

基于连续介质模型的离散元方法中弹簧性质研究

魏怀鹏¹, 易大可², 李世海², 刘晓宇², 赵满洪²

(1. 河北工业大学 理学院, 天津 300130; 2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

摘要: 地质体材料的破坏演化过程是地质灾害防治工程中亟待解决的关键科学问题, 也是力学的前沿课题。基于连续模型的离散元方法是研究该问题的一种数值方法。用求矩阵特征值的方法, 推导基于连续介质模型的离散元方法中三维有限元刚度矩阵转化为离散元弹簧刚度的解析表达式, 给出了不同条件下离散元弹簧的取法。研究立方体八节点单元中离散元弹簧的性质, 得到棱弹簧、面对角线弹簧以及体对角线弹簧的刚度和方向表达式, 给出这些弹簧刚度以及方向与泊松比的关系图。最后, 将基于连续介质模型的离散元方法模型与 Gusev 模型、二维链网模型进行比较。对于泊松比为 0.25 时的平面应变问题, 对于泊松比为 1/3 时的平面应力问题, 基于连续介质模型的离散元方法模型与二维链网模型一致。在块体内部, 基于连续介质模型的离散元方法模型与 Gusev 模型一致。且基于连续介质模型的离散元方法模型能模拟链网模型和 Gusev 模型都不能模拟边界单元, 证明基于连续介质模型的离散元方法模型更具普遍性。

关键词: 岩土力学; 离散元; 有限元; 基于连续介质模型的离散元方法

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2006)06-1159-11

STUDY ON SPRING PROPERTIES OF CONTINUUM-BASED DISCRETE ELEMENT METHOD

WEI Huai peng¹, YI Dake², LI Shihai², LIU Xiaoyu², ZHAO Man hong²

(1. School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The failure progress of geological material is a key scientific problem in the engineering of geological hazard and control, and is also a front problem in mechanics. The continuum-based discrete element method (CDEM) is a numerical method to research this problem. According to the method to solve eigenvalues of matrix, the analytical expressions of the spring stiffness in the discrete element from the stiffness matrix of the three-dimensional finite element is deduced; and the rules how to choose the spring in the discrete element under different conditions are presented. The spring properties of the discrete element in the 8-node solid isoparametric element is investigated; the expressions of the stiffness and directions of the spring between common edge particles, between common diagonal of face particles and between common diagonal of cubic particles are deduced; and the figures about the relation between the stiffness and directions of spring and Poisson ratio are given. Finally, the CDEM is compared with both Gusev model and two-dimensional nets model. When the Poisson's ratio is 0.25, the CDEM model is consistent with two-dimensional nets model in plane stress problem. And when the Poisson's ratio is 1/3, the CDEM model is consistent with two-dimensional nets model in plane strain problem. In block interior, the CDEM model is consistent with Gusev model. The CDEM model can simulate boundary element which Gusev model and two-dimensional can't, and is proved to be more universal than the other models.

Key words: rock and soil mechanics; discrete element; finite element; continuum-based discrete element method

收稿日期: 2005-02-24; **修回日期:** 2005-04-25

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB412703); 国家自然科学基金资助项目(10472121); 河北省高校重点学科建设资助项目; 中国科学院重要方向性项目(KJCX2-SW-L1)

作者简介: 魏怀鹏(1956-), 男, 1982年毕业于河北工业大学理学院, 现任副教授, 主要从事物理学、力学方面的教学与研究工作。E-mail: weihp@jssmail.hebut.edu.cn

1 引言

地质体具有非连续、非均匀、流固耦合以及“未知”初始状态的特性。其破坏机制是由局部破坏(非连续面)到整体破坏的演化。因此,研究地质体材料的破坏演化过程是地质灾害防治工程中亟待解决的关键科学问题,也是力学的前沿课题。作为研究地质体材料破坏演化过程的重要方法之一,数值模拟应当发挥其应有的作用。然而,面对复杂的地质体,现有的数值方法还远不能满足工程要求,所给出的结果通常与工程实际相差甚远。

当前的计算方法主要分为两类:一类基于连续介质力学,如有限元(FEM)、有限差分(FDM)、边界元(BEM)、无网格法(EFM),以及它们的杂交方法;另一类基于非连续介质力学,如离散元(DEM)^[1-3]、不连续变形分析(DDA)等。虽然两类计算方法都有自己的优势,但是连续介质力学模型难以模拟材料在破坏后出现的非连续性,而非连续介质力学模型在模拟连续变形方面一直缺乏坚实的力学理论,导致接触面弹簧的刚度的标定不一,一些简单的标定缺乏足够的理论依据^[4]。并且,两种模型在有效地模拟材料由连续到非连续破坏过程都存在巨大困难。

对由刚体、弹性体和弹塑性体构成的混合复杂多体系统,一些研究者在所建立的广义有限单元和接触力元的基础上,基于离散多体系统的分区连续介质力学和于区间非连续性接触力元,提出一种新的适用于多体系统弹性及弹塑性分析的数值模拟方法^[5,6]。该方法能够处理连续和非连续介质所组成的离散多体系统的变形和应力,不仅能够对多体系统进行静、动力耦合分析,而且还能够逐步模拟与预测多体系统的变形与应力响应及接触界面上的接触应力和相对运动等复杂的非线性过程。然而,该方法在处理界面的刚度时,遇到与离散元相同的问题。

S. H. Li^[7]提出了一种基于连续介质模型的离散元方法(continuum-based discrete element method, CDEM)。该方法根据有限元的刚度矩阵得到离散元的弹簧刚度和弹簧的方向,从而在描述材料的连续特性上与有限元一致,在模拟非连续特性方面与离散元的模型相同,并能模拟材料由连续演化为非连续的破坏过程。但该方法在确定离散元弹簧的方向

和大小时,只讨论了个别力学参数的情况,没有给出离散元弹簧的一般形式和确定方法。

本文给出了三维有限元刚度矩阵转化为离散元弹簧刚度的解析表达式,研究了在立方体单元中,采用八节点有限元时,离散元弹簧随单元尺寸、弹性模量和泊松比变化的一般规律。有限元刚度矩阵在转化为离散元弹簧刚度时,根据节点的相对位置,可以分为3类弹簧:棱弹簧组、面弹簧组和体弹簧组。任意两节点通过3个弹簧连结,其弹簧刚度大小与材料的弹性模量和泊松比有关,而弹簧的方向只与泊松比有关。在连接体对角线两点之间的3个弹簧中,1个弹簧与另外2个弹簧永远正交,并与材料的特性无关。但是,按照求特征值的方法得到的体对角线两点之间弹簧中有两个方向是不定的。无论方向如何,都能满足连续介质力学的解。这对非连续介质力学模型而言,是不允许的。根据对称性,本文给出了一种确定体对角线弹簧的方法,通过4个弹簧来表示体对角线的材料特性。

此外,本文还比较了CDEM模型与Gusev模型^[8]、二维链网模型^[9,10]的差别,链网模型的主要工作是想通过等效方法求出连接节点的弹簧刚度,以便在弹簧不断时,精确求得弹性问题的解。其基本原理是让有限自由度系统等效于具有无限自由度的特征弹性体。严格地讲,对于平面应变和应力问题,节点间由拉压弹簧连接构成的系统只能讨论泊松比为0.25和1/3的情况。Gusev模型指出,链网模型的刚度可以通过有限元的刚度矩阵导出,并且可以给出泊松比不等于0.25时的情况。比较Gusev与CDEM模型的结果发现,Gusev给出的3类弹簧刚度分别是CDEM中单个块体的体弹簧,2个块体共有的面弹簧,以及4个块体共有的体弹簧的刚度。而对于边界块体比较,Gusev还没有给出结果。因此,CDEM不仅更具有普遍性,并且在程序实现时更为实用。

2 由三维有限元单元刚度矩阵转化的离散元弹簧刚度解析表达式

设三维有限元的单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_{24 \times 24}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{18} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{81} & \mathbf{K}_{82} & \cdots & \mathbf{K}_{88} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中： K_{ij} 为 3×3 的刚度子阵，其物理意义为： j 节点相对于 i 节点的位移与刚度子阵的乘积等于 j 节点相对 i 节点的作用力。也就是说， K_{ij} 矩阵具有 i, j 节点间弹簧刚度的意义。但由于 K_{ij} 表征给定坐标系下的广义力和广义位移之间的关系，它并未明确地说明所对应的弹簧性质。为此，通过求出特征值的方法得到刚度子阵的相似矩阵，研究相似矩阵以及对应转化矩阵的特性，从而可实现有限元和离散元的有机结合。设 K_{ij} 矩阵为

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11}^{ij} & k_{12}^{ij} & k_{13}^{ij} \\ k_{21}^{ij} & k_{22}^{ij} & k_{23}^{ij} \\ k_{31}^{ij} & k_{32}^{ij} & k_{33}^{ij} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其特征值为 λ ，则有如下特征方程：

$$\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0 \quad (3)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -(k_{11}^{ij} + k_{22}^{ij} + k_{33}^{ij}) \\ k_2 &= -(k_{11}^{ij*} + k_{22}^{ij*} + k_{33}^{ij*}) \\ k_3 &= -|K_{ij}| \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中： $k_{11}^{ij*}, k_{22}^{ij*}, k_{33}^{ij*}$ 分别为 $k_{11}^{ij}, k_{22}^{ij}, k_{33}^{ij}$ 的代数余子式。

式(3)的通解(卡尔达若公式)为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= u_1 + v_1 + \frac{k_1}{3} \\ \lambda_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{k_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}(u_1 - v_1)}{3} \\ \lambda_3 &= \bar{\lambda}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中： u_1 为 $\sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ 的一个根， $p = \frac{-k_1^2}{3} + k_2$ ， $q = \frac{2k_1^3}{27} - \frac{k_1k_2}{3} + k_3$ ； v_1 为 $\sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ 的一个根； $u_1v_1 = -\frac{p}{3}$ 。

线性代数理论表明，若存在向量矩阵 P ，使得

$$K_{ij} = PK_{\lambda}P^{-1} \quad (6)$$

则称 K_{ij} 与 K_{λ} 相似。并且任意一个 3×3 的实矩阵，都可以通过实转化向量矩阵 P 转化成具有以下形式

之一的相似矩阵：对角矩阵；形状如 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

或 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ 的约旦标准型矩阵；或者形状如

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}(\lambda_2) & \text{Im}(\lambda_2) \\ 0 & -\text{Im}(\lambda_2) & \text{Re}(\lambda_2) \end{bmatrix}$ 的矩阵，通过复特征根推导

得到，称为复根型矩阵。

在有限元中， K_{ij} 表示节点力与节点位移的关系：

$$F^{ij} = K_{ij}u^{ij} \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)，有

$$F^{ij} = PK_{\lambda}P^{-1}u^{ij} \quad (8)$$

式中： $P^{-1}u^{ij}$ 为节点的位移在弹簧方向上的投影， $K_{\lambda}P^{-1}u^{ij}$ 为由上述位移引起的弹簧上的力， $PK_{\lambda}P^{-1}u^{ij}$ 为弹簧力在全局坐标系下的表述形式。

由此可知， K_{ij} 的相似矩阵 K_{λ} 表征了在特定方向上节点力与节点位移的关系，因此具有弹簧刚度的特性。而实矩阵 P 确定了弹簧的方向。因此，任何两点之间的弹性材料，均可以通过位于这两点之间的 3 个方向的弹簧等效，而弹簧的物理特性依赖于相似矩阵 K_{λ} 。

对任意的六面体单元， K_{λ} 的形式与判别式 $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ， p, q 的取值，以及特征方程 $(k_{ij} - \lambda I)$ 的秩(记为 r)有关。从理论上讲，可以直接给出不同形式标准矩阵的条件：

(1) 对角型矩阵：

$$K_{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中，对角元素的取值有如下的 4 种情况：

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3, D < 0, \text{Re}(u_1) \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Im}(u_1);$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, \text{或} \lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2, D < 0,$$

$$\text{Re}(u_1) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Im}(u_1);$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, D = 0, p = q = 0, r = 3;$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3, D = 0, p \neq q, r = 3.$$

其物理意义为：每个方向上均有 1 根弹簧，弹簧的刚度与特征值相同。

(2) 约旦标准型矩阵有两种形式：

形式 1：

$$K_{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

取值为： $D=0, p \neq q, r=3$ 。

除了刚度等于特征值的 3 根弹簧以外，还有 1 根刚度为 1 的弹簧，其方向与第 2 根弹簧相同，但作用力的大小与第 3 方向的位移有关。

形式 2：

$$K_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

取值为： $D=0, p=0, q=0, r=3$ 。

在 3 个方向上有 3 根刚度等于特征值的弹簧，另外还有两根刚度为 1 的弹簧，方向分别与第 1, 2 根的弹簧相同，作用力大小与第 2, 3 方向上的位移有关。

(3) 复根型矩阵：

$$K_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}(\lambda_2) & \text{Im}(\lambda_2) \\ 0 & -\text{Im}(\lambda_2) & \text{Re}(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

共有 5 根弹簧，其中两根弹簧的特性为：第 2 方向的位移，产生第 3 方向上的力；第 3 方向的位移产生第 2 方向上的力。

3 立方体八节点等参元弹簧的性质

研究一种最简单的单元，即立方体八节点等参单元。立方体八节点单元可转化为 CDEM 模型(见图 1)。在 CDEM 模型中，由于单元的质量聚集在 8 个节点上，因此有限元的节点称为质点。根据第 2 节中的讨论，任意两个质点都由 3 个或 3 个以上的

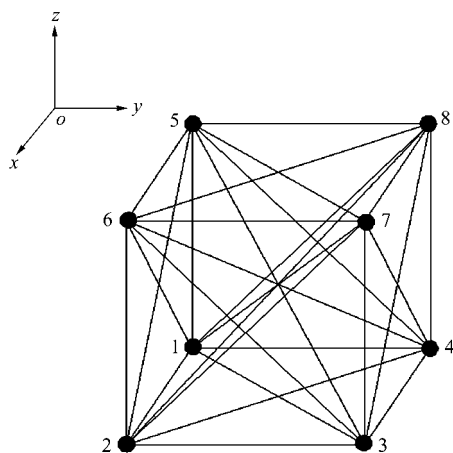


图 1 CDEM 模型

Fig.1 CDEM model

弹簧连接，称为一个弹簧组。根据单元中两质点间相对位置的对称性，可将所有的弹簧分为 3 类。

棱弹簧组：位于立方体的棱上，共有 12 组(见图 1 中质点 1 和质点 2, 4, 5 之间、质点 3 和质点 2, 4, 7 之间、质点 6 和质点 2, 5, 7 之间、质点 8 和质点 4, 5, 7 之间的弹簧组)。

面弹簧组：位于立方体的面上，连接同一面上对角线上的两个质点，共 12 组(如图 1 中质点 1 和质点 3, 6, 8 之间、质点 2 和质点 4, 5, 7 之间、质点 3, 6, 8 相互之间、质点 4, 5, 7 相互之间的弹簧组)。

体弹簧组：位于立方体的体对角线上，连接立方体最远的两个质点，共 4 个(如图 1 中质点 1 和 7 之间、质点 2 和 8 之间、质点 3 和 5 之间、质点 4 和 6 之间的弹簧组)。

取立方体的长度为 L ，弹性模量和泊松比分别为 E 和 μ 。为不失一般性，以连结质点 1 处的弹簧组为例，分别讨论 3 类弹簧组中的弹簧的特性。

(1) 棱弹簧组(以质点 1 和 2 之间相连的弹簧组为例)：判别式 D, p, q 均可用解析式表达，并可求出特征方程系数矩阵的秩。由于公式推导过于繁杂，在这里仅给出推导后的结果：

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{3.03 \times 10^{-12} E^6 L^6 (512\mu^2 - 256\mu + 7)(64\mu^2 - 32\mu + 1)}{(1 + \mu)^6 (2\mu - 1)^6} \\ p &= \frac{1.45 \times 10^{-4} E^2 L^2 (384\mu^2 - 192\mu + 5)}{(1 + \mu)^2 (2\mu - 1)^2} \\ q &= \frac{-5.36 \times 10^{-6} E^3 L^3 (72\mu^2 - 36\mu + 1)}{(1 + \mu)^3 (2\mu - 1)^3} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

根据标准矩阵的条件得到如下结果：

当 $D < 0$ ，即泊松比满足 $0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32} < \mu < 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 时，相似矩阵为对角矩阵。对应的 3 个弹簧的刚度为

$$K_i^A = \begin{bmatrix} K_1^A & 0 & 0 \\ 0 & K_2^A & 0 \\ 0 & 0 & K_3^A \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中，

$$K_1^A = \frac{-LE(1+3\sqrt{-512\mu^2+256\mu-7})}{288(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_2^A = \frac{-LE(1-3\sqrt{-512\mu^2+256\mu-7})}{288(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_3^A = \frac{LE}{144(1+\mu)(2\mu-1)}$$

当 $D=0$ 时, 泊松比满足 $\mu = 0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 或 $\mu = 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}$, $p \neq q$ 。相似矩阵为约旦标准型矩阵:

$$\mathbf{K}_i^A = \begin{bmatrix} K_1^A & 0 & 0 \\ 0 & K_2^A & 1 \\ 0 & 0 & K_3^A \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中,

$$K_1^A = K_2^A = \frac{-LE}{288(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_3^A = \frac{LE}{144(1+\mu)(2\mu-1)}$$

当 $D > 0$, 即泊松比满足 $\mu < 0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 或 $\mu > 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 时, 相似矩阵为复根型矩阵:

$$\mathbf{K}_i^A = \begin{bmatrix} K_1^A & 0 & 0 \\ 0 & K_2^A & K_{23}^A \\ 0 & K_{32}^A & K_3^A \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中,

$$K_1^A = \frac{LE}{144(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_2^A = K_3^A = -\frac{LE}{288(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_{23}^A = -K_{32}^A = \frac{LE\sqrt{-512\mu^2+256\mu-7}}{96(1+\mu)(2\mu-1)}$$

当泊松比连续变化时, 无论相似矩阵如何变化, 弹簧的刚度变化都是连续的。显然, 开区间 $\left(0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}, 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}\right)$ 包括了绝大多数固体材料泊松比的取值范围。由于篇幅所限, 本文不讨论约旦标准型和复根型的情形。表 1 给出了泊松比取值范围为 $\left(0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}, 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}\right)$ 时, 棱弹簧的方向

表 1 棱弹簧方向

Table 1 Directions of spring between common edge particles

棱弹簧	棱弹簧方向		
	x 轴分量	y 轴分量	z 轴分量
K_1^A	A	$ 4\mu-1 $	$ 4\mu-1 $
K_2^A	B	1	1
K_3^A	0	-1	1

向。其中, $A = \frac{5 + \sqrt{-512\mu^2 + 256\mu - 7}}{4} \text{sgn}(4\mu - 1)$, $B = \frac{5 - \sqrt{-512\mu^2 + 256\mu - 7}}{4(4\mu - 1)}$ 。

由此可知:

当泊松比在开区间 $\left(0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}, 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}\right)$ 上变化时, 位于同一棱上两质点间的材料特性可由 3 根弹簧等效。

不存在 3 根弹簧刚度都相等的情况。当泊松比为 $\mu = 0.25 - \frac{\sqrt{3}}{8}$, $\mu = 0.25 + \frac{\sqrt{3}}{8}$ 时, 棱弹簧刚度会出现重值。其重值弹簧的方向可根据泊松比变化时, 弹簧的方向连续变化而确定。

当泊松比满足 $\mu < 0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 或 $\mu > 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 时, 任意两质点之间材料特性可由 3 个方向上的 5 根弹簧表示。

当 $D = 0$ 时, 3 根弹簧中弹簧 K_3^A 的方向与含棱的体对角面垂直。另外 2 根弹簧的方向与弹簧 K_3^A 方向垂直, 即在含棱的体对角面内, 且 2 根弹簧的最大夹角为 90° 。

当泊松比为 0.25 时, 3 根弹簧方向正交, 且有 2 根弹簧在 3 点的连线方向上。取泊松比 μ 的范围为 $\left(0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}, 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}\right)$, 棱弹簧刚度和方向与泊松比 μ 的关系如图 2, 3 所示。

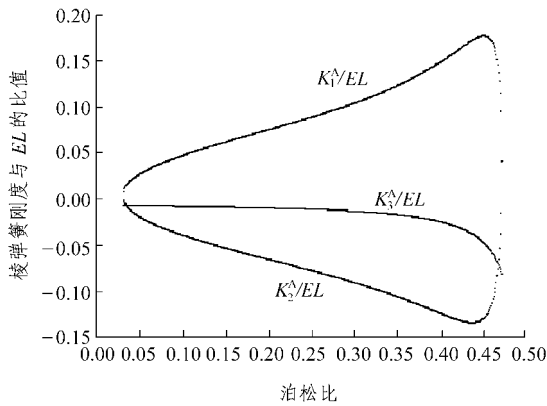


图 2 棱弹簧刚度与泊松比关系

Fig.2 Relationship between the stiffness of the spring between common edge particles and Poisson's ratio

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{2.42 \times 10^{-6} E^6 L^6 (16\mu^2 - 8\mu - 1)(4\mu - 1)^4}{(1 + \mu)^6 (2\mu - 1)^6} \\ p &= \frac{2.89 \times 10^{-4} E^2 L^2 (48\mu^2 - 24\mu - 5)}{(1 + \mu)^2 (2\mu - 1)^2} \\ q &= \frac{-2.68 \times 10^{-6} E^3 L^3 (144\mu^2 - 72\mu - 7)}{(1 + \mu)^3 (2\mu - 1)^3} \end{aligned} \right\} (16)$$

根据标准矩阵的条件得到如下结果：

当 $D < 0$ ，即泊松比满足 $0.25 - \frac{\sqrt{2}}{4} < \mu <$

$0.25 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，相似矩阵为对角矩阵。对应的弹簧的刚度为

$$\mathbf{K}_1^s = \begin{bmatrix} K_1^s & 0 & 0 \\ 0 & K_2^s & 0 \\ 0 & 0 & K_3^s \end{bmatrix} \quad (17)$$

(2) 面对角线弹簧组(以质点 1 和 3 之间相连的弹簧组为例)，判别式 D, p, q 分别为

其中，

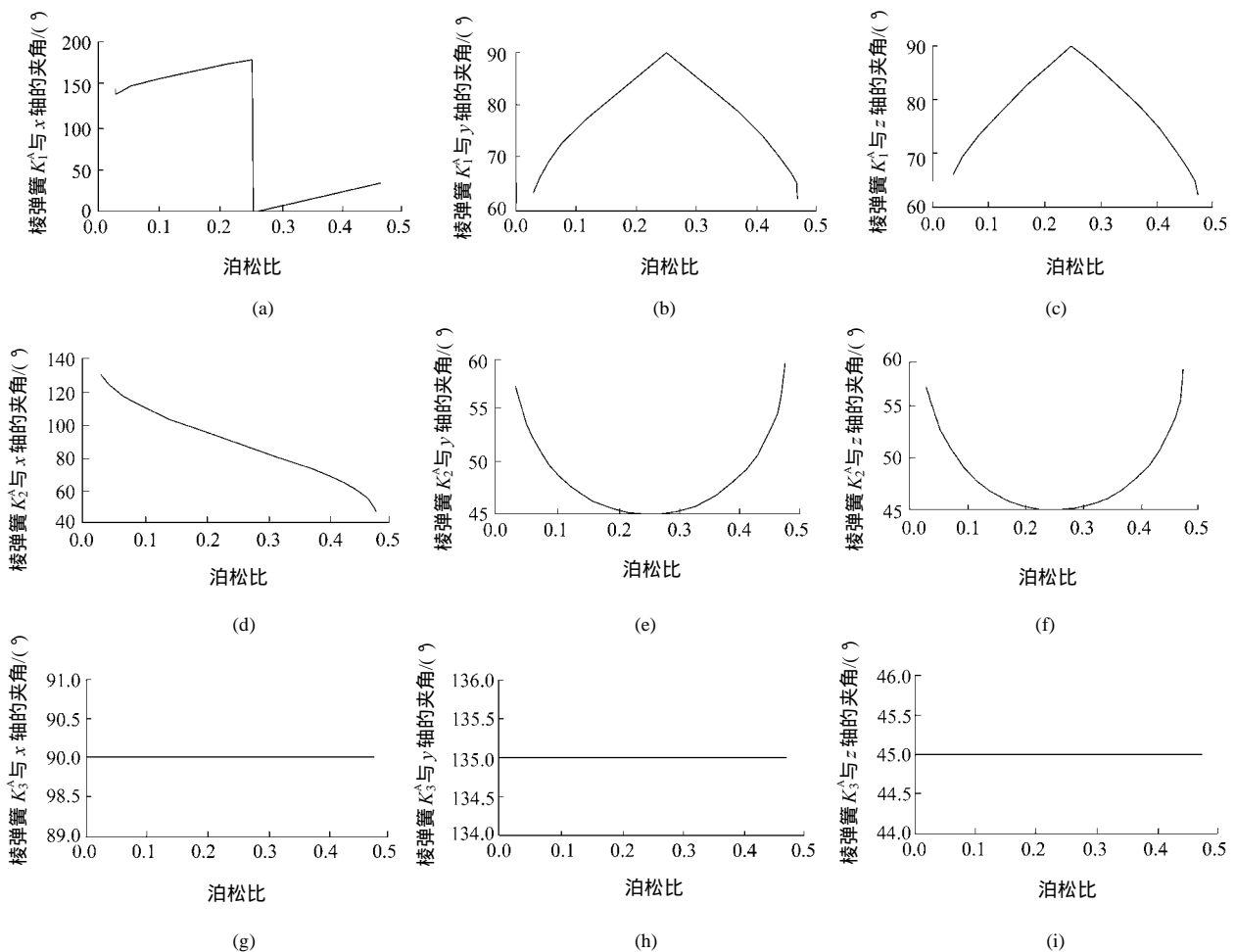


图 3 棱弹簧方向与泊松比关系

Fig.3 Relationship between the directions of spring of common edge particles and Poisson's ratio

$$K_1^s = \frac{-LE(10-12\mu+3\sqrt{-32\mu^2+16\mu+2})}{144(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_2^s = \frac{-LE(10-12\mu-3\sqrt{-32\mu^2+16\mu+2})}{144(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_3^s = \frac{LE(3\mu-1)}{36(1+\mu)(2\mu-1)}$$

当 $D=0$ ，泊松比满足 $\mu = 0.25 - \frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $\mu =$

$0.25 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时， $p \neq q$ ，相似矩阵为约旦标准型矩阵。

对应的弹簧的刚度为

$$\mathbf{K}_i^s = \begin{bmatrix} K_1^s & 0 & 0 \\ 0 & K_2^s & 1 \\ 0 & 0 & K_3^s \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中，

$$K_3^s = \frac{LE(3\mu-1)}{36(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_1^s = K_2^s = \frac{-LE(5-6\mu)}{72(1+\mu)(2\mu-1)}$$

当 $D=0$ ，泊松比满足 $\mu = 0.25$ 时， $p \neq q$ ，相似矩阵为对角矩阵。对应的弹簧的刚度为

$$\mathbf{K}_i^s = \begin{bmatrix} K_1^s & 0 & 0 \\ 0 & K_2^s & 0 \\ 0 & 0 & K_3^s \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中，

$$K_1^s = \frac{13LE}{90}$$

$$K_2^s = K_3^s = \frac{LE}{90}$$

当 $D > 0$ ，即泊松比满足 $\mu < 0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 或

$\mu > 0.25 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，相似矩阵为复根型矩阵。对应

的弹簧的刚度为

$$\mathbf{K}_i^s = \begin{bmatrix} K_1^s & 0 & 0 \\ 0 & K_2^s & K_{23}^s \\ 0 & K_{32}^s & K_3^s \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中，

$$K_1^s = \frac{LE(3\mu-1)}{36(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_2^s = K_3^s = \frac{-LE(10-12\mu)}{144(1+\mu)(2\mu-1)}$$

$$K_{23}^s = -K_{32}^s = \frac{LE\sqrt{-32\mu^2+16\mu+2}}{48(1+\mu)(2\mu-1)}$$

当泊松比连续变化时，无论相似矩阵如何变化，弹簧的刚度变化都是连续的。表 2 所示为泊松比取值范围为 $[0, 0.5]$ 时的面对角线弹簧方向。

表 2 面对角线弹簧方向

Table 2 Directions of spring between common diagonal of face particles

面对角线弹簧	面对角线弹簧方向		
	x 轴分量	y 轴分量	z 轴分量
K_1^s	M	R	$ 4\mu-1 $
K_2^s	N	S	1
K_3^s	-1	-1	0

表 2 中， M, N, R, S 分别为

$$M = \frac{(2 + \sqrt{-32\mu^2 + 16\mu + 2})\text{sgn}(4\mu - 1)}{2}$$

$$N = \frac{2 - \sqrt{-32\mu^2 + 16\mu + 2}}{2(4\mu - 1)}$$

$$R = \frac{(2 + \sqrt{-32\mu^2 + 16\mu + 2})\text{sgn}(4\mu - 1)}{2}$$

$$S = \frac{2 - \sqrt{-32\mu^2 + 16\mu + 2}}{2(4\mu - 1)}$$

由表 2 可知：

当泊松比在区间 $[0, 0.5]$ 上变化时，面对角线上两质点间的材料特性可由 3 根弹簧等效。

在该面对角线与平行于其的面对角线所构成的平面上，有弹簧 K_1^s 和 K_2^s ，另一弹簧 K_3^s 方向垂直于该面。

当泊松比为 0.25 时，3 根弹簧的方向正交。对于连续介质模型，弹簧 K_1^s 和 K_2^s 在面對角线与平行于其的面对角线所构成的平面上，且方向不定；对于非连续介质模型，弹簧 K_1^s 和 K_2^s 方向可根据泊松比变化时，弹簧方向的连续变化而确定。

取泊松比 μ 的范围为 $[0, 0.5]$ ，可给出面对角线弹簧刚度和方向与泊松比 μ 关系图(见图 4, 5)。

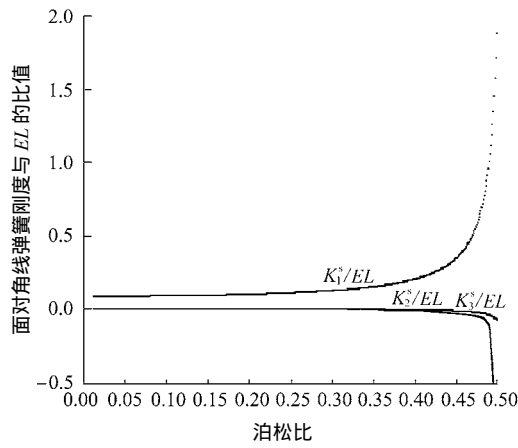


图 4 面对角线弹簧刚度与泊松比关系

Fig.4 Relationship between stiffness of spring of common diagonal of face particles and Poisson's ratio

$$\left. \begin{aligned} D &= 0 \\ p &= \frac{-1.3 \times 10^{-3} E^2 L^2}{(1 + \mu)^2 (2\mu - 1)^2} \\ q &= \frac{1.8084 \times 10^{-5} E^3 L^3}{(1 + \mu)^3 (2\mu - 1)^3} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

根据标准矩阵的条件得到如下结果：

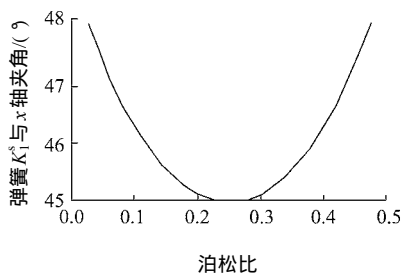
$$K_i^B = \begin{bmatrix} K_1^B & 0 & 0 \\ 0 & K_2^B & 0 \\ 0 & 0 & K_3^B \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中，

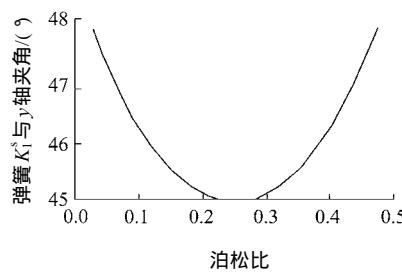
$$K_1^B = \frac{LE(6\mu - 7)}{72(1 + \mu)(2\mu - 1)}$$

$$K_2^B = K_3^B = \frac{LE(12\mu - 5)}{144(1 + \mu)(2\mu - 1)}$$

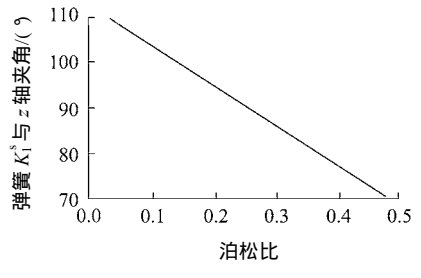
(3) 体对角线弹簧组(以质点 1 和 7 之间相连的弹簧组为例)，判别式 D, p, q 分别为



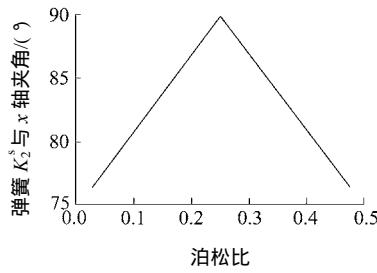
(a)



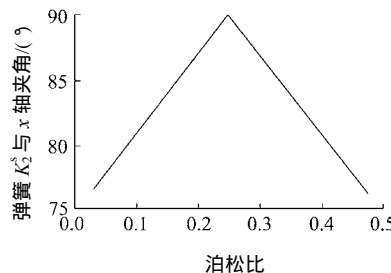
(b)



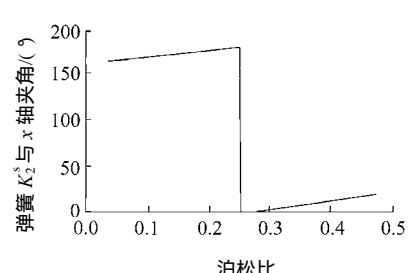
(c)



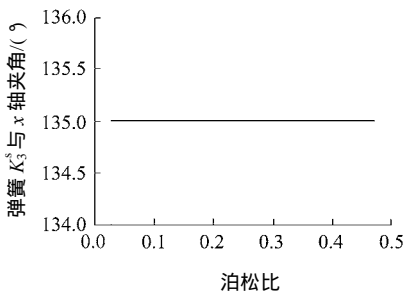
(d)



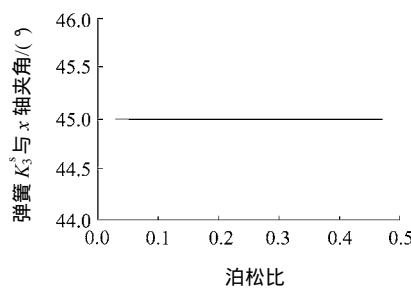
(e)



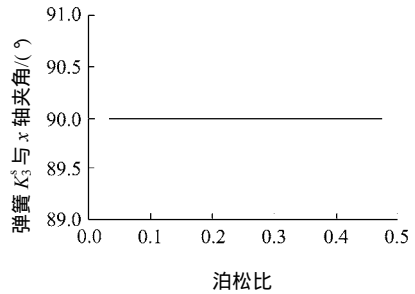
(f)



(g)



(h)



(i)

图 5 面对角线弹簧方向与泊松比关系图

Fig.5 Relationship between the directions of the spring of common diagonal of face particles and Poisson's ratio

当泊松比连续变化时,无论相似矩阵如何变化,弹簧的刚度变化都是连续的。表 3 所示为泊松比取值范围为[0, 0.5]时体对角线弹簧方向。

表 3 体对角线弹簧方向

Table 3 Directions of spring of common diagonal of cubic particles

体对角线弹簧	体对角线弹簧方向		
	x 轴分量	y 轴分量	z 轴分量
K_1^B	1	1	1
K_2^B	在 $x + y + z = 0$ 面内		
K_3^B	在 $x + y + z = 0$ 面内		

由表 3 可知：

体对角线弹簧刚度总存在重值，但不会出现弹簧刚度都相等的情况。

任意两质点之间的材料特性可由 3 个方向上的 3 根弹簧表示。

弹簧 K_1^B 的方向与体对角线平行。另 2 根弹簧方向与弹簧 K_1^B 的方向正交。

弹簧 K_2^B 和 K_3^B 方向不确定。也就是说，只要在给定平面内，都能满足连续模型的解。但对于非连续模型来说，不确定的弹簧方向不能给出准确的断裂位置。由于体对角线弹簧应满足立方体单元对称性要求，可在体对角线上两点间设置 4 根弹簧。其中的 1 根在体对角线上，另外 3 根在 $x + y + z = 0$ 平面内，且两两夹角为 120° ，其刚度为 $\frac{LE(12\mu - 5)}{432(1 + \mu)(2\mu - 1)}$ (见表 4、图 6, 7)。

表 4 体对角线弹簧刚度和方向

Table 4 Stiffness and directions of the spring of common diagonal of cubic particles

体对角线弹簧	体对角线弹簧刚度	体对角线弹簧方向		
		x 轴分量	y 轴分量	z 轴分量
K_1^B	G	1	1	1
K_2^B	H	-1	-1	2
K_3^B	H	2	-1	-1
K_4^B	H	-1	2	-1

表 4 中 H, G 可分别表示为

$$H = \frac{LE(12\mu - 5)}{432(1 + \mu)(2\mu - 1)}$$

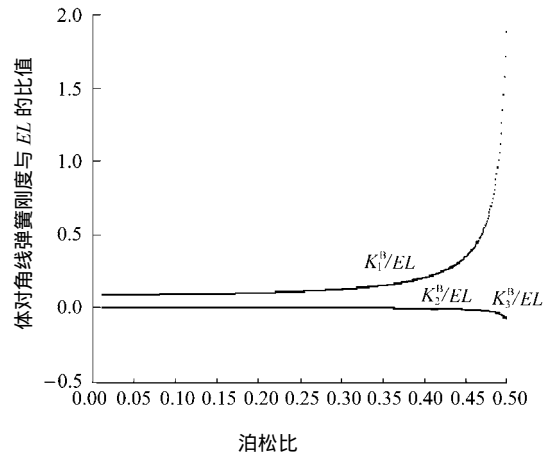


图 6 体对角线弹簧刚度与泊松比关系图

Fig.6 Relationship between the stiffness of the spring between common diagonal of cubic particles and Poisson's ratio

$$G = \frac{LE(6\mu - 7)}{72(1 + \mu)(2\mu - 1)}$$

4 CDEM 模型与二维链网模型以及 Gusev 模型比较

当使用正三角形单元来研究各向同性材料的平面问题时，物体内部相邻质点之间的材料力学特性可由 2 根弹簧表征。2 根弹簧方向正交，且有 1 根弹簧方向为相邻质点连线方向。对于平面应变问题，相邻质点连线方向的弹簧刚度为 $\frac{-\sqrt{3}Et(4\mu - 5)}{12(1 + \mu)(2\mu - 1)}$ ；与它正交弹簧的刚度为 $\frac{-\sqrt{3}Et(4\mu - 1)}{12(1 + \mu)(2\mu - 1)}$ 。

对于平面应力问题，相邻质点连线方向的弹簧刚度可表示为 $\frac{\sqrt{3}Et(5 + \mu)}{12(1 + \mu)(\mu - 1)}$ ；与它正交弹簧的刚度可表示为 $\frac{-\sqrt{3}Et(3\mu - 1)}{12(1 + \mu)(\mu - 1)}$ 。其中 E, t 及 μ 分别为弹性模量、厚度和泊松比。

以上结果与 Gusev 模型给出的弹簧方向和刚度一致。特别地，对于平面应变问题， $\mu = 0.25$ 时；对于平面应力问题， $\mu = 1/3$ 时；CDEM 模型与二维链网模型一致。

三维问题中，采用边长为 L 正六面体单元时，物体内部相邻质点之间各向同性材料的力学特性可由 3 根弹簧表征。弹簧刚度如表 5 所示。结果与 Gusev 模型给出的弹簧刚度一致。

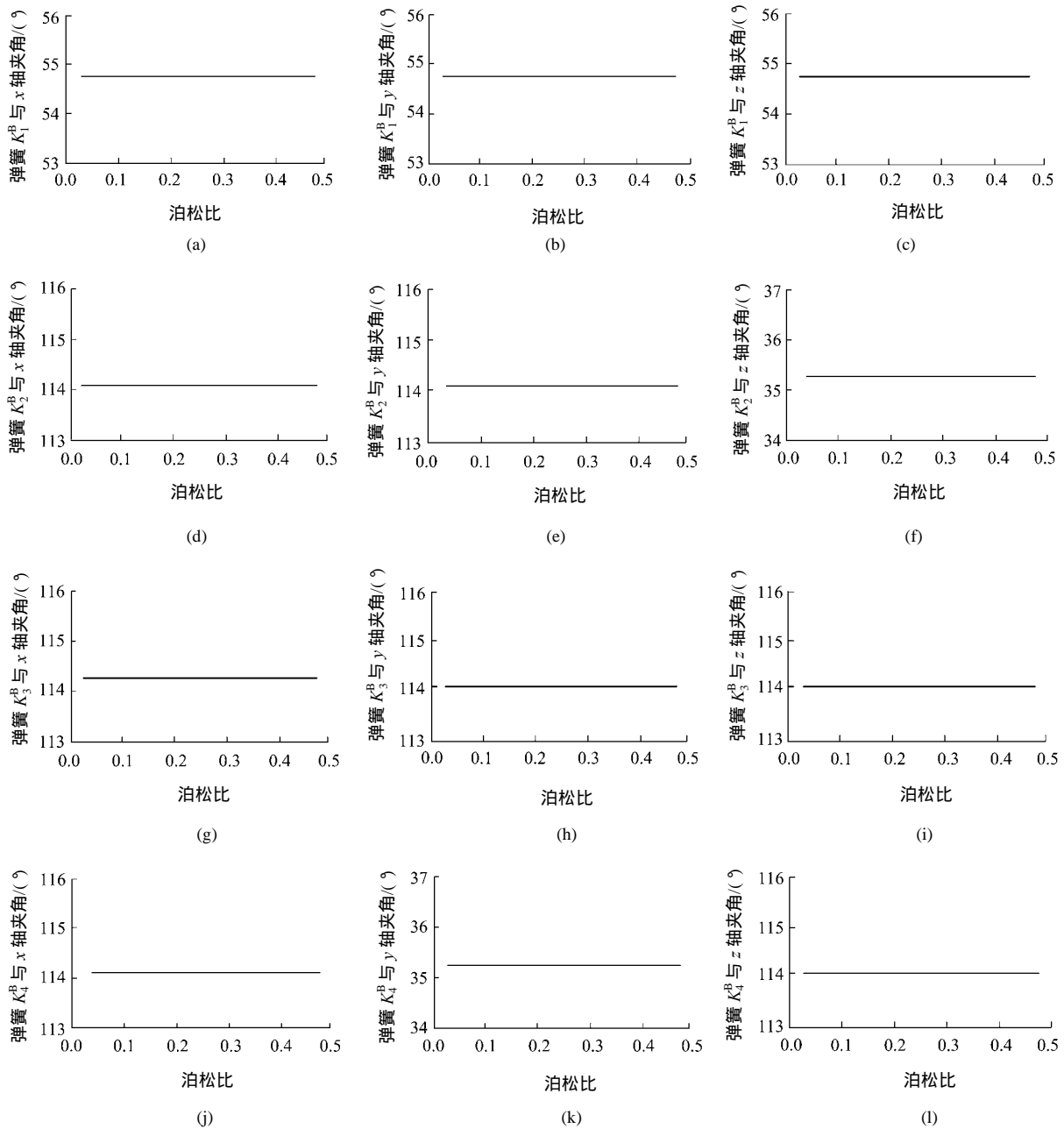


图 7 体对角线弹簧方向与泊松比关系图

Fig.7 Relationship between directions of spring between common diagonal of cubic particles and Poisson's ratio

表 5 边长为 L 立方体内部相邻质点之间弹簧刚度

Table 5 Stiffness of the spring between two neighbour nodes in $L \times L \times L$ cubic block

弹簧方向	体弹簧刚度	面弹簧刚度	棱弹簧刚度
法向	$\frac{EL(6\mu - 7)}{72(1 + \mu)(2\mu - 1)}$	$\frac{EL(3\mu - 4)}{18(1 + \mu)(2\mu - 1)}$	$\frac{-2EL}{9(1 + \mu)(2\mu - 1)}$
切向 1	$\frac{EL(12\mu - 5)}{144(1 + \mu)(2\mu - 1)}$	$\frac{EL(3\mu - 1)}{18(1 + \mu)(2\mu - 1)}$	$\frac{EL}{9(1 + \mu)(2\mu - 1)}$
切向 2	$\frac{EL(12\mu - 5)}{144(1 + \mu)(2\mu - 1)}$	$\frac{EL(3\mu - 1)}{18(1 + \mu)(2\mu - 1)}$	$\frac{EL}{9(1 + \mu)(2\mu - 1)}$

然而，链网模型和 Gusev 模型都不能模拟边界单元。CDEM 模型则能解决这一问题，因此比链网模型和 Gusev 模型更具普遍性。

5 结 语

本文给出了三维有限元刚度矩阵转化为离散元弹簧刚度的方法，研究了在立方体单元中，采用八节点有限元时，离散元弹簧的性质。得出以下结论：

(1) 当泊松比在开区间 $\left(0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}, 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}\right)$ 上变化时, 位于同一棱上两质点间的材料特

性可由 3 根弹簧等效。棱弹簧方向为: 在由该棱和平行于其且不在同一单元面上的棱所构成的平面上, 有两根弹簧; 另 1 根弹簧方向垂直于该平面。当泊松比满足 $\mu < 0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 或 $\mu > 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 时, 位于同一棱上两质点间的材料特性可由 3 个方向上的 5 根弹簧表示。

(2) 当泊松比满足 $0.25 - \frac{\sqrt{2}}{4} < \mu < 0.25 + \frac{\sqrt{2}}{4}$

时, 面对角线上两质点之间材料特性可由 3 个方向上的 3 根弹簧表示。弹簧方向为: 在由该面对角线和平行于其的面对角线所构成的平面上, 有两根弹簧; 另一弹簧方向垂直于该平面。当泊松比满足 $\mu < 0.25 - \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 或 $\mu > 0.25 + \frac{5\sqrt{2}}{32}$ 时, 面对角线上两质点之间材料特性可由 3 个方向上的 5 根弹簧表示。

(3) 体对角线上两质点之间材料特性可由 4 个方向上的 4 个弹簧来表示。弹簧方向为: 一根弹簧方向和该体对角线平行; 另 2 根弹簧化为 3 根弹簧, 每根弹簧间夹角为 120° 。这 3 根弹簧的方向与第 1 根弹簧的方向正交。

(4) 弹簧的方向仅与材料的泊松比有关而与材料弹性模量无关。

参考文献(References):

- [1] Cundall P A. A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock systems[A]. In: Proceedings of the ISRM Symposium on Rock Fracture [C]. Nancy: [s. n.], 1971. 11-18.
- [2] O'Connor K M, Dowding C H. Distinct element modeling and analysis of mining induced subsidence[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1992, 25(1): 1-24.
- [3] Li S H, Zhao M H, Wang Y N, et al. A new computational model of three-dimensional DEM-block and particle model[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004, 41(3): 436.
- [4] 李世海, 汪远年. 三维离散元计算参数选取方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(21): 3642-3645. (Li Shihai, Wang Yuannian. Study on Computational parameter selection of demin geomechanics[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(21): 3642-3645. (in Chinese))
- [5] 黎勇, 冯夏庭, 栾茂田, 等. 多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析方法(I)—基本原理[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(1): 12-16. (Li Yong, Feng Xiating, Luan Maotian, et al. Elastic and elastoplastic analysis methods of discontinuous deformation for multi-body system(I)—fundamentals[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(1): 12-16. (in Chinese))
- [6] 黎勇, 冯夏庭, 栾茂田, 等. 多体系统非连续变形的弹性及弹塑性分析方法(II)—数值算例[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(1): 17-23. (Li Yong, Feng Xiating, Luan Maotian, et al. Elastic and elastoplastic analysis methods of discontinuous deformation for multi-body system(II)—numerical examples[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(1): 17-23. (in Chinese))
- [7] Li S H, Zhao M H, Wang Y N, et al. A continuum-based discrete element method for continuous deformation and failure process[A]. In: WCCM VI in Conjunction with APCOM 04[C]. Beijing: [s. n.], 2004. 77.
- [8] Gusev A A. Finite element mapping for spring network representations of the mechanics of solids[J]. Physical Review Letter, 2004, 93(3): 034302(1)-034302(4).
- [9] Monette L, Anderson M P. Elastic and fracture properties of the two-dimensional triangular and square lattices[J]. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1994, 2: 53-66.
- [10] 刘晓宇, 梁乃刚, 李敏. 三维链网模型及其参数标定[J]. 中国科学(A 辑), 2002, 32(10): 887-894. (Liu Xiaoyu, Liang Naigang, Li Min. 3D network model and its parameter calibration[J]. Science in China(Series A), 2002, 32(10): 887-894. (in Chinese))