

波在饱和多孔介质与弹性固体介质 交界面上的界面效应*

赵成刚

高福平

(中国北京 100044 北方交通大学土建学院) (北京 100080 中国科学院力学研究所)

崔杰

(哈尔滨 150080 中国地震局工程力学研究所)

摘要 本文利用 Biot 饱和多孔介质动力学理论及饱和多孔介质和固体介质交界面的连续条件, 推导了平面 P_1 波以任意角从饱和多孔介质向弹性固体介质入射时, 反射快 P_1 波、慢 P_{II} 波和 SV 波和透射 P 波、SV 波系数的计算公式, 并给出算例。本文不考虑饱和多孔介质中液体渗流的能量耗散。

关键词 波的反射与透射 液体饱和多孔介质 Biot 动力学理论

中国图书分类号: P315.31

Boundary Effect of Wave Propagating from Liquid-filled Porous Medium to Solid Medium

Zhao Chenggang

(Civil Engineering Department, Northern Jiaotong University, Beijing China, 100044)

Gao Fuping

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

Cui Jie

(Institute of Engineering Mechanics, CSB, Harbin, 150080)

Abstract On the basis of Biot's dynamic theory for liquid-saturated porous solid, in this paper, the formulae are deduced for reflecting coefficients and transmitting coefficients on the interface between liquid-saturated porous solid and solid while P_1 wave is incident at different angles. The continuous conditions on the interface are used and dissipation of energy is not considered when the wave is propagating from the liquid-saturated porous solid medium to the solid medium. At the end, an exemple is given.

Keywords reflection and transmission of wave, liquid-saturated porous solid, Biot's dynamic theory

1 引言

随着科学技术的发展, 在地震工程、岩土工程、地球物理、海洋工程和声学等学科中, 均可遇到波在液体饱和多孔介质中传播问题。与均质弹性体相比, 两相饱和多孔介质中的波动问题要复杂

*国家自然科学基金资助项目(5978044)

收稿日期: 1998-02-27 赵成刚 男 43岁 教授 博士 北方交通大学土建学院 邮编 100044

得多。多孔介质(又称多孔固体,如岩石、预制混凝土、砂土等)是由固体骨架和连通的孔隙构成的复合媒质。M.A.Biot^[1]提出了流体饱和多孔介质中波的传播理论。此理论的一个重要结论就是,在液体饱和多孔介质中除了存在与均质弹性体中的P波和S波类似的快 P_1 波和S波外,还存在一种慢 P_{II} 波。地震波从震源向地表面传播的过程中,经常会遇到饱和岩土层,而后才到达地表面。地壳上部的连续固体骨架中包含着相互连通的孔隙和槽路,当其中充满液体时(也包括渗透性较强的饱和土体),它可看作两相饱和多孔介质;而不渗透的以及非饱和的岩土层可近似地按弹性固体介质处理。文[2]研究了波垂直入射时两种不同两相饱和和多孔介质界面上的反射与透射;文[3]研究了斜入射的情况。文[4]研究了波从单相介质向两相介质入射不考虑能量耗散时在交界面上的反射与透射;本文作者在文[5]中考虑了能量耗散的情况。与文献[4,5]的入射方向相反,本文研究了波从两相饱和多孔介质向弹性固体介质入射不考虑能量耗散时在交界面上的反射与透射效应。其它情况见文献[6]。

2 波的势函数

本文不考虑饱和多孔介质中液体渗流的能量耗散,这时Biot动力方程可见文[1],其解可用势函数表示为^[2]:

$$u = \text{grad}\Phi + \text{curl}H \quad (1)$$

$$U = \text{grad}\Psi + \text{curl}G \quad (2)$$

式中 Φ 和 H 分别为固体骨架部分的标量势函数和矢量势函数; Ψ 和 G 分别为液体部分的标量势函数和矢量势函数。 u 和 U 分别为固体骨架和液体的位移。根据弹性动力学理论可知,对平面应变问题,在弹性固体内存在两种波:一种为P波,一种为SV波。而在两相饱和和多孔介质中,由Biot动力学理论可知存在三种波:快 P_1 波、慢 P_{II} 波和SV波。

首先建立直角坐标系,见图1。饱和多孔介质和弹性固体介质交于 $y=0$ 。 $y>0$ 半空间为弹性固体介质, $y<0$ 为饱和多孔介质。本文假定不渗透的以及非饱和的岩土层近似地作为弹性固体介质。

2.1 饱和多孔介质中波的势函数

快 P_1 波从饱和多孔介质向弹性固体介质入射时,饱和多孔介质中波的势函数为:

固相:

$$\text{入射 } P_1 \text{ 波: } \Phi_1 = A_1 \exp[i(\omega t - k_1 \sin \alpha_1 \cdot x - k_1 \cos \alpha_1 \cdot y)] \quad (3)$$

$$\text{反射 } P_1 \text{ 波: } \Phi_1' = A_1' \exp[i(\omega t - k_1 \sin \alpha_1' \cdot x + k_1 \cos \alpha_1' \cdot y)] \quad (4)$$

$$\text{反射 } P_{II} \text{ 波: } \Phi_{II}' = A_2' \exp[i(\omega t - k_{II} \sin \alpha_2 \cdot x + k_{II} \cos \alpha_2 \cdot y)] \quad (5)$$

$$\text{反射 SV 波: } H' = A_3' \exp[i(\omega t - k_{III} \sin \alpha_3 \cdot x + k_{III} \cos \alpha_3 \cdot y)] \quad (6)$$

总标量势函数、矢量势函数分别为

$$\Phi_s' = \Phi_1 + \Phi_1' + \Phi_{II}' \quad (7)$$

$$H_s' = H' \quad (8)$$

以上各式中, ω 为波的圆频率; α_1 为 P_1 波的入射角; α_1' ($=\alpha_1$)为 P_1 波的反射角; α_2 和 α_3 分别为 P_{II} 波、SV波的反射角; A_1, A_1', A_2', A_3' 分别为入射 P_1 波、反射 P_1 波、反射 P_{II} 波、反射SV波在固相中的系数; k_1, k_{II} 和 k_{III} 为 P_1 波、 P_{II} 波和SV波的波数。

液相:

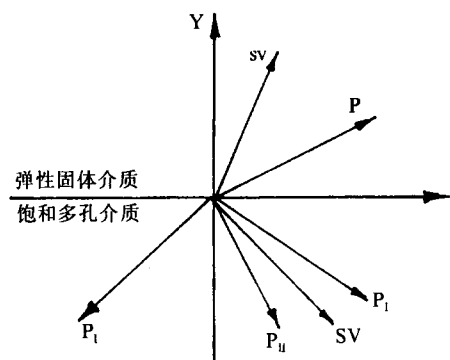


图1 波的反射与透射示意图

总标量势函数、矢量势函数分别为

$$\Psi = \eta_1(\Phi_1 + \Phi_1') + \eta_2\Phi_{11}' \quad (9)$$

$$G = \eta_3H' \quad (10)$$

式中, η_1 、 η_2 和 η_3 为 P_1 波、 P_{11} 波和 SV 波的液相参与系数:

$$\eta_1 = [\rho_{11}R - \rho_{12}Q - A(\frac{1}{c_1})^2] / (\rho_{22}Q - \rho_{12}R)$$

$$\eta_2 = [\rho_{11}R - \rho_{12}Q - A(\frac{1}{c_{11}})^2] / (\rho_{22}Q - \rho_{11}R) \quad (11)$$

$$\eta_3 = -\rho_{12} / \rho_{22}$$

式中, $A = PR - Q^2$, $P = \lambda' + 2\mu'$, μ' 和 λ' 为两相饱和多孔介质的拉梅常数; Q 、 R 为两相饱和多孔介质的物理常数, 其物理意义参见文[1]; ρ_{11} 、 ρ_{22} 分别表示固体的有效密度和流体的有效密度; ρ_{12} 为固液两相惯性耦合密度。 $\rho_{11} = (1 - \beta)\rho_s - \rho_{12}$, $\rho_{22} = \beta\rho_f - \rho_{12}$ (其中 ρ_s 和 ρ_f 分别为液相和固相的质量密度, β 为空隙率)。 c_1 、 c_{11} 为两相饱和介质中的 P_1 波、 P_{11} 波的波速, c_1 、 c_{11} 以及 SV 波的波速 c_{111} 可由式 (12) 求解。

$$\begin{aligned} (\frac{1}{c_{1,11}})^2 &= [B \mp (B^2 - 4AC)^{1/2}] / (2A) \\ (\frac{1}{c_{111}})^2 &= C / (\mu' \rho_{22}) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $A = PR - Q^2$, $B = \rho_{11}R + \rho_{22}P - 2\rho_{12}Q$, $C = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2$ 。

这样, P_1 波、 P_{11} 波和 SV 波的波数分别为

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}; k_{11} = \frac{\omega}{c_{11}}; k_{111} = \frac{\omega}{c_{111}} \quad (13)$$

2.2 弹性固体介质中波的势函数

由弹性动力学理论可知, 波在 $y > 0$ (如图 1) 的弹性固体介质中的势函数为:

$$\text{透射 P 波: } \Phi = B_1 \exp[i(\omega t - k_1 \sin \beta_1 \cdot x - k_1 \cos \beta_1 \cdot y)] \quad (14)$$

$$\text{透射 SV 波: } H = B_2 \exp[i(\omega t - k_2 \sin \beta_2 \cdot x - k_2 \cos \beta_2 \cdot y)] \quad (15)$$

式中, B_1 、 B_2 为透射 P 波和 SV 波的系数; k_1 、 k_2 分别为 P 波、SV 波的波数:

$$k_1 = \omega / \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad k_2 = \omega / \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (16)$$

式中, ω 为波的圆频率; λ 、 μ 为固体介质的拉梅常数; ρ 为固体介质的密度。

由 Snell 定律, 有下式成立:

$$k_1 \sin \alpha_1 = k_1 \sin \alpha_1' = k_{11} \sin \alpha_2 = k_{111} \sin \alpha_3 = k_1 \sin \beta_1 = k_2 \sin \beta_2 \quad (17)$$

式 (17) 中只有 α_2 、 α_3 、 β_1 和 β_2 是未知量, 它们可由式 (17) 求得。

以上各波的势函数的表达式中, 只有 A_1' 、 A_2' 、 A_3' 、 B_1 、 B_2 为待求的未知量。

3 反射与透射公式的推导

3.1 P_1 波从饱和多孔介质向不渗透的固体弹性介质入射的情况

波在饱和多孔介质和不渗透的固体弹性介质界面 ($y=0$) 上有 5 个连续性条件:

$$(1) \text{ 两侧固相骨架之间的切向位移连续: } u_x = u_x' \quad (18)$$

$$(2) \text{ 两侧固相骨架之间的法向位移连续: } u_y = u_y' \quad (19)$$

$$(3) \text{ 两侧法向总应力连续: } \sigma_y = \sigma_{ys}' + \sigma_{y1}' \quad (20)$$

(4) 不渗透弹性介质侧总切向应力应等于两相饱和介质侧的固相骨架的切向应力(假设液体不承担切向应力); $\tau_{xy} = \tau_{xy}^s$ (21)

(5) 两相介质中当 $y=0$ 时(即在边界面上)固相骨架的法向位移等于流体的法向位移:

$$U_{y1}' = u_{ys}' \quad (22)$$

利用弹性理论可以推得用势函数表示的弹性固体介质的位移和应力表达式(平面应变问题):

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} & u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \sigma_y = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (23)$$

两相介质的位移和应力可推导为:

$$\begin{cases} u'_{xs} = \frac{\partial \Phi'_s}{\partial x} + \frac{\partial H'_s}{\partial y} & u'_{ys} = \frac{\partial \Phi'_s}{\partial y} - \frac{\partial H'_s}{\partial x} \\ U'_{xL} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} & U'_{yL} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \\ \sigma'_{ys} = \lambda' \left(\frac{\partial u'_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial u'_{ys}}{\partial y} \right) + 2\mu' \frac{\partial u'_{ys}}{\partial y} + Q \left(\frac{\partial U'_{xL}}{\partial x} + \frac{\partial U'_{yL}}{\partial y} \right) \\ \sigma'_{yL} = Q \left(\frac{\partial u'_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial u'_{ys}}{\partial y} \right) + R \left(\frac{\partial U'_{xL}}{\partial x} + \frac{\partial U'_{yL}}{\partial y} \right) \\ \tau'_{xy} = \mu' \left(\frac{\partial u'_{xs}}{\partial y} + \frac{\partial u'_{ys}}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (24)$$

将 P_1 波入射时的势函数式(14)、式(15)代入式(23), 并利用 $y=0$ (在交界面上)的条件, 可推得下式:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \\ m_{41} & m_{42} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \exp[i(\omega t - k_1 \sin \beta_1 \cdot x)] \quad (25)$$

式中 m_{ij} 的表达式如下:

$$\begin{aligned} m_{11} &= -ik_1 \sin \beta_1; & m_{12} &= -ik_2 \sin \beta_2; & m_{21} &= -ik_1 \cos \beta_1; \\ m_{22} &= ik_2 \cos \beta_2; & m_{31} &= -\lambda k_1^2 - 2\mu k_1^2 \cos^2 \beta_1; & m_{32} &= 2\mu k_2^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2; \\ m_{41} &= -2\mu k_1^2 \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1; & m_{42} &= \mu k_2^2 (\sin^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_2) \end{aligned} \quad (26)$$

将 P_1 波入射时的势函数式(3)至式(10)代入式(24)并利用 $y=0$ (交界面)的条件, 可以得到:

$$\begin{Bmatrix} u'_{xs} \\ u'_{ys} \\ \sigma'_{ys} + \sigma'_{yL} \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{Bmatrix} \exp[i(\omega t - k_1 x \sin \alpha_1)] \quad (27)$$

式(27)中 n_{ij} 的表达式如下:

$$\begin{aligned} n_{11} &= -ik_1 \sin \alpha_1; & n_{12} &= -ik_2' \sin \alpha_1'; & n_{13} &= -ik_{11} \sin \alpha_2 & n_{14} &= ik_{111} \cos \alpha_3; \\ n_{21} &= -ik_1 \cos \alpha_1; & n_{22} &= ik_1' \cos \alpha_1'; & n_{23} &= ik_{11} \cos \alpha_2; & n_{24} &= ik_{111} \sin \alpha_3; \\ n_{31} &= -k_1^2 [\lambda' + Q(1 + \eta_1) + \eta_1 R + 2\mu' \cos^2 \alpha_1] \\ n_{32} &= -k_1'^2 [\lambda' + Q(1 + \eta_1) + \eta_1 R + 2\mu' \cos^2 \alpha_1] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} n_{33} &= -k_{11}^2[\lambda' + Q(1 + \eta_2) + \eta_2 R + 2\mu' \cos^2 \alpha_2] \\ n_{34} &= -2\mu' \cdot k_{111}^2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \cos \alpha_3; \\ n_{41} &= -2\mu' k_1^2 \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1; \quad n_{42} = 2\mu' k_1'^2 \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1; \\ n_{43} &= 2\mu' k_{11}^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2; \quad n_{44} = \mu' k_{111}^2 (\sin^2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_3) \end{aligned}$$

把势函数式(7)至式(10)代入交界面上的第五个连续性条件式(22)(其中利用了式(24)中的有关公式),可以得到下式:

$$(1 - \eta_1)n_{21}A_1 + (1 - \eta_1)n_{22}A_1' + (1 - \eta_2)n_{23}A_2' + (1 - \eta_3)n_{24}A_3' = 0 \quad (29)$$

由交界面上的连续性条件式(18)至式(21)可知,式(25)应等于式(27),再利用式(17),有下式成立:

$$[m_{ij}]_{4 \times 2} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = [N_{ij}]_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{Bmatrix} \quad (30)$$

由式(29)和式(30)可得到下式:

$$\begin{bmatrix} n_{12} & n_{13} & n_{14} & -m_{11} & -m_{12} \\ n_{22} & n_{23} & n_{24} & -m_{21} & -m_{22} \\ n_{32} & n_{33} & n_{34} & -m_{31} & -m_{32} \\ n_{42} & n_{43} & n_{44} & -m_{41} & -m_{42} \\ n_{52} & n_{53} & n_{54} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \\ B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_{11}A_1 \\ -n_{21}A_1 \\ -n_{31}A_1 \\ -n_{41}A_1 \\ -n_{51}A_1 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

式中, $n_{51} = (1 - \eta_1)n_{21}$; $n_{52} = (1 - \eta_1)n_{22}$; $n_{53} = (1 - \eta_2)n_{23}$; $n_{54} = (1 - \eta_3)n_{24}$ 。

利用式(31)就可以求出 A_1' 、 A_2' 、 A_3' 、 B_1 、 B_2 。在式(31)中不考虑能量耗散时反射和透射系数与频率无关。

3.2 P_1 波从饱和多孔介质向可渗透的非饱和多孔介质入射的情况

波在饱和多孔介质和可渗透的非饱和多孔介质(按固体单相弹性介质处理)界面($y=0$)上有5个连续性条件:

$$(1) \text{ 两侧固相骨架之间的切向位移连续: } u_x = u'_{xS} \quad (32)$$

$$(2) \text{ 两侧固相骨架之间的法向位移连续: } u_y = u'_{yS} \quad (33)$$

$$(3) \text{ 两侧法向固相应力连续: } \sigma_y = \sigma'_{yS} \quad (34)$$

(4) 单相介质侧总切向应力应等于两相饱和介质侧的固相骨架的切向应力

$$\text{(假设液体不承担切向应力): } \tau_{xy} = \tau'_{xy} \quad (35)$$

$$(5) \text{ 两相介质中当 } y=0 \text{ 时(即在交界面上)流体中的法向应力为零: } \sigma'_{y1} = 0 \quad (36)$$

将势函数式(3)至式(10)代入式(24)并利用式(17)以及 $y=0$ (界面)的条件,可以得到:

$$\begin{Bmatrix} u'_{xS} \\ u'_{yS} \\ \sigma'_{yS} \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{Bmatrix} \exp[i(\omega t - k_1 x \sin \alpha_1)] \quad (37)$$

其中, $n_{ki}(i=1, 2, 3, 4, k=1, 2, 4)$ 与式(28)中相同;而 n_{3i} 如下:

$$\begin{aligned} n_{31} &= -k_1^2[\lambda' + Q\eta_1 + 2\mu' \cos^2 \alpha_1] \\ n_{32} &= -k_1'^2[\lambda' + Q\eta_1 + 2\mu' \cos^2 \alpha_1] \\ n_{33} &= -k_{11}^2[\lambda' + Q\eta_2 + 2\mu' \cos^2 \alpha_2] \\ n_{34} &= -2\mu' \cdot k_{111}^2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (38)$$

把式(7)至式(10)代入交界面上的五个连续性条件式(36)并利用式(24)中的有关公式,得:

$$-k_1^2(Q+R\eta_1)A_1 - k_1'^2(Q+R\eta_1)A_1' - k_{11}^2(Q+R\eta_2)A_2' = 0 \quad (39)$$

与3.1节相同,可以求得完全相同的式(25)、式(26)。即本节情况的 $[m_{ij}]_{4 \times 2}$ 和3.1节的完全相同。

利用交界面上的连续性条件式(32)至式(36),同理可得到式(31)。但此时, $n_{ij}(i, j=1, 2, 3, 4)$ 应由本小节的情况确定;并且由式(39)可以得到:

$$n_{s1} = -k_1^2(Q+R\eta_1); \quad n_{s2} = -k_1'^2(Q+R\eta_1); \quad n_{s3} = -k_{11}^2(Q+R\eta_2); \quad n_{s4} = 0 \quad (40)$$

同理,利用式(31)可求出 P_1 波从两相介质向可渗透的固体介质入射时的反射系数和透射系数。其中 $[m_{ij}]_{4 \times 2}$ 可用式(26)计算, $[n_{ij}]$ 则用本节的结果计算。当不考虑流体渗流的能量耗散时,反射和透射系数与频率无关。

采用类似的方法,可以求出 P_{11} 波、SV波入射到上述边界上的反射和透射系数。

4 算例

作为数值计算的例子,本文只讨论 P_1 波从两相饱和多孔介质向不渗透弹性固体介质入射时反射和透射系数随入射角的变化规律。两种介质的物理力学参数列于表1。

表1 固体弹性介质和两相饱和多孔介质的物理力学参数

固体弹性介质				饱和多孔介质						
密度(kg/m ³)		拉梅常数(GPa)		密度(kg/m ³)		拉梅常数(GPa)		物理常数(GPa)		孔隙率
ρ	λ	μ	ρ_s	ρ_{12}	ρ_f	λ'	μ'	Q	R	β
2100	2.00	1.70	2640	-10	1000	4.43	2.70	0.74	0.32	0.26

已知入射角的情况下,利用本文所推导的公式(31)即可求得波的反射系数及透射系数。

取地震波入射角的变化范围为 $0^\circ \sim 90^\circ$ 。计算结果绘于图2。它表示反射系数为 A_1'/A_1 、 $A_2'/(1+\eta_2)/[A_1(1+\eta_1)]$ 、 $A_3'/(1+\eta_3)/[A_1(1+\eta_1)]$;透射系数为 $B_1/[A_1(1+\eta_1)]$ 、 $B_2/[A_1(1+\eta_1)]$ (其中 A_1 为已知入射波的幅值)。

由图2知:(1)当入射角为 0° 时,不产生波型的转换,即 P_1 波入射时无反射和透射的SV波存在;(2)当入射角接近于 90° (即掠入射)时,反射系数趋于-1,这时发生全反射。

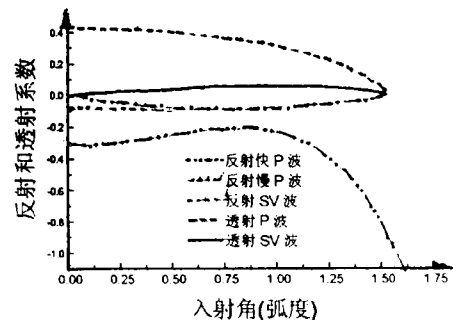


图2 P_1 波入射时反射与透射系数和入射角的关系

参 考 文 献

- 1 Biot, M.A., Theory of Propagation of Elastic Wave in a Fluid-saturated Porous Solid, J. Acoust. Soc. Am., Vol.28, pp.168-191, 1956
- 2 Dereiewicz, H., The Effect of Boundries on Wave Propagation in a Liquid-filled Porous Solid: part I. Reflection of Plane Waves at a Free Plane Boundary (Non-dissipative Case). Bull. Seism. Soc. Am., Vol.50, pp.599-607, 1960
- 3 乔文孝等. 声波在两种多孔介质界面上的反射和透射. 地球物理学报, 35卷2期, 242-248, 1992年3月
- 4 Hajra, W., and Mukhopadhyay, A., Reflection and Refraction of Seismic Waves Incident Obliquely at the Boundary of Liquid-Saturated Porous Solid. Bull. Seism. Soc. Am., Vol.72, pp.1509-1533, 1982
- 5 赵成刚, 高福平等. 波从单相介质向两相饱和和多孔介质入射时在交界面上的反射与透射. 地震工程与工程振动, 18卷1期, 131-139, 1998年3月
- 6 高福平. 波在两相饱和和多孔介质和固体单相介质交界面的反射和透射效应. 北方交通大学硕士学位论文, 1997年1月