

功能梯度材料裂纹尖端动态应力场¹⁾

李春雨 邹振祝 段祝平*

(石家庄铁道学院, 石家庄 050043)

* (中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 研究受反平面剪切作用的功能梯度材料动态裂纹问题, 通过积分变换 - 对偶积分方程方法推出了裂纹尖端动态应力场. 时间域内的动态应力强度因子由 Laplace 数值反演获得. 研究表明功能梯度材料的梯度越大, 相应的裂纹问题的动态应力强度因子值越低.

关键词 功能梯度材料, 动态应力强度因子, 裂纹, 冲击, 积分方程

引 言

近年来, 功能梯度材料 (FGM) 受到国内外广泛关注, 目前已成为材料科学研究的前沿课题. 我国已将功能梯度材料的研究和开发列入国家高技术“863”计划. 从应用力学的观点来看, FGM 是非均匀体, 其非均匀性对材料的力学性能有很大影响. 为了给材料科学家和材料设计和制备人员提供技术支持, 力学工作者已经在 FGM 力学性能的理论 and 实验研究上做了大量工作, 其中很大一部分是有关 FGM 断裂特性研究的^[1~3]. 但是, 这些研究主要集中在静态断裂问题, 有关 FGM 动态断裂力学问题的报导很少.

本文研究了内有限尺寸裂纹的无限大 FGM 受裂纹面反平面冲击的动态断裂力学问题. 本文的主要目的是获得裂纹尖端动态应力场, 并考察 FGM 的材料非均匀性对动态应力强度因子的影响.

1 材料物性参数模型

由于数学处理上的困难, 现存的有关非均匀材料问题的解法大多数是假设材料各向同性、泊松比为常数, 而仅有弹性模量 (或剪切模量) 是空间变量的某一特定连续函数. 这种理想化大大简化了非均匀材料的分析.

目前, 已经提出并得以广泛应用的描述剪切模量变化的模型, 如 $\mu(y) = \mu_0|y|^m$, $0 \leq m < 1$ 模型^[4] 和 $\mu(y) = \mu_0 \exp(\gamma y)$ 模型^[1~3], 在解决非均匀的 FGM 动态断裂问题上, 都存在常微分方程求解方面的困难. 经过深入思考, 我们发现应用下述模型可解决这一问题

$$\mu(y) = \mu_0(1 + \alpha|y|)^2, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

其中非均匀参数 α 可以调整以便使 $\mu(y)$ 更接近实际的 FGM 剪切模量分布.

2 问题的描述

设一无限大功能梯度材料 (坐标系如图 1 所示), $y = 0$ 平面有一长为 $2a$ 的裂纹, 裂纹面受

1998-10-14 收到第一稿, 1999-02-25 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19704100) 资助项目.

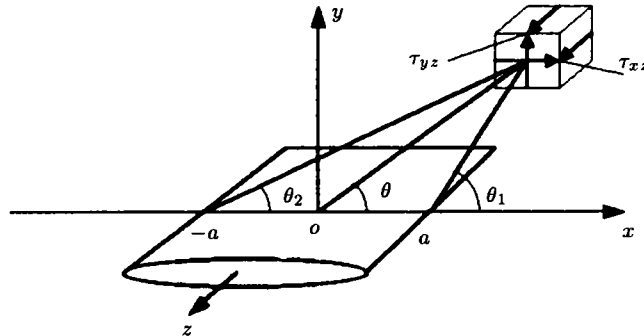


图 1 功能梯度材料 Griffith 裂纹受反平面剪切冲击作用
Fig.1 A Griffith crack in a functionally graded material under antiplane shear impact

反平面剪切冲击作用. 对于反平面剪切运动, 位移分量 u_x 和 u_y 处处为 0, u_z 是 x, y 和时间 t 的函数, 即有

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = w(x, y, t) \tag{2}$$

非零应力分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 为

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3}$$

式中 $\mu = \mu(y)$ 为剪切模量, 并且假设 $\mu(y)$ 服从式 (1) 分布.

运动方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\rho}{\mu(y)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4}$$

其中 $\mu'(y)$ 为 $\mu(y)$ 的导数, ρ 为 FGM 的密度, 并假设 ρ 为常数.

假设材料初始静止, 在 $t = 0$ 时刻, 一反平面剪切应力 τ_0 突加在裂纹面上并保持恒定. 因此, 边界条件为

$$\tau_{yz}(x, 0, t) = -\tau_0 H(t), \quad 0 \leq |x| < a; t > 0 \tag{5a}$$

$$w(x, 0, t) = 0, \quad |x| \geq a; t > 0 \tag{5b}$$

其中 $H(t)$ 为 Heaviside 单位阶跃函数. 初始条件为 0.

3 积分方程的导出

对式 (4) 实施 Laplace 变换得

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} \frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\rho p^2}{\mu(y)} w^* \tag{6}$$

由于对称性, 只需考虑 $x-y$ 平面的第一象限. 引入关于变量 x 的 Fourier 余弦变换, 并令

$$w^*(x, y, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(s, y, p) \cos(sx) ds \quad (7)$$

则由式 (6) 可得

$$\frac{\partial^2 U(s, y, p)}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{1 + \alpha y} \frac{\partial U(s, y, p)}{\partial y} - \left[s^2 + \frac{\rho p^2}{\mu_0(1 + \alpha y)^2} \right] U(s, y, p) = 0 \quad (8)$$

考虑 $y \rightarrow \infty$ 处的正则条件, 方程 (8) 的解可以表示为

$$U(s, y, p) = A(s, p)(1 + \alpha y)^{-1/2} K_\beta \left[(1 + \alpha y) \frac{s}{\alpha} \right] \quad (9)$$

其中 $K_\beta(\cdot)$ 是第二类修正 Bessel 函数, $\beta = \sqrt{1/4 + \rho p^2 / (\mu_0 \alpha^2)}$.

将式 (9) 代入式 (7) 可得

$$w^*(x, y, p) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A(s, p)(1 + \alpha y)^{-1/2} K_\beta \left[(1 + \alpha y) \frac{s}{\alpha} \right] \cos(sx) ds \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (3) 中应力分量 τ_{yz} 和 τ_{xz} 的 Laplace 变换, 再考虑 Laplace 变换域的边界条件, 可得一维对偶积分方程

$$\int_0^\infty B(s, p) \cos(sx) ds = 0, \quad x \geq a \quad (11a)$$

$$\int_0^\infty s B(s, p) G(s, p) \cos(sx) ds = \frac{\pi \tau_0}{2\mu_0 p}, \quad 0 \leq x < a \quad (11b)$$

其中

$$B(s, p) = A(s, p) K_\beta \left(\frac{s}{\alpha} \right) \quad (12)$$

$$G(s, p) = \frac{\frac{\alpha}{2} K_\beta \left(\frac{s}{\alpha} \right) - s K_\beta' \left(\frac{s}{\alpha} \right)}{s K_\beta \left(\frac{s}{\alpha} \right)} \quad (13)$$

对偶积分方程 (11) 可以采用 Copson 方法^[4] 求解, 其解为

$$B(s, p) = \frac{\pi \tau_0 a^2}{2\mu_0 p} \int_0^1 \sqrt{\xi} \Phi^*(\xi, p) J_0(sa\xi) d\xi \quad (14)$$

其中 J_0 为零阶第一类 Bessel 函数, 函数 $\Phi^*(\xi, p)$ 满足如下第二类 Fredholm 积分方程

$$\Phi^*(\xi, p) + \int_0^1 \Phi^*(\xi, p) M(\xi, \eta, p) d\eta = \sqrt{\xi} \quad (15)$$

式 (15) 中核函数 $M(\xi, \eta, p)$ 为

$$M(\xi, \eta, p) = \sqrt{\xi\eta} \int_0^\infty s \left[G\left(\frac{s}{\alpha}, p\right) - 1 \right] J_0(s\xi) J_0(s\eta) ds \quad (16)$$

4 裂纹尖端动态应力场

对式 (14) 中 $B(s, p)$ 实施分部积分, 并考虑 $x \rightarrow \infty$ 时 $K_\beta(x)$ 和 $K'_\beta(x)$ 的渐近特性, 经整理, 可得 Laplace 变换域内裂纹尖端局部应力场如下

$$\tau_{yz}^*(r_1, \theta_1, p) = \frac{K_{III}^*(p)}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + O(r_1^0) \quad (17a)$$

$$\tau_{xz}^*(r_1, \theta_1, p) = -\frac{K_{III}^*(p)}{\sqrt{2\pi r_1}} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + O(r_1^0) \quad (17b)$$

其中极坐标 r_1, θ_1 定义如图 1 所示.

式 (17) 中 $K_{III}^*(p)$ 为动态应力强度因子的 Laplace 变换, 其表达式为

$$K_{III}^*(p) = \tau_0 \sqrt{\pi a} \frac{\Phi^*(1, p)}{p} \quad (18)$$

其中 $\Phi^*(1, p)$ 是 $\Phi^*(\xi, p)$ 在裂纹尖端 $\xi = 1$ 处的值.

时间域内的动态应力强度因子可由 Laplace 反演求得. 即

$$K_{III}(t) = \tau_0 \sqrt{\pi a} \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\Phi^*(1, p)}{p} e^{pt} dp \quad (19)$$

其中 Br 代表 Bromwich 积分路径.

5 结果和讨论

本文研究了反平面剪切冲击荷载作用下带裂纹的功能梯度材料的瞬态响应问题. 通过积分变换 - 对偶积分方程方法获得了裂纹尖端动态应力场. 式 (19) 所示应力与 r_1 和 θ_1 的函数关系表明: 在功能梯度材料中, 裂纹尖端动态应力同样具有 $1/\sqrt{r_1}$ 的奇异性, 并且角分布函数 $f(\theta_1)$ 也和均匀材料情况完全相同. 这一结论与 FGM 静态裂纹问题^[5] 相同.

图 2 显示了经数值反演得到的标准化的动态应力强度因子 $K_{III}(t)/\tau_0\sqrt{\pi a}$ 随 $c_{20}t/a$ 变化的

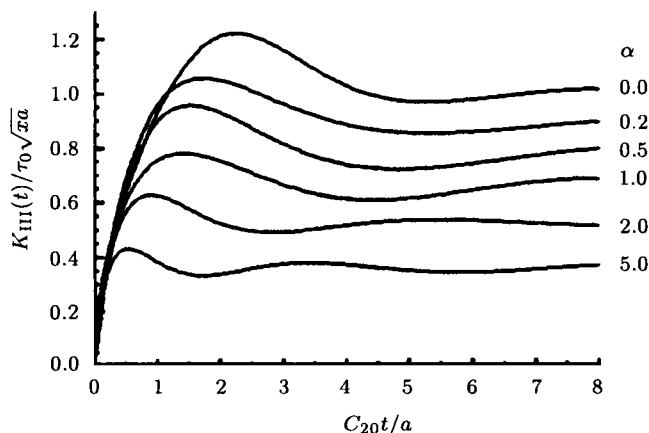


图 2 非均匀性参数对动态应力强度因子的影响

Fig.2 The influence of nonhomogeneity parameter on the dynamic stress intensity factor

情况。可以看出：所有曲线都是先达到一个峰值，然后在静态应力强度因子值附近波动，波幅逐渐衰减；功能梯度材料情况下的动态应力强度因子峰值低于均匀材料情况，并且 α 值越大，峰值降低越多。这意味着在工程结构中用功能梯度材料代替均匀材料可以降低裂纹扩展驱动力。从图 2 还可以看出动态应力强度因子到达峰值所需的时间也随 α 值增加而减少。

参 考 文 献

- 1 Delale F, Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50: 609~614
- 2 Erdogan F, Wu BH. The surface crack problem for a plate with functionally graded properties. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 449~456
- 3 Konda N, Erdogan F. The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, 47: 533~545
- 4 Sih GC, Chen EP. *Cracks in composite materials*. Mechanics of Fracture 6: The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981
- 5 Li Chunyu, Zou Zhenzhu, Duan ZP. Multiple isoparametric finite element method for nonhomogeneous media. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(2): 137~142

DYNAMIC STRESS FIELD AROUND THE CRACK TIP IN A FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

Li Chunyu Zou Zhenzhu Duan Zhuping*

(*Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China*)

* (*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract From the viewpoints of applied mechanics, Functionally Graded Materials (FGMs) are nonhomogeneous solids. The nonhomogeneity of FGMs has a great influence on their mechanical behavior. Recent years, significant attention has been paid to the fractural behavior of FGMs. However, the studies mainly concentrated on static problems. Report on dynamic fracture mechanics of FGMs is very few. In this paper, the problem of a Griffith crack in an unbounded FGM subjected to antiplane impact loading is considered. The main objective is to obtain the dynamic stress fields around the crack tip in FGMs and to investigate the effect of material nonhomogeneity on dynamic stress intensity factor. By using Laplace transform for the time variable and Fourier transform for the space variable, the problem is reduced to a pair of dual integral equations. The solution of the dual integral equations is expressed with a Fredholm integral equation of the second kind. The dynamic stress fields around the crack tip are obtained by considering the asymptotic behavior of Bessel function. The dynamic stress intensity factor in time domain is obtained by Laplace numerical inversion technique. The influence of material nonhomogeneity on the dynamic stress intensity factor is revealed graphically.

Key words functionally graded materials, dynamic stress intensity factor, crack, impact, integral equation

Received 14 October 1998, revised 25 February 1999.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19704100).