

黏弹性材料界面裂纹应力场奇性分析¹⁾

魏培君

(中国科学院力学研究所, LNM, 北京 100080)

(北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

章梓茂

赵希淑

(北方交通大学, 土建学院力学所, 北京 100044) (北京理工大学应用力学系, 北京 100081)

摘要 研究两半无限大黏弹性体间 Griffith 界面裂纹在简谐载荷作用下裂纹尖端动应力场的奇异特性. 通过引入裂纹张开位移和裂纹位错密度函数, 相应的混合边值问题归结为一组耦合的奇异积分方程. 渐近分析表明裂尖动应力场的奇异特征完全包含在奇异积分方程的基本解中. 通过对基本解的深入分析发现黏弹性材料界面裂纹裂尖动应力场具有与材料参数和外载荷频率相关的振荡奇异特性. 以标准线性固体黏弹材料为例讨论了材料参数和载荷频率对奇性指数和振荡指数的影响.

关键词 黏弹性, 界面裂纹, 振荡奇异性, 动应力场, 奇异积分方程

引 言

界面裂纹裂尖应力场的振荡奇异特征, 由于 Williams^[1], Rice & Sih^[2], Erdogan^[3], England^[4] 等人的研究已成为众所周知的特征. 均匀材料中裂纹尖端应力场的奇性指数是与材料参数无关的 $-1/2$ 常数. 不均匀材料界面裂纹尖端应力场由于界面两侧材料失配而具有振荡奇异性, 相应的奇异性指数不是实数而是复数, 其实部 (奇性指数) 表征应力场的奇异特性; 其虚部 (振荡指数) 表征应力场的振荡特性. 由于奇异积分方程在分析裂尖奇异性方面的方便性, Lowengrub & Sneddon^[5] 用奇异积分方程分析了界面裂纹在静载荷下的振荡奇异特征, 研究表明奇性指数是与材料无关的 $-1/2$ 常数, 而振荡指数是与材料参数相关的. Kuo^[6], Srivastava^[7] 和 Qu^[8] 对动载荷下界面裂纹的研究得到相同的结果. 本文对黏弹性界面裂纹问题同样用奇异积分方程方法进行分析得到裂尖动应力场, 而其奇异特征完全由奇异积分方程的基本解表征. 通过对基本解的深入研究, 发现奇性指数不再保持 $-1/2$ 常数, 奇性指数和振荡指数不仅都与材料参数有关, 而且还与载荷频率有关. 最后以标准线性固体为例进行了数值分析, 揭示了黏弹性参数对奇性指数及振荡指数的影响.

1 问题的数学描述

对于简谐载荷, 黏弹性材料中的应力和应变可通过复模量表示为

$$s_{ij}^c(x, y, \omega) = 2G^c(\omega)e_{ij}^c(x, y, \omega) \quad (1a)$$

$$\sigma_{kk}^c(x, y, \omega) = 3K^c(\omega)\varepsilon_{kk}^c(x, y, \omega) \quad (1b)$$

2000-11-30 收到第一稿, 2002-05-10 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10032010, 19872002) 和北方交通大学攀登基金资助项目.

其中, $\varepsilon_{ij}^c, \sigma_{ij}^c, e_{ij}^c, s_{ij}^c$ 分别表示复数形式的应变、应力、偏应变和偏应力. $G^c(\omega), K^c(\omega)$ 是复模量. 而黏弹性材料中质点的运动方程表示为

$$\left(K^c(\omega) + \frac{1}{3}G^c(\omega)\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G^c(\omega)\nabla^2\mathbf{u} = \rho\mathbf{u} \quad (2)$$

将 \mathbf{u} 进行 Helmholtz 分解, 即 $\mathbf{u}(x, y, \omega) = \nabla\Phi(x, y, \omega) + \nabla \times \Psi(x, y, \omega)$ ($\nabla \cdot \Psi = 0$), 得到波动方程

$$\nabla^2\varphi(x, y, \omega) + k_p^2\varphi(x, y, \omega) = 0 \quad (3a)$$

$$\nabla^2\psi(x, y, \omega) + k_s^2\psi(x, y, \omega) = 0 \quad (3b)$$

其中, 膨胀波复波数 $k_p^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2}$, 复波速 $c_p = \text{p.v.} \left[\frac{K^c(\omega) + \frac{4}{3}G^c(\omega)}{\rho} \right]^{1/2}$; 剪切波复波数 $k_s^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}$, 复波速 $c_s = \text{p.v.} \left[\frac{G^c(\omega)}{\rho} \right]^{1/2}$, p.v. [] 表示取主值. φ, ψ 分别是膨胀波和剪切波的势函数.

考虑图 1 所示 2 种均匀、各向同性、线黏弹性体界面上存在一个长度为 $2a$ 的 Griffith 裂纹. 假定在裂纹面上作用简谐载荷 $\sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = p(x)e^{i\omega t} - p_s$ (其中 p_s 足够大以保证裂纹面在变形过程中始终不相接触), 则边界条件为

$$\sigma(x, 0^+, \omega) = \sigma(x, 0^-, \omega) = (p(x)e^{i\omega t} - p_s, 0)^T = \sigma_0(x, \omega), \quad |x| < a \quad (4a)$$

$$\sigma(x, 0^+, \omega) = \sigma(x, 0^-, \omega), \quad |x| > a \quad (4b)$$

$$\mathbf{u}(x, 0^+, \omega) = \mathbf{u}(x, 0^-, \omega), \quad |x| > a \quad (4c)$$

$$\mathbf{u}(x, y, \omega) = \mathbf{0}, \quad x, y \rightarrow \infty \quad (4d)$$

其中, 应力 $\sigma = (\sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$, 位移 $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$.

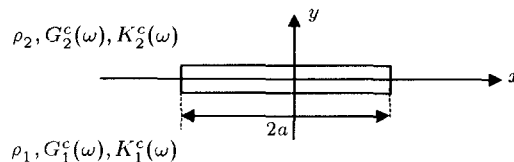


图 1 含裂纹的黏弹性体界面

Fig.1 Interface crack between two dissimilar viscoelastic bodies

2 裂尖动应力场

2.1 奇异积分方程的导出

为方便起见, 以下推导过程中均将因子 $e^{i\omega t}$ 省掉. 对式 (3) 中坐标 x 作 Fourier 积分变换,

利用辐射条件 (4d) 式可解出

$$\bar{\varphi}^s(s, y) = \begin{cases} A_1(s)e^{-\alpha_1 y}, & y > 0 \\ A_2(s)e^{\alpha_2 y}, & y < 0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$\bar{\psi}^s(s, y) = \begin{cases} B_1(s)ze^{-\beta_1 y}, & y > 0 \\ B_2(s)ze^{\beta_2 y}, & y < 0 \end{cases} \quad (5b)$$

其中, $\alpha_l = \sqrt{s^2 - k_{pl}^2}$, $\beta_l = \sqrt{s^2 - k_{sl}^2}$, $l = 1, 2$. 进而可得位移

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{xl} \\ \bar{u}_{yl} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_l \begin{Bmatrix} A_l \\ B_l \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_l \cdot \mathbf{E}_l \begin{Bmatrix} A_l \\ B_l \end{Bmatrix} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} is & (-1)^l \beta_l \\ (-1)^l \alpha_l & (-1)^l (is) \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_l = \begin{bmatrix} e^{(-1)^l \alpha_l y} & 0 \\ 0 & e^{(-1)^l \beta_l y} \end{bmatrix}$.

进一步利用黏弹性本构方程式 (1) 可得

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{yy}^s \\ \bar{\sigma}_{xy}^s \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_l \begin{Bmatrix} A_l \\ B_l \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_l \cdot \mathbf{E}_l \begin{Bmatrix} A_l \\ B_l \end{Bmatrix}, \quad l = 1, 2 \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{D}_l = \begin{bmatrix} \left(K_l^c(\omega) - \frac{2}{3} G_l^c(\omega) \right) (\alpha_l^2 - s^2) + 2G_l^c(\omega) \alpha_l^2 & i2s(-1)^l G_l^c(\omega) \beta_l \\ 2s(-1)^l G_l^c(\omega) \alpha_l & (\beta_l^2 + s^2) G_l^c(\omega) \end{bmatrix}$$

而界面应力, 即 $y = 0$, 可表示成

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}_1 \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_2 \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

定义裂纹张开位移

$$\Delta \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x, 0^+) - \mathbf{u}(x, 0^-) \quad (9)$$

则由式 (6) 得

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_x \\ \Delta \bar{u}_y \end{Bmatrix} = (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{D}_1^{-1} - \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{D}_2^{-1}) \mathbf{Q} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} \quad (10)$$

上式反映了裂纹面张开位移与作用在裂纹面上的应力之间的联系. 而界面位移边界条件 (4c) 式与裂纹面应力边界条件 (4a) 式构成求解裂纹张开位移的对偶积分方程

$$F^{-1}(\Delta \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad |x| > a \quad (11a)$$

$$F^{-1}(\mathbf{M} \Delta \bar{\mathbf{u}}) = \sigma_0(x), \quad |x| < a \quad (11b)$$

其中, $F^{-1}()$ 表示 Fourier 变换 $F()$ 的逆变换.

为进一步导出奇异积分方程, 定义裂纹位错密度

$$U = \frac{\partial}{\partial x} \Delta u(x) \quad (12)$$

代入式 (11) 得

$$\int_{-a}^a U(x) dx = 0 \quad (13a)$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{is}MU\right) = \sigma_0(x), \quad |x| < a \quad (13b)$$

可以证明^[8]

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{s}M = \begin{bmatrix} -\operatorname{sgn}(s)m & im\beta \\ -im\beta & -\operatorname{sgn}(s)m \end{bmatrix} = m(i\beta I_0 - \operatorname{sgn}(s)I) \quad (14)$$

式中

$$I_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m = G_1^c(\omega) \left(\frac{1}{(1-r_1^2)} \frac{1+\alpha}{1-\beta^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{G_2^c(\omega)r_1^2(r_2^2-1) - G_1^c(\omega)r_2^2(r_1^2+1)}{G_2^c(\omega)r_1^2(r_2^2-1) + G_1^c(\omega)r_2^2(r_1^2+1)}, \quad \beta = \frac{G_2^c(\omega)(r_2^2-1) - G_1^c(\omega)(r_1^2-1)}{G_2^c(\omega)r_1^2(r_2^2-1) + G_1^c(\omega)r_2^2(r_1^2-1)}$$

$$r_i^2 = \frac{3K_i(\omega) + 4G_i(\omega)}{3G_i(\omega)}, \quad i = 1, 2$$

利用公式^[8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) d\xi = 2\pi\delta(x) \quad (15a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\xi) \exp(i\xi x) d\xi = \frac{2i}{x} \quad (15b)$$

式 (13b) 化为

$$\beta I_0 U - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\xi-x} U d\xi + \int_{-a}^a K(\xi, x) U d\xi = \frac{1}{m} \sigma_0(x) \quad (16)$$

式中

$$K(\xi, x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{sm} M - i\beta I_0 + \operatorname{sgn}(s)I \right\} e^{is(\xi-x)} ds$$

式 (16) 是关于位错密度 (U_x, U_y) 耦合的奇异积分方程组. 为方便分析, 引入一个新的复数位错密度 $\lambda(x) = U_y(x) - iU_x(x)$, 则式 (16) 可合并成一个奇异积分方程

$$m\beta\lambda(x) - \frac{im}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\lambda(\xi)}{\xi-x} d\xi + \frac{m}{2} \int_{-a}^a [L_1(x, \xi)\lambda(\xi) + L_2(x, \xi)\bar{\lambda}(\xi)] d\xi = q(x), \quad |x| \leq a \quad (17)$$

式中

$$q(x) = \sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = p(x)e^{i\omega t} - p_s, \quad L_1 = (K_{11} - K_{21}) + i(K_{11} + K_{22})$$

$$L_2 = (K_{12} + K_{21}) + i(K_{22} - K_{11}), \quad \bar{\lambda}(x) = U_y(x) + iU_x(x)$$

解的唯一性条件 (13a) 式相应变为

$$\int_{-a}^a \lambda(x) dx = 0 \quad (18)$$

2.2 裂尖应力场

式 (17) 是由运动方程和本构方程导出的问题的控制方程, 不仅对边界 $|x| \leq a$ 适用, 对边界 $|x| \geq a$ 同样适用. 注意到 $|x| \geq a$ 时, $\lambda(x) = 0$, 并对裂纹长度做归一化处理, 即将 x/a 重新记为 x , 则在界面上

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = -\frac{im}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{m}{2} \int_{-1}^1 [L_1(x, \xi)\lambda(\xi) + L_2(x, \xi)\bar{\lambda}(\xi)] d\xi, \quad |x| \geq 1 \quad (19)$$

上式第二项在 $x \rightarrow \pm 1$ 时有界, 因而裂尖应力场的奇异性仅存在于第一项中, 即

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} \propto -\frac{im}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (20)$$

根据奇异积分方程理论^[9]及 Erdogan^[10]的奇异积分方程数值求解方法, $\lambda(x)$ 可表示成无穷级数

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W(x) P_n^{(\eta_1, \eta_2)}(x) \quad (21)$$

其中, $P_n^{(\eta_1, \eta_2)}(x)$ 是 Jacobi 多项式, c_n 是相应的系数. 而 $W(x)$ 是奇异积分方程基本解, 可一般地表示成

$$W(x) = (1-x)^{\eta_1} (1+x)^{\eta_2} \quad (22)$$

其中, $\eta_{1,2} = \delta \pm i\varepsilon$ 决定于奇异积分方程的系数, 即

$$\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\beta-1}{\beta+1} \right| \quad (23a)$$

$$\delta = -\frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{\beta-1}{\beta+1} \right) \quad (\arg(\cdot) \text{表示求幅角}) \quad (23b)$$

将式 (21) 代入式 (20), 并利用公式^[7]

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 P_n^{(\eta_1, \eta_2)}(t) W(t) \frac{dt}{t-x} = (1-\beta) [W(x) P_n^{(\eta_1, \eta_2)}(x) - G_n^\infty(x)], \quad |x| > 1 \quad (24)$$

其中 $G_n^\infty(x)$ 是 $W(x) P_n^{(\eta_1, \eta_2)}(x)$ 在无穷远处的主部. 则有

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} \propto m(1-\beta) \left[W(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^{(\eta_1, \eta_2)}(x) \right] \quad (25)$$

由此可见, 裂尖动应力场的奇异性完全由 $W(x)$ 来表征.

3 数值结果和奇异性分析

对于弹性材料, 由于材料的体变模量和切变模量均为实数, 所以参数 β 也是实数. 由式 (23) 知奇异性指数 $\delta = -1/2$ 与材料参数无关, 而振荡指数 $\varepsilon = \varepsilon(\beta) = \varepsilon(K, G)$ 是材料参数的函数. 当

界面两侧材料相同时, 参数 $\beta = 0$, 此时振荡指数 $\varepsilon = 0$, 表明振荡性质是由界面两侧材料失配而引起的. 对于黏弹性材料, 由于材料体变模量 $K_i(\omega)$ 和切变模量 $G_i(\omega)$ 均为外载荷频率 ω 的复函数, 因而参数 β 成为依赖材料参数和外载荷频率的复数, 进而由式 (23) 知不仅振荡指数 ε 依赖于材料参数, 而且奇性指数 δ 也不再是 $-1/2$ 常数, 而依赖于材料参数. 不仅如此, 奇性指数 δ 和振荡指数 ε 还都与外载荷频率 ω 有关. 而当界面两侧材料相同时, 由于参数 $\beta = 0$, 又得到与弹性材料相同的结果, 即奇性指数 $\delta = -1/2$, 振荡指数 $\varepsilon = 0$. 为了进一步分析奇异性指数与黏弹性材料参数及外载荷作用频率的关系, 以标准线性固体模型为例, 其切变松弛函数和相应的复模量为

$$G(t) = \mu_{\infty} \left[1 + f \exp \left(-\frac{1+f}{\tau} t \right) \right] \quad (26)$$

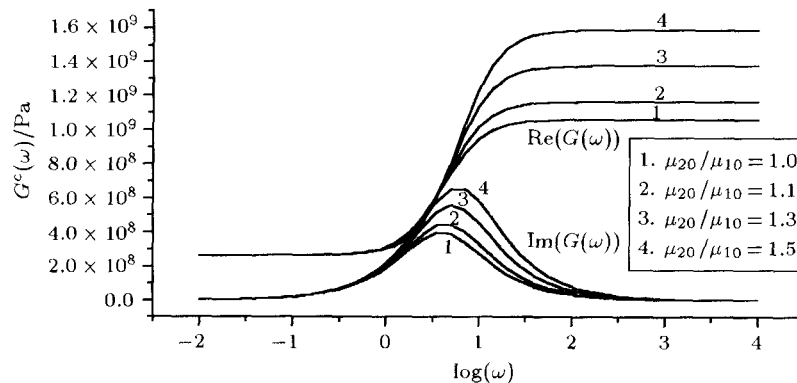
$$G^c(\omega) = \mu_0 + i\omega F(G(t)) = \mu_0 \frac{i\omega + 1/\tau}{i\omega + (1+f)/\tau} \quad (27)$$

其中, τ 是松弛时间, $f = \frac{\mu_0}{\mu_{\infty}} - 1$, 而 μ_0 是瞬时模量, μ_{∞} 是长时模量. 体变模量具有类似的曲线. 为简化分析, 假定材料泊松比 ν 保持常数, 则体变模量

$$K^c(\omega) = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G^c(\omega) \quad (28)$$

黏弹性材料参数和密度为 $\mu_0 = 1060 \text{ Nm}^{-2}$, $\mu_{\infty} = 264 \text{ Nm}^{-2}$, $\tau = 1 \text{ s}$, $\rho = 1200 \text{ kgm}^{-3}$. 为分析材料参数对奇异性指数的影响, 在其它参数不变的情况下, 每次改变界面一侧材料参数 ($\mu_0, \mu_{\infty}, \tau$) 中的一个计算奇性指数 δ 和振荡指数 ε 随载荷频率 ω 的变化规律.

图 2 反映了黏弹性材料瞬态模量 μ_0 的影响. 图 2(a) 中曲线 1 表示界面一侧材料, 界面另一侧材料分别为曲线 2, 3, 4 所示. 3 种组合情况对应的奇性指数 δ 和振荡指数 ε 分别如图 2(b), 图 2(c) 所示. 奇性指数 δ 在高频和低频都趋于 $-1/2$ 是由于材料复模量在高频和低频分别趋于实数的瞬时模量 μ_0 和稳态模量 μ_{∞} 所致. 在复模量有效的频率范围内, 奇性指数 δ 随模量差 $\mu_0 - \mu_{\infty}$ 的增加而增加. 类似地, 振荡指数 ε 在高频由界面两侧瞬时模量 μ_0 之差决定, 在低频由稳态模量 μ_{∞} 之差决定. 黏弹性材料稳态模量 μ_{∞} 的影响与瞬态模量 μ_0 的影响类似.



(a) 对复模量 $G^c(\omega)$ 的影响

(a) The effects on complex modulus $G^c(\omega)$

图 2 黏弹性材料瞬态模量 μ_0 的影响

Fig.2 The effects of short-term module μ_0

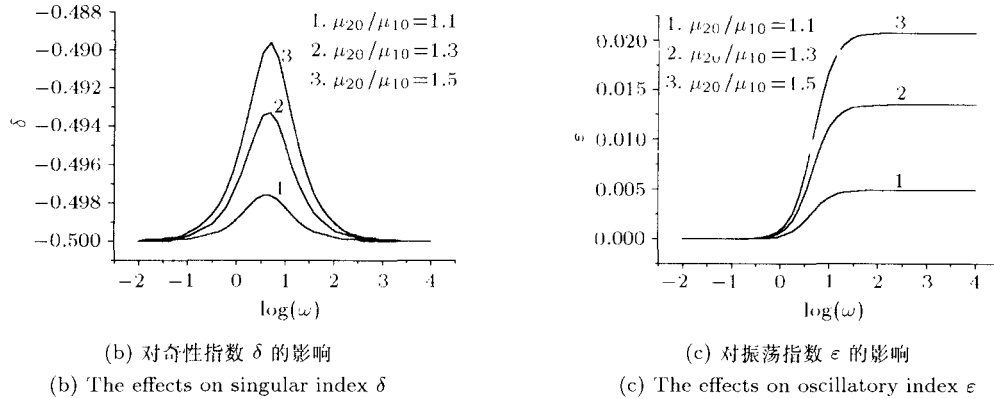
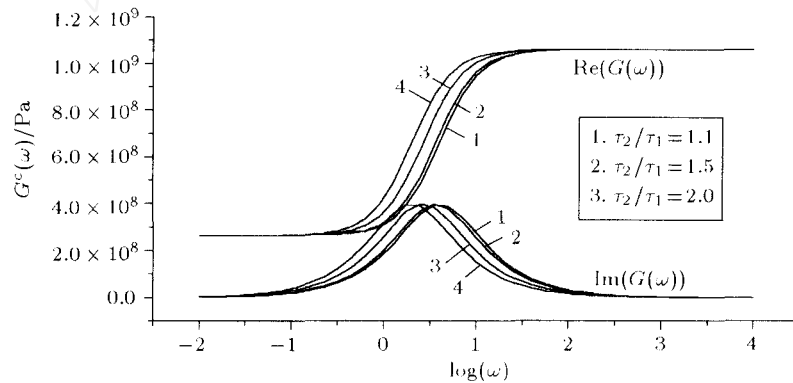


图 2 黏弹性材料瞬态模量 μ_0 的影响 (续)

Fig.2 The effects of short-term module μ_0 (continue?)

图 3 反映了黏弹性材料松弛时间 τ 的影响. 图 3(a) 是在材料瞬态模量 μ_0 和稳态模量 μ_∞ 相同时对应不同松弛时间 τ 的复模量. 由于在高频和低频段, 界面两侧材料趋于相同, 对应地, 在图 3(b) 和图 3(c) 中奇性指数 δ 趋于 $-1/2$; 振荡指数 ε 趋于 0. 此时, 相当于均匀黏



(a) 对复模量 $G^*(\omega)$ 的影响

(a) The effects on complex modulus $G^*(\omega)$

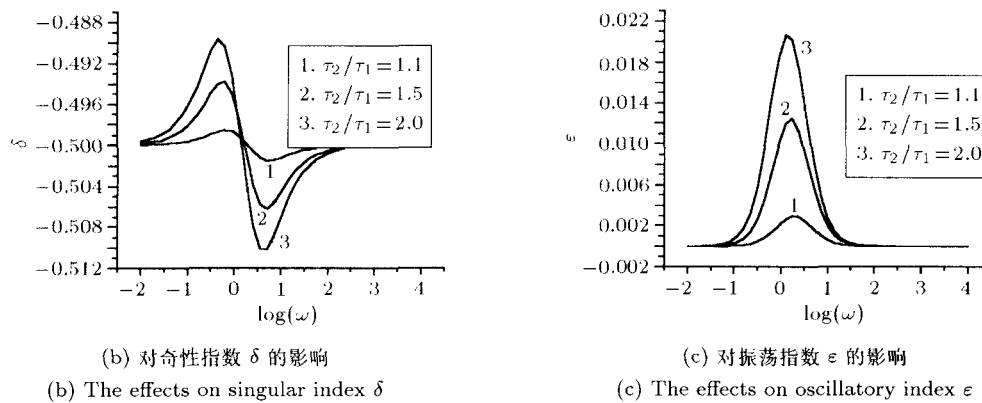


图 3 黏弹性材料松弛时间 τ 的影响

Fig.3 The effects of relaxation time τ

弹性材料中的裂纹. 在复模量有效的频率范围内, 振荡指数 ε 随两侧材料松弛时间 τ 差异的增加而增加, 表明振荡指数 ε 的大小反映了界面两侧材料性质的差异程度. 图 3(b) 中奇性指数 δ 随频率 ω 呈现波动性质, 反映了界面两侧材料黏性匹配模式随频率的变化. 界面两侧材料的黏性 (复模量的虚部) 各自随频率 ω 呈非线性变化, 在频率较低时, 一侧的黏性大于另一侧的黏性, 随着频率的增加, 这种情形发生了颠倒, 如图 2(a) 所示, 从而导致了奇性指数 δ 随频率 ω 的波动性质. 而在黏性明显的频率段内奇性指数 $\delta = 0$ 的点正好对应界面两侧黏性相同的情形.

4 结 论

综合以上数值结果和奇异性分析, 可得下列结论:

1) 在简谐荷载作用下, 黏弹性材料界面裂纹裂尖动应力场奇异性指数, 在黏性明显的频率范围内, 不仅与界面两侧材料参数有关, 还与载荷频率有关, 与频率有关主要是频率影响材料黏性的大小. 在黏性可以忽略的低频及高频段, 黏弹性材料退化为弹性材料, 相应的应力场奇异性指数与弹性材料情形完全相同.

2) 在黏性明显的频率范围内, 奇性指数偏离 $-1/2$ 的根本原因在于界面两侧材料黏性失配. 失配越严重, 奇性指数偏离 $-1/2$ 越大. 由于界面两侧材料黏性随频率变化不同, 导致失配模式改变, 因而, 奇性指数随频率增加呈现波动性质. 如界面两侧材料黏性相同, 则黏弹性材料界面裂纹与弹性材料界面裂纹相同仍是 $-1/2$ 奇异性.

3) 裂尖动应力场的振荡指数综合反映了界面两侧材料参数的差异程度, 差异程度越大, 振荡指数也越大. 在低频段反映了材料长时模量的差异程度, 在高频段反映了材料瞬态模量的差异程度, 而在黏性明显的频率段, 主要反映材料松弛时间的差异程度.

4) 界面裂纹的振荡奇异性导致裂纹面的叠合和材料的相互嵌入, 在物理上是不合理的. 由于振荡指数是由界面两侧材料性质间断或突跳而产生的, 因而引入界面层模型可以使振荡指数趋于 0. 另外, 引入含接触区的裂纹模型也可消除振荡奇异性.

参 考 文 献

- 1 Williams ML. The stress around a fault or crack in dissimilar media. *Bull Seism Soc Amer*, 1959, 49: 199~204
- 2 Rice JR, Sih GC. Plane problems of cracks in dissimilar media. *J Appl Mech*, 1965, 32: 418~423
- 3 Erdogan F. Stress distribution in bounded dissimilar materials with cracks. *J Appl Mech*, 1965, 32: 403~410
- 4 England AH. A crack between dissimilar media. *J Appl Mech*, 1965, 32: 400~402
- 5 Lowengrub M, Sneddon IN. The stress field near a Griffith crack at the interface of two bounded dissimilar elastic half-planes. *Int J Engng Sci*, 1973, 11: 1025~1034
- 6 Kuo AY. Transient stress intensity factors of an interface crack between two dissimilar anisotropic half-spaces. *J Appl Mech*, 1984, 51: 71~76
- 7 Srivastava KN, Gupta OP, Palaiya RM. Interaction of elastic waves in two bounded dissimilar elastic half-spaces having Griffith crack at interface I. *Int J Fract*, 1978, 14: 145~154
- 8 Qu Jianmin. Interface crack loaded by a time-harmonic plane wave. *Int J Solids Structures*, 1994, 31: 329~345
- 9 Muskhelishvili IN. *Singular Integral Equations*. Groningen: Noordhoff, 1953
- 10 Erdogan F, Gupta GD. Numerical solution of singular integral equations. In: *Mechanics of Fracture I*, Sih GC ed, Leyden: Noordhoff, International Publishing, 1973. 368~425

SINGULARITY OF STRESS FIELD AROUND INTERFACE CRACK BETWEEN VISCOELASTIC BODIES¹⁾

Wei Peijun Zhang Zimao* Zhao Xishu[†]

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

(Department of Mechanics and Engineering Sciences, Peking University, Beijing 100871, China)

*(Institute of Engineering Mechanics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

[†](Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Polytechny, Beijing 100081, China)

Abstract The singular characteristics of dynamic stress field around interface Griffith crack between two dissimilar isotropic viscoelastic bodies loaded by harmonic load are studied. The mixed boundary problem is reduced to a set of coupled singular integral equation of crack dislocation density function along normal and tangent of crack. By asymptotic analysis, it is found that the singular characteristics of dynamic stress field are embodied in the fundamental solution of singular integral equation. In light of theory of singular integular equation, the fundamental solution is investigated in detail. It is revealed that the singular index and oscillatory index of stress field are both dependent upon material parameters and frequency of loading for viscoelastic materials, which is different from the well-known conclusion of $-1/2$ oscillatory singularity for elastic materials. There is the problem of viscosity misfit apart from the elasticity misfit for present interface crack between two dissimilar viscoelstic bodies. It is the viscosity misfit that makes the singularity of stress around interface crack related to frequency of loading and show some new and interesting features different from elastic interface crack. As an example, the standard linear solid model for viscoelastic materials is studied numerically. The singular index and oscillatory index at various frequencies are evaluated. The effects of material parameters, i.e. the short-term modul, the long-term modul and the relaxation time, on the singular index and oscillatory index are discussed in detail.

Key words viscoelastics, interface crack, singularity, dynamic stress, singular integral equation

Received 30 November 2000, revised 10 May 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10032010, 19872002) and Pandeng Foundation of Northern Jiaotong University.