j \quad (15)$$

文献[9]中给出了更高阶精度的紧致型逼近式。

## 1.3 超紧致型差分逼近

在文献[10]中给出了几种超紧致型差分逼近。这类逼近可写为如下之一般形式

$$\begin{aligned} \overline{A}_m \overline{F}_{j+m} &= \overline{B}_m \overline{U}_{j+m} \\ \overline{F} &= [f^1, f^2, \dots, f^l] \\ f^k &= h^k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (16)$$

式中  $l$  根据需要而定。 $\overline{A}_m$  为  $l \times l$  矩阵,  $\overline{B}_m$  为  $l \times k$  矩阵,  $\overline{U}_j$  为  $k$  维矢量  $\{\dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}\}^T$ 。可以根据需要来确定对应的系数矩阵。这种方法为求解  $\overline{F}_j$  及边界处理增加了难度,但在精度上带来很大好处。按这种办法可很容易构造具有任意逼近精度的表达式<sup>[11]</sup>。

## 2 差分格式的精度分析

通常有两种分析方法,现分别予以介绍。

## 2.1 Taylor 级数展开法

通常利用修正方程中误差之主导项来分析形式精度的, 利用(2)式可得如下之修正方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{m>1} \mu_m^1 h^{2(m-1)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^{2m}} + \sum_{m>1} \mu_{1,m} h^{2m-2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2m-1}} + \sum_{m>1} \mu_{2,m} h^{2m-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2m}} \quad (17)$$

这里对粘性项只考虑中心型差分,  $h$  为空间步长,  $\mu_m^1$  项为由粘性项逼近引入的误差,  $\mu_{1,m}$  项为对流项逼近引入的色散型误差, 含  $\mu_{2,m}$  项反映了对流项逼近引入的耗散效应。参照文献[5]中的耗散比拟思想(17)式改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(\mu + \mu_1 + \mu_2) \frac{\partial u}{\partial x}] \quad (18a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(\mu + \mu_1 + \mu_2) \frac{\partial u}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial x} (a \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (18b)$$

其中

$$\mu = \sum_{m>1} \mu_m h^{2m-2} \frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x^{2m-1}} / \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (19)$$

$$\mu_1 = \sum_{m>1} \mu_{1,m} h^{2m-2} \frac{\partial^{2m-2} f}{\partial x^{2m-2}} / \frac{\partial f}{\partial x} \quad (20)$$

$$\mu_2 = \sum_{m>1} \mu_{2,m} h^{2m-1} \frac{\partial^{2m-1} f}{\partial x^{2m-1}} / \frac{\partial f}{\partial x} \quad (21)$$

$$a = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (22)$$

差分解满足(18)式, 通常利用(17)式中误差首项来分析格式的形式精度。这种截断往往忽略了更高频波的影响。系数  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  和  $a$  对解的特性影响还将进一步讨论。

## 2.2 逼近精度的 Fourier 分析法

假设求解域为整个实轴或在整个求解域内有周期解。取初值  $u(x, 0) = \exp(ikx)$ , 则(1)式有准确解

$$u(x, t) = \exp[-\mu k^2 t] \exp[ik(x - ct)] \quad (23)$$

若取  $u(x_j, 0) = \exp(ikx_j)$  则(2)式有准确解

$$u(x_j, t) = \exp\left[-\mu k^2 \frac{k_d^{(2)}}{\alpha^2} - \frac{ck_r^{(1)}}{h} t\right] \cdot \exp\{ik[x_j - c \frac{k_i^{(1)}}{\alpha} t]\} \quad (24)$$

其中  $\alpha = kh$ , 对具体格式可求出  $k_d^{(2)}$ ,  $k_r^{(1)}$  和  $k_i^{(1)}$  的分析表达式来。在图 1~ 3 中给出了部分格式对应的  $k_i^{(1)}$ ,  $k_r^{(1)}$  和  $k_d^{(2)}$  的变化曲线。可以看出  $k_d^{(2)} < \alpha^2$ 。这表明粘性项逼近误差导致耗散量的低亏, 对高波量, 低亏量更为明显。分析表明<sup>[9, 10]</sup>, 随逼近精度的提高逼近解率(resolving efficiency)也提高。对同阶精度的格式紧致型比传统格式有更高的逼近解率, 超紧致型格式比紧致型有更高的逼近解率。若不同格式有同样网格基点数, 则网格基点布局紧凑者有更高的逼近解率。

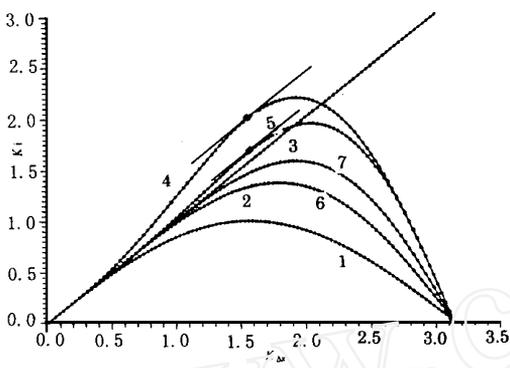


图1  $k_i$  和  $k_r$  随  $k_{\Delta x}$  的变化

Fig. 1 Variation of  $k_i$  and  $k_r$  versus  $k_{\Delta x}$

1——2阶中心差分 2——4阶中心差分 3——6阶中心差分 4——2阶迎风差分  
 5——4阶迎风差分 6——Leonard格式 7——Rai和Moin格式

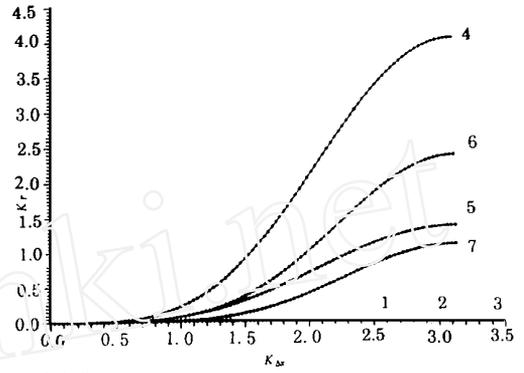


图3  $k_d$  随  $k_{\Delta x}$  的变化

Fig. 3 Variation of  $k_d$  versus  $k_{\Delta x}$

1——三点差分(二阶精度) 2——五点差分(四阶精度) 3——三点紧致差分(四阶精度)  
 4——五点紧致差分(六阶精度)

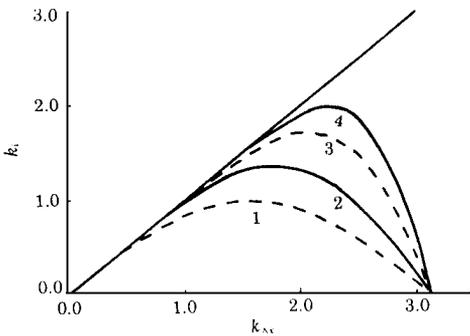


图2 中心型差分  $k_i$  随  $k_{\Delta x}$  的变化

Fig. 2 Variation of  $k_i$  versus  $k_{\Delta x}$

1——两点中心差分(二阶精度) 2——四点中心差分(四阶精度) 3——三点紧致差分(四阶精度)  
 4——五点紧致差分(六阶精度)

### 3 离散解的行为分析

#### 3.1 差分解的耗散特性

差分解的耗散效应来源有二,其一来自于物理粘性的逼近,另一来自于对流项的逼近。物理粘性逼近中  $k_d^{(2)}/\alpha^2 = 1 + [k_d^{(2)} - \alpha^2]/\alpha^2$ 。其中第二项对应于(18)式中的  $\mu$ 。对通常之中心型逼近这是一反耗散量,它导致差分解耗散量的低亏。在一般情况下  $|k_d^{(2)} - \alpha^2| < \alpha^2$ 。

在对流项的逼近式中也可能引入附加的耗散量,它也将影响解的幅值。当  $ck_r^{(1)} < 0$  时导致解的不稳定。对中心型差分格式  $k_r^{(1)} = 0$ 。

#### 3.2 相位速度与群速度

从微分方程的解(23)中可知,对任意波数  $k$  对应的波都以相同的速度运动。但在差分解

(24) 式中  $k_i^{(1)}$  是  $\alpha$  的函数。对长波  $k_i^{(1)}/\alpha \sim 1$ , 它们以物理上的波速传播。对高波量  $k_i^{(1)}/\alpha$  偏离于 1, 且随着波数的增大偏离现象加强。对中心型格式  $k_i^{(1)}/\alpha < 1$ , 这表明对单个波而言对应于中心型格式的短波以低于物理上的波速传播。对有的格式, 如 Pade 格式  $k_i^{(1)}/\alpha > 1$ , 这表明单个高波以高于物理上的波速传播。对有的迎风型格式会有  $k_i^{(1)}/\alpha > 1$  (对应于长波) 和  $k_i^{(1)}/\alpha < 1$  (对应于短波) 两种情况。

上面的分析只是对单个波而言。实际上波都是以波束或波群的形式出现的。波群之间的波可能相互抵消和加强。此时研究波的运动规律应考虑波的群速度。在文献[12, 13]中研究了群速度对解行为的影响。那里主要是针对几个具体格式来分析解的行为。在文献[7, 14]中对群速度效应进行了更为广泛的研究, 对格式按群速度进行了分类。该文中不仅分析了群速度对解行为的影响, 且给出了对群速度的控制方法以改进数值解中激波分辨率的方法。在本文中群速度定义为

$$D(\alpha) = dk_i^{(1)}(\alpha)/d\alpha \quad (25)$$

### 3.3 差分格式的分类

只考虑  $\mu = 0$  情况。通常人们以网格基的布局进行分类, 将格式分为对称(或中心)型和迎风型。这种分类可表明格式是否会引入耗散量。另一分类法是按格式的耗散特性分成耗散型、非耗散型和反耗散型格式。对称型格式是非耗散型的, 弱迎风偏斜格式是耗散型的, 强迎风偏斜格式可能是反耗散型的。按这种分类法可了解波的幅值变化趋势。

在文献[7]中按群速度对格式进行了分类。物理解的群速度有  $D(\alpha) = 1$ 。对相容格式的长波量有  $D(\alpha) \sim 1$ 。我们以  $D(\alpha) = 1$  为参考群速度。如果某格式对应的  $D(\alpha) > 1, 0 < \alpha < \pi$ , 则称其为快型格式(FST), 对应于  $D(\alpha) < 1$  的格式称为慢型的(SLW), 不属于这两种类型的格式称为混合型的(MXD)。中心型和弱迎风偏斜格式属 SLW 型, Pade 格式及两点超紧致型格式<sup>[11]</sup>属 FST 型, 强偏斜型格式属 MXD 型。强迎风偏斜格式可能不稳定。

### 3.4 数值解的波动行为分析

对应于相容格式数值解中长波的群速度与物理解的群速度一致, 且  $D(\alpha) \sim 1$ 。为便于讨论文中称这类波为基础波。对各种格式对应数值解中的各种波群有情况  $D(\alpha) > 1, D(\alpha) \sim 1, 0 < D(\alpha) < 1, D(\alpha) \sim 0$  及  $D(\alpha) < 0$ 。对应于  $D(\alpha) > 1$  数值解中的高频波群与基础波作同向运动, 但快于基础波群。对应于  $D(\alpha) \sim 1$  数值解中的波群以物理的群速度运动, 其中包括基础波群, 有时也包括高频波群。对应于  $0 < D(\alpha) < 1$  的波群与基础波有着同向运动, 但慢于基础波群。对应于  $D(\alpha) \sim 0$  的波群基本上停留在原位上, 称为驻波。对应于  $D(\alpha) < 0$  数值解的波群作与基础波相反方向的运动。除基础波群外群速度与相位速度是不一致的, 甚至是反向的。

对一些常用格式数值解中的高频波群有以下几种运动形态

SLW 格式——数值解中的高频波群出现于基础波群之后, 其中部分与基础波群作同向运动, 部分接近于驻波, 部分作反向运动;

FST 格式——数值解中的高频波群与基础波群作同向运动, 但出现在基础波群前;

MXD 格式——包括了上两类运动形态, 并还有部分高频波群与基础波群作同向同值运动。

### 4 数值粘性与物理粘性

前面指出,通常粘性项的逼近导致数值解中耗散量的低亏,但通常低亏量小于物理耗散量。现在将讨论对流项的逼近所引入的耗散误差。这一差分粘性小于物理粘性的要求,导致对网格雷诺数  $Re_h = hRe$  的限制。传统的要求是  $Re_h < 2$ ,文献[16]中指出高精度格式可放松对  $Re_h$  的限制,文献[10]作了进一步的研究,要求  $|\mu_2| < \mu$  的展开式为

$$Re_h < \frac{\left| C \frac{\partial u}{\partial x} \right|}{\left| \mu_{2,m} h^{2m-2} \frac{\partial^{2m-1} f}{\partial x^{2m-1}} \right|} \tag{26}$$

式中  $Re = c/\nu_0$  若只考虑主导项 ( $\mu_{2,m} = 0, m < M, \mu_{2,M} \neq 0$ ) 则有

$$Re_h^{2M-1} < \frac{\left| C \frac{\partial u}{\partial x} \right|}{\left| \mu_{2,M} \frac{\partial^{2M-1} f}{\partial x^{2M-1}} \right|} \tag{27}$$

这里  $Re_h^{2M-1} = h^{2M-1} Re$  对一阶两点迎风格式  $M = 1, \mu_{2,M} = 1/2$ , 则有  $Re_h < 2$ 。从(27)式中可知,

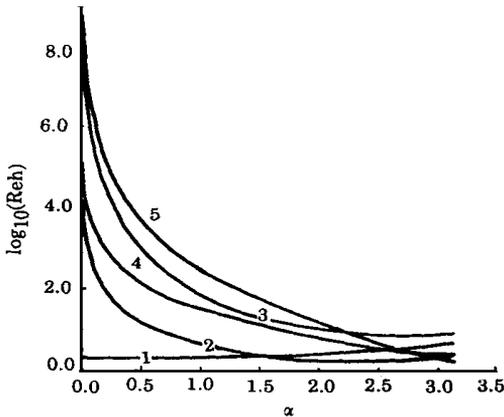


图4 Reh 随  $\alpha$  的变化

Fig. 4 Variation of  $Re_h$  versus  $\alpha$

- 1 一阶迎风格式 2 二阶迎风格式 3 Rai-Moin 格式
- 4 三阶迎风紧致格式 5 五阶迎风紧致格式

这一不等式反映了对不同尺度量限制条件不同。在图4中给出了  $n$  个常用格式的相应曲线。

限制条件与具体格式有关,与精度的量级有关,与解的特性有关。一般说来,随精度的提高可放松对  $Re_h$  的限制。

条件(27)依赖于解的行为,且忽略了高波量的影响。可用 Fourier 分析法来讨论相应的限制条件。由(24)式可知,对应于每个 Fourier 分量差分解的耗散率为

$$\mu k^2 \frac{k_d^{(2)}}{\alpha^2} + \frac{ck_r^{(1)}}{h} = \mu k^2 \left[ 1 + \frac{k_d^{(2)} - \alpha^2}{\alpha^2} \right] + \frac{ck_r^{(1)}}{h}$$

其中包含了粘性项逼近的耗散量低亏效应。要求对流项逼近产生的耗散效应小于真实物理的粘性效应导致对网格雷诺数的限制

$$Re_h < \frac{\alpha^2}{k_r^{(1)}} \tag{28}$$

### 5 多尺度流场结构的数值模拟

为便于讨论,这里把流动分为大尺度、小尺度和微尺度三种类型。方法精度的选取与求解的具体问题有关,对一些工程问题通常采用二阶或三阶精度的格式,对湍流这类问题通常采用更高阶精度的格式。



## 5.1 小尺度和微尺度流场结构的模拟

这里微尺度流场结构指湍流。湍流是非线性的三维问题, 对三维非线性问题数值解中的群速度效应是难以分析的。前面介绍的分析方法仅能帮助我们进一步加深对一些现有方法结构特性的认识, 并为构造高精度格式提供一个分析手段。对非线性问题可在某一时刻进行线性化, 采用前面介绍的方法可预示在一个短的时间内数值解中不同尺度量的运动趋势及对解可能造成的影响。在多维问题的数值解中群速度效应不仅影响波群的传播速度, 还会影响传播方向。高精度方法有利于对高波量的捕捉, 但会给计算带来新的困难, 如求解效率及边界条件的处理等。目前对一些典型湍流计算表明五到六阶精度的格式可以给出与实验相一致的结果。当然高波量的捕捉能力与网格密度有关。如果不采用模型处理, 网格尺度应小于希望捕捉的小尺度及微尺度量。

这里所说的小尺度量指流场变化剧烈处的局部流场结构, 如边界层流动, 尖锥及小钝头局部流场结构, 分离点, 再附点, 拐点及其他类型奇点附近的流动结构等。对这类问题考虑到网格雷诺数的限制适当提高格式精度是有益的。

应注意在讨论对网格雷诺数限制的时候是指局部网格雷诺数, 它是与局部流场特性, 如流速及动力粘性系数相关的。例如, 考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad f = \frac{u^2}{2} \quad (29)$$

$$u(-1, t) = 1, u(0, t) = 0$$

定常解在  $x = 0$  附近有边界层特性。若对流项取一阶精度的两点迎风差分, 则物理粘性占优, 导致

$$\frac{1}{\mu} < \left| \frac{2 \frac{\partial u}{\partial x}}{h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \right| = \left| \frac{2}{hu} \right|$$

或

$$Reh < 2, Re = u/\mu$$

这里虽然对  $Reh$  的限制很严但随着  $x \rightarrow 0$  局部网格雷诺数  $Reh$  本身也趋于零。

第 4 节指出, 对流项引入的差分粘性应当小于物理粘性, 并给出了限制条件, 即  $\mu_2 < \mu_0$ 。实际上也可要求  $|\mu_1| < \mu^{[5, 10, 16]}$ 。由(22)式可得

$$\left| a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} / \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \mu \quad (30)$$

由此也可以导出对  $Reh$  的相应限制条件。由于色散误差的引入将导致高频波的错位。(30)式表明这种错位不应当破坏解幅值的衰减特性, 在那些局部流动参数变化剧烈的地方对网格雷诺数的限制显得更为重要。

## 5.2 激波捕捉技术与群速度控制

激波可看成是不同频率波的集合。为提高对激波的捕捉能力需提高对高波量的捕捉能力。通常的激波计算仅对宏观量感兴趣, 已发展了很多好的激波捕捉法<sup>[11-7]</sup>。这些方法的发展多出

于数学观点,而不是直接针对产生数值振荡的原因而构造的。有的是从单个付氏分量相位差的角度来分析产生数值振荡的<sup>[15]</sup>。这种分析忽略了群速度效应,难以解释复杂的波群运动。文献[5]间接地解释了产生数值振荡的原因,引入了耗散比拟的概念。设 $\mu_0$ 为消除激波附近的伪振荡要求(18)中 $\mu_1 + \mu_2 = 0$ ,或简单要求 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ 是稳定性的要求。 $\mu_1 = 0$ 是对群速度的控制。由于在波前(指N-S激波) $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} / \frac{\partial u}{\partial \alpha} < 0$ 和波后 $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} / \frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ ,由(22)式可知 $\mu_1 = 0$ 表明要求波前 $a < 0$ 和波后 $a > 0$ 。实际应用中往往只考虑 $a$ 中的首项。但此时往往忽略了更高波的影响。

在文献[7]中利用群速度控制(GVC)方法改善了对激波的捕捉能力。设有一右行激波,如果在其右侧采用SLW格式,则这里不会有高频波出现。如果在激波之左侧采用FST格式,则激波后不会出现高频波。即,为消除振荡应要求

$$\begin{aligned} D(\alpha) &> 1 && \text{在波后} \\ D(\alpha) &< 1 && \text{在波前} \end{aligned} \quad (31)$$

这表明数值解中的波群应指向激波而运动。可利用耗散比拟法、限量函数法及群速度直接控制法来实现这一要求<sup>[7]</sup>。这里仅就后者作一简述。定义

$$SS(u) = \text{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}\right) \quad (32)$$

此时在激波前 $SS(u) < 0$ ,波后 $SS(u) > 0$ ,可用 $SS(u)$ 来控制群速度。设 $h_{j+1/2}^s$ 为对应于慢型格式的数值通量, $h_{j+1/2}^f$ 对应于快型格式的数值通量,则如下之数值通量将给出具有高分辨率的激波

$$h_{j+1/2} = \frac{1 - SS(u_{j+1/2})}{2} h_{j+1/2}^s + \frac{1 + SS(u_{j+1/2})}{2} h_{j+1/2}^f \quad (33)$$

通常由于解在激波附近梯度很大,因而其附近网格基的选取是很重要的。如果感兴趣的仅为激波,则在其附近可适当降低精度,减少网格基点数和加大网格基的偏离程度。如果对湍流中的激波进行计算且对湍流结构感兴趣,则对格式的重构应倍加小心。因为任何形式的重构将导致高频波的耗散和群速度的改变。

## 6 算例

### 6.1 模型方程的计算

考虑模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \quad (34)$$

时间方向采用三阶R-K方法。空间采用三种逼近式:(1)两点中心差分;(2)三阶迎风紧致;(3)二阶Pade差分。它们分别为SLW, MXD和FST型。图5中给出了初值为 $u(x, 0) = \exp[-3200(x - 0.5)^2]$ 的结果。可看出,高频波的错位与分析一致。图6为用二阶和四阶对称格式得到的初始间断发展情况。激波后有两类高频波,其中一类跟随激波,与其作同向运动,另一类向反向运动,这是由于部分高频波有负群速度的缘故。

图7中给出初值为 $\exp[-16(x - 0.5)^2] \sin(188x)$ 情况在 $t=1$ 时的结果。在 $t=1$ 的准确

解应达到  $x = 1.5$  处, 但二阶格式解只达到  $\alpha = 0.85$  处, 而四阶格式达到  $x = 1.25$  处。这是由于对应的群速度偏小之故。

### 6.2 典型流动计算的比较

采用二阶迎风格式和三阶迎风紧致格式对圆柱绕流进行了计算。计算参数为  $M = 0.3, Re = 174, N \times JN = 60 \times 30$ 。低阶格式之解为定常对称的, 而高阶格式给出了正确的图象(图 8)<sup>[17]</sup>。

图 9 中给出不可压 N-S 方程所得之椭圆背风面近物面流动图象。可以看出, 同样网格高精度格式能够捕捉到更为细致的流场结构。

### 6.3 复杂流动的数值模拟

我们采用三阶精度的迎风紧致格式逼近不可压 N-S 方程计算了方腔驱动流动<sup>[18]</sup>, 得到了 Hopf 分叉解。还用三阶精度的迎风紧致格式计算了同心和偏心双球间隙流动, 也得到了分叉解<sup>[19]</sup>。

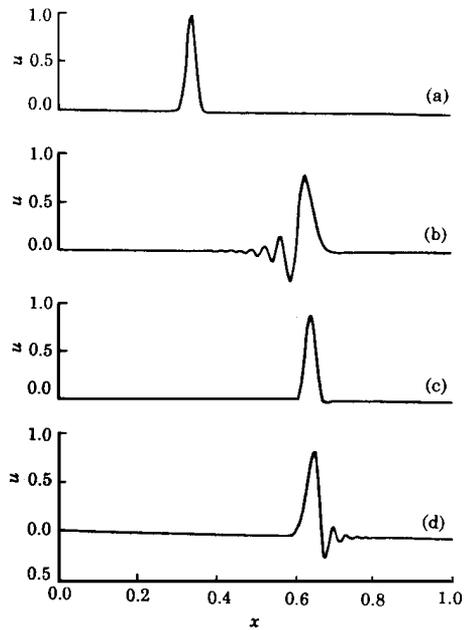


图 5 模型方程的解

Fig 5 Solution of equations

- (a)初值 (b)SLW 型格式的解
- (c)MXD 型格式的解 (d)FST 型格式的解

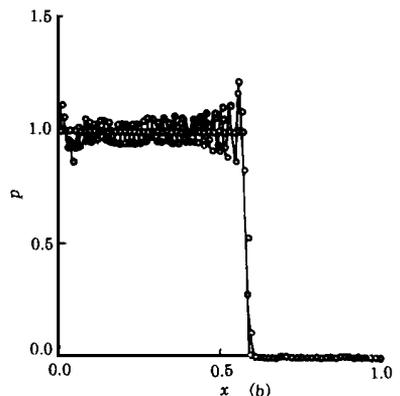
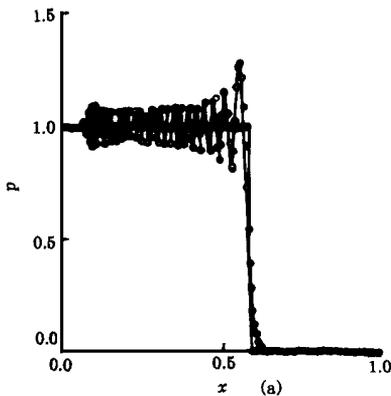


图 6 二阶和四阶中心格式的激波解

Fig 6 Shock solution of 2nd order and 4th order central approximation

在文献[20]中采用五阶精度迎风紧致格式逼近可压 N-S 方程的对流场, 六阶中心型紧致差分逼近粘性项, 计算了时间发展的平面混合流动, 得到了相应的拟序结构<sup>[20, 21]</sup>。

本项工作得到国家自然科学基金委员会重大项目的资助。计算是在中科院网络中心的 Power Challenge 机和日本东京大学生产技术研究所 CRA Y-EL 94 机上进行的。

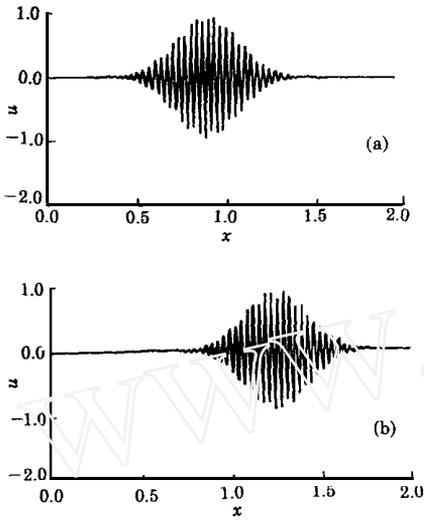


图7 二阶和四阶中心格式的高频解  
Fig 7 High frequency solution of 2nd order and 4th order central approximation

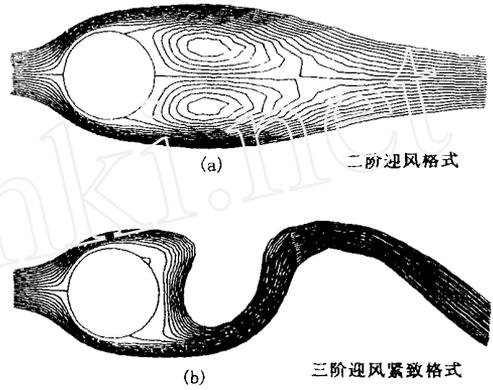


图8  $M = 0.3, Re = 174, \Delta t = 0.02$  时瞬态流线  
Fig 8 Transient Stream lines at  $M = 0.3, Re = 174, \Delta t = 0.02$

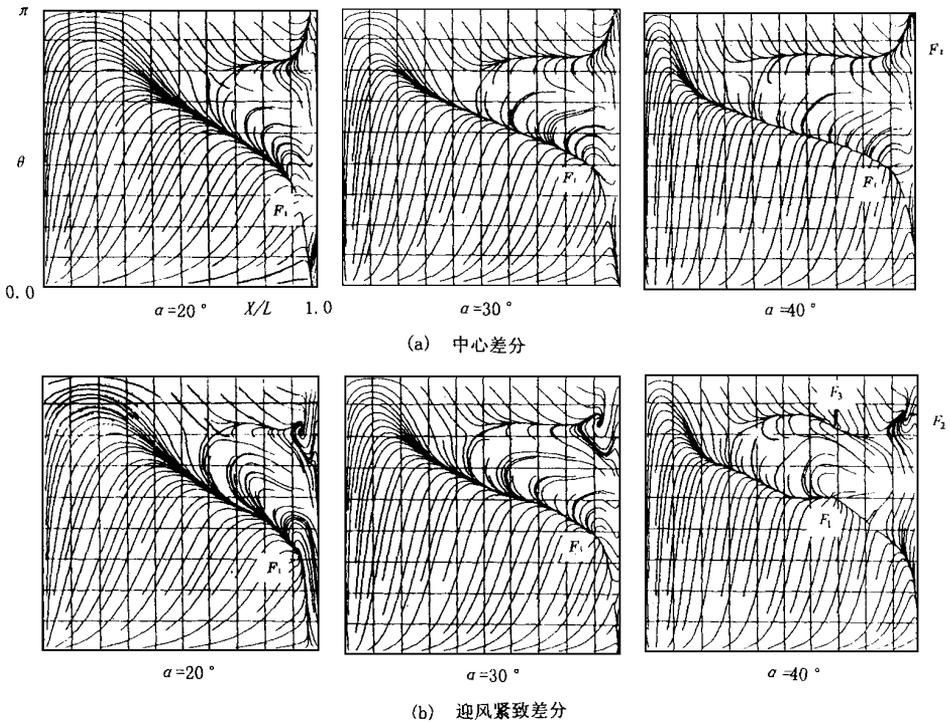


图9 椭圆展开表面上摩擦应力线  
Fig 9 Friction lines of ellipsoid's face  
 $\alpha = 20^\circ$  时  $Re_l = 11700$ ,  $\alpha = 30^\circ$  时  $Re_l = 8200$

## 参 考 文 献

- 1 Yee H C, Warming R F, Harten A. *AIAA* 83-1902, 1983
- 2 Shu S W. *Math Comp.* 1987, 49(179): 105~ 121
- 3 Harten A, Engquist B, Chakravarthy S R, *J. Comput Phys.*, 1987, 71: 231~ 303
- 4 Zhang Hanxin, Zhuang Fenggan. A Collection of Technical Papers 3 ISCFD Nagoya, 1989
- 5 马延文, 傅德薰. *中国科学(A)*, 1992(3).
- 6 Wu H M. A collection of Technical Paper 3 ISCFD Nagoya
- 7 Fu Dexun, Ma Yanwen, Kabayashi T, Taniguchi N, *Computational Fluid Dynamics J.*, 1995, 4(4).
- 8 Rai M M, Moin J. *Comput Phys.*, 1991, 96(1): 15~ 53
- 9 Lele S K. *J. Comput Phys.* 1992, 103: 16~ 42
- 10 Fu Dexun, Ma Yanwen, *Comput Fluid Dynamics Review* 1995, Edited by Hafez and Oshim K, John Wiley and Sons
- 11 Ma Yanwen, Fu Dexun, *Comput Fluid Dynamics J.*, 1992(5).
- 12 Trefethen L N, *SIAM Review*, 1982, 24(2): 113~ 136
- 13 刘儒勋. *计算物理*, 1992, 9(4): 479~ 484
- 14 马延文, 傅德薰. *T. Comput Physics*, 1997.
- 15 Jiang Zonglin, Takayama K, Chen Y. *CFD Journal*
- 16 傅德薰, 马延文. *中国科学(A 辑)*, 1993, 23(7).
- 17 郭文海. *计算流体力学讨论班论文集*, 北京, 1996
- 18 刘宏, 傅德薰, 马延文. *中国科学(A 辑)*, 1996, 6(7).
- 19 袁礼, 傅德薰, 马延文. *中国科学(A 辑)*, 1995, 25(9).
- 20 傅德薰, 马延文. *中国科学(A 辑)*, 1996, 6(7).

## High Order Accurate Schemes and Numerical Simulation of Multi-Scale Structures in Complex Flow Fields

Fu Dexun Ma Yanwen

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** Two types of accuracy analysis are presented. Schemes are divided into three groups: FST, SLW and MXD. The scheme structures and group velocity effect on numerical solutions are discussed. The Fourier analysis of restriction on mesh Reynolds number shows that the restriction can be relaxed with increasing the order of accuracy of approximation.

**Key words** high order accurate scheme; direct numerical simulation; group velocity; mesh Reynolds number