

SUPER CE/SE 的新算法及其在爆炸力学中的应用

王刚^{①②}, 王景焘^①, 刘凯欣^{①③*}

① 北京大学工学院湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871;

② 中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100190;

③ 北京大学应用物理与技术研究中心, 北京 100871

* 联系人, E-mail: kliu@pku.edu.cn

收稿日期: 2009-06-29; 接受日期: 2009-08-03

国家自然科学基金资助项目(批准号: 10572002, 10732010)

摘要 研究了 SUPER CE/SE 的新算法及其在爆炸力学中的应用. 算法和模型方面, 主要包括改进 CE/SE 算法、快速杂交粒子水平集方法、常用化学反应模型和两流体模型. 使用上述算法和模型, 对激波楔面反射、爆炸焊接、爆轰波胞格结构和气液两相爆轰问题进行了数值模拟. 数值结果表明, 该文采用的算法具有计算精度高、应用范围广和兼容性强等优点, 可广泛应用于爆炸力学的数值研究.

关键词

新算法

SUPER CE/SE

数值模拟

爆炸力学

爆炸力学研究直接关系到国防和民生, 它涉及可压缩流动、不可压缩流动、弹塑性流动、化学反应流动和两相流动等诸多领域. 随着数值方法和计算机硬件的发展, 数值模拟在爆炸力学研究中的作用日益突显. 爆炸力学的数值模拟需要能够捕捉激波间断的高精度算法和准确的界面捕捉方法, 还需要数值算法能够与物理和化学等模型准确结合.

在爆炸力学的应用领域, 目前国外商用软件(例如 LS-DYNA, AUTODYN)占主导地位. 这些商用软件的核心算法模块往往保密, 不便于深层次开发. 因此, 计算爆炸力学在我国逐渐发展起来, 其中起步较早、现已形成一定计算规模的有北京应用物理与计算数学研究所的 METH 系列程序^[1]和北京理工大学的 MMIC 系列程序等^[2]. 目前计算爆炸力学主要采用发展较早, 较为成熟的数值算法和模型, 例如使用 VOF 方法追踪界面^[3], 使用迹线法追踪颗粒运动等^[4].

本文主要研究 SUPER CE/SE 采用的新算法及其

在爆炸力学中的应用. SUPER CE/SE 采用改进 CE/SE (space-time Conservation Element and Solution Element method) 算法^[5,6]离散控制方程, 使用快速杂交粒子水平集方法追踪物质界面, 使用两流体模型处理气体-颗粒两相流, 并能结合常用化学反应模型(二步模型, 基元反应模型和 Sichel 的二步模型). 采用上述数值方法和模型, 本文着重模拟了激波楔面反射、爆炸焊接、爆轰波胞格结构和气液两相爆轰问题. 通过对数值结果的讨论和对比, 说明了新算法模拟爆炸力学问题时的适用性.

1 数值方法和模型

计算爆炸力学涉及数值算法、流体力学、固体力学、物理学和化学等众多学科. 本节主要考察 SUPER CE/SE 中的改进 CE/SE 算法、及其与快速杂交粒子水平集方法、常用的化学反应模型和两流体模型的结合. 可压缩流体、不可压缩流体和流体弹塑性模型可

引用格式: 王刚, 王景焘, 刘凯欣. SUPER CE/SE 的新算法及其在爆炸力学中的应用. 中国科学 G 辑, 2009, 39(9): 1214—1220

Wang G, Wang J T, Liu K X. New numerical algorithms in SUPER CE/SE and their applications in explosion mechanics. Sci China Ser G, doi: 10.1007/s11433-009-0266-z

查阅相关文献^[7,8].

1.1 改进 CE/SE 算法

CE/SE算法是Chang^[9]于1995年提出的. CE/SE算法从根本上区别于传统的方法: 它将时间和空间一起来同等对待; 利用守恒型积分方程, 通过定义解元和守恒元使得局部和整体都严格满足守恒律; 不需要采用算子分裂或者方向交替技术; 可以较好地求解间断流场, 具有较高的分辨率. 学者们也发现CE/SE算法也存在一些问题, 例如单元结构复杂、没有高阶精度格式和很难向三维推广等. 为此, Zhang等人^[10]、张德良等人^[11]和Liu和Wang等人^[5,6]对原有的CE/SE算法进行了不同程度的改进.

在本文采用的改进 CE/SE 算法中, 守恒元被定义为长方体, 解元是垂直于坐标轴的3个平面(见图 1). 这种新的网格划分方式具有结构简单、物理概念清晰和便于向三维推广等优点, 而且守恒量在解元上进行高阶展开比较方便. 在解元 SE(P')中, 任意一点(t, x, y)上的守恒量 M 可用高阶 Taylor 展开的 M^* 表示, 例如对于二维用二阶 Taylor 展开可以得到:

$$\begin{aligned}
 & M^*(\delta x, \delta y, \delta t)_{P'} \\
 &= M_{P'} + (M_x)_{P'} \delta x + (M_y)_{P'} \delta y + (M_t)_{P'} \delta t \\
 &+ \frac{1}{2} (M_{xx})_{P'} (\delta x)^2 + \frac{1}{2} (M_{yy})_{P'} (\delta y)^2 + \frac{1}{2} (M_{tt})_{P'} (\delta t)^2 \\
 &+ (M_{xy})_{P'} \delta x \delta y + (M_{yt})_{P'} \delta y \delta t + (M_{xt})_{P'} \delta x \delta t, \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中 $\delta x = x - x_{P'}$, $\delta y = y - y_{P'}$, $\delta t = t - t_{P'}$. 那么, 二

维二阶精度的 CE/SE 格式可以由方程(1)得到.

1.2 快速杂交粒子水平集方法

在Euler型数值方法中, 多物质计算的一个关键困难在于如何高精度捕捉物质界面. 水平集方法 (Level Set Method)是Osher和Sethian于1988年提出的^[12]. 在水平集方法中首先引入一个水平集函数, 让水平集函数按照流场中一定的速度分布进行演变, 当水平集函数等于零时它就是物质界面. 水平集方法是一种较好的界面追踪方法, 它克服了在一般波前(波阵面)追踪方法中必须首先构造出具体波阵面, 因而难以处理波阵面拓扑结构变化的弱点.

Adalsteinsson等人^[13]1995年提出了局域快速算法的思想, 将求解区域限制在运动边界周围几个网格中, 大大提高了计算速度, 并使计算复杂程度达到 $O(Nw)$ 阶量级, 其中 N 是计算空间中总网格点数, w 是窄带的宽度. Peng等人^[14]又将局域快速算法的思想运用到基于偏微分方程描述水平集方法中, 提出了基于偏微分方程快速水平集方法. 这种方法比较容易实现, 而且将计算复杂程度基本上可控制在 $O(N)$ 阶量级内.

为了解决水平集方法容易丢失质量的缺点, Enright等人^[15]将无质量Lagrangian粒子引入水平集方法中, 把基于Lagrange描述的粒子方法和基于Euler描述的水平集方法相结合, 提出了杂交粒子水平集方法, 比较好地克服了普通水平集方法不易保持质量守恒的缺点.

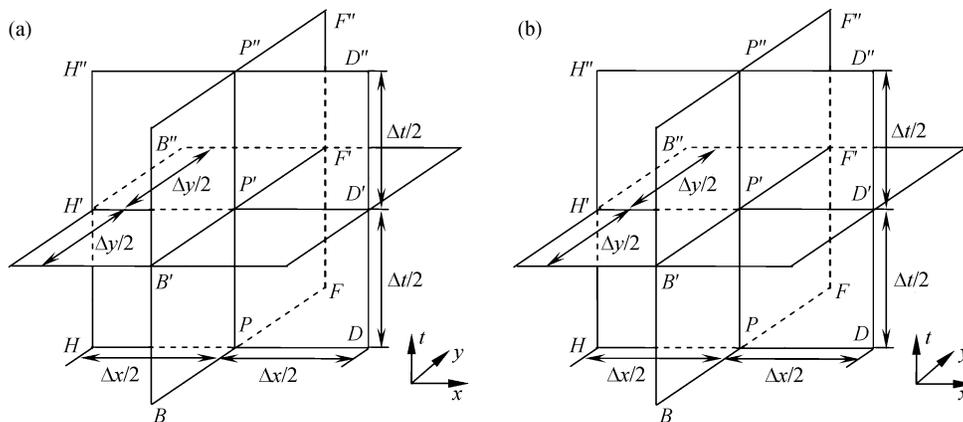


图 1 改进的高精度 CE/SE 算法的解元和守恒元网格结构

(a) 解元; (b)守恒元

1.3 常用化学反应模型

二步模型将复杂的反应过程简化为两个阶段: 诱导阶段和放热阶段. 本文采用二级可逆反应形式^[16], 诱导进行度 α 和反应进行度 β 的变化速率 ω_α 和 ω_β 表达式为

$$\begin{cases} \omega_\alpha = -k_\alpha \rho \exp\left(-\frac{E_\alpha}{RT}\right), \\ \omega_\beta = \begin{cases} 0 (\alpha > 0) \\ \omega_\beta^+ + \omega_\beta^- = -k_\beta p^2 \left[\beta^2 \exp\left(-\frac{E_\beta}{RT}\right) - (1-\beta)^2 \exp\left(-\frac{E_\beta + Q}{RT}\right) \right] (\alpha \leq 0), \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

其中 k_α , k_β 分别为诱导反应和放热反应速率常数; ρ , T , p 和 R 分别为参加反应的可燃气体的密度、温度、压力和气体常数; E_α 为诱导反应的活化能; E_β 和 $E_\beta + Q$ 分别表示正逆向化学反应活化能, Q 为单位质量气体的反应热. 虽然二步模型只考虑气体反应热 Q 的释放, 但抓住了爆轰波传播过程的主要特征, 并且不需要很大的计算量.

基元反应模型通过分子级别的基元反应对化学反应进行描述. 反应物和生成物的质量通过叠加各基元反应的物质生成和分解求得. 基元反应模型能够真实地反映爆轰反应过程. 不同的基元反应所采用的组分、方程数目各不相同, 例如本文采用 8 组分 20 基元反应模型描述 $H_2 + O_2$ 爆轰的化学反应机制^[17].

2002 年, Sichel 等人^[18]提出一种考虑组分的二步模型. Sichel 的二步模型中假设各种组分质量分数以相同的速率变化, 即用反应进行度 β 表示各组分的反应进行度:

$$Y_i = (Y_{Ri} - Y_{Pi})\beta + Y_{Pi}, \quad (3)$$

其中 Y_{Ri} 为初始反应物中各组分的的质量分数, Y_{Pi} 为反应达到平衡后产物中各组分的的质量分数. 这种方法得到的气体组分分布虽然并不准确, 但还是大大提高了气动参数的准确性.

1.4 两流体模型

假定气体-液滴流场具有以下性质: 处于同一时空位置的气相混合物中的各种气体具有相同温度; 液滴的初始半径相同, 且在剥离、蒸发过程中保持球

形; 液滴内温度是均匀分布的; 液滴的总体积与混合物的体积相比可以忽略; 液滴作为连续介质处理; 液滴间的相互作用可以忽略; 液滴剥离、蒸发成为气体后, 与其他气体瞬间均匀混合并完成反应; 化学反应释放的能量仅被气体吸收; 气相为理想气体. 描述气体和液滴的运动方程如下.

气相的守恒方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = S, \quad (4)$$

其中 $Q = (\rho, \rho u, \rho v, E)$, $E = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (E+p)u)$, $F = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E+p)v)$, $S = (I_p, -F_x + u_p I_p, -F_y + v_p I_p, -(u_p F_x + v_p F_y) + ((u_p^2 + v_p^2)/2 + q_r) I_p)$.

液相的守恒方程:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial F_p}{\partial y} = S_p, \quad (5)$$

其中 $Q_p = (\rho_p, \rho_p u_p, \rho_p v_p, N)$, $E_p = (\rho_p u_p, \rho_p u_p^2, \rho_p u_p v_p, N u_p)$, $F_p = (\rho_p v_p, \rho_p u_p v_p, \rho_p v_p^2, N v_p)$, $S_p = -(I_p, -F_x + u_p I_p, -F_y + v_p I_p, 0)$.

上面两个方程组分别表示气相和液相的质量守恒, 动量守恒和能量守恒, 其中 ρ 和 ρ_p 为气相和液相的密度; u , v , u_p 和 v_p 为气相和液相的速度; p 为压力; $E = p/(\gamma-1) + \rho(u^2 + v^2)/2$ 为单位质量的总能量; I_p 为液滴剥离和蒸发引起的密度变化; F_x 和 F_y 为气体作用于单位体积的混合物中的液滴上的力; q_r 为单位质量燃料的化学反应热; N 为单位体积中的液滴数目. I_p , F_x 和 F_y 的具体形式可参考文献^[19]. 气相和液相之间的质量、动量和能量传递是通过控制方程的源项来实现.

2 应用领域

2.1 可压缩流动

可压缩流动问题的数值求解需要有能够捕捉激波的高精度算法, 改进 CE/SE 算法完全能够胜任这一需求^[6]. 下面通过激波面反射算例说明改进 CE/SE 算法在可压缩流动领域的优势.

当一个激波与楔面相碰时, 激波本身会从楔面表面反射回来, 并且引起的流动会转过拐角, 这一过程称为激波反射. 实验和理论都表明有 4 种反射类型可能发生: 正规反射(regular reflection)、单马赫反射(single-Mach reflection)、复杂马赫反射(complex-

Mach reflection)、双马赫反射(double-Mach reflection)^[20].

计算区域为 4.0×4.0 , 左边界条件为来流, 其余边界条件为固壁. 图 2 给出了使用改进CE/SE算法计算得到的4种反射类型(密度等值线分布图). 4种不同类型激波反射的计算条件如表 1 所示. 从图 2 中可以看出, 改进CE/SE算法能够准确模拟四种类型激波反射, 并能很好和实验吻合^[20]. 在使用较少计算网格情况下能捕捉复杂马赫反射和双马赫反射的复杂流场. 这说明改进CE/SE算法具有较高的计算精度. 改进CE/SE算法还具有边界条件易处理的优点.

表 1 4 种类型激波反射的计算条件

反射类型	激波马赫数	楔面角度/(°)	计算网格
I 正规反射	3.84	60	200×200
II 单马赫反射	1.5	30	200×200
III 复杂马赫反射	5.2	20	400×400
IV 双马赫反射	4.64	40	400×400

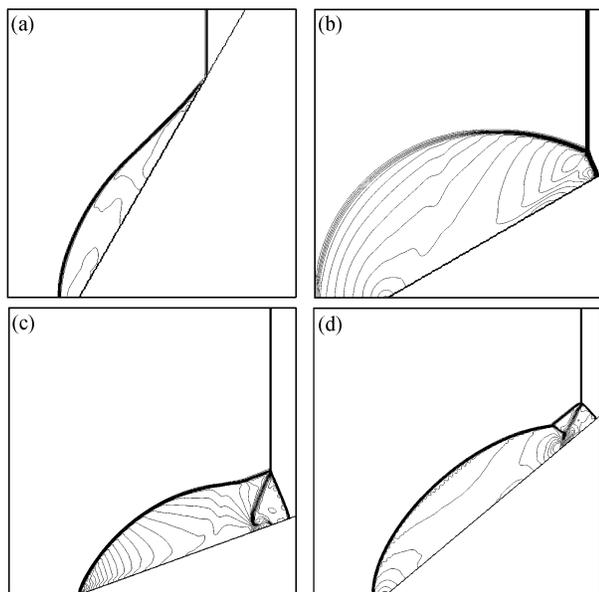


图 2 4 种类型激波反射

(a) 正规反射(200×200); (b) 单马赫反射(200×200); (c) 复杂马赫反射(400×400); (d) 双马赫反射(400×400)

2.2 不可压缩流动

不可压缩流动在爆炸力学中的应用可能不像可压缩流动那样广泛, 但它是弹塑性流动的基础. SUPER CE/SE采用人工压缩法来耦合速度和压力, 目前

可以计算稳态和非稳态的不可压缩流动. 数值结果表明, 改进CE/SE算法在不可压缩流动中也保持着很高的计算精度^[7].

2.3 弹塑性流动

弹塑性流动是爆炸力学的一个重要研究领域. SUPER CE/SE可采用的塑性本构模型包括理性塑性模型, 线性硬化模型和Johnson-Cook模型, 可采用的状态方程为Nis-Grneisen状态方程和Jones-Wilkins-Lee (JWL)状态方程. SUPER CE/SE已经广泛应用于弹塑性流动的数值模拟, 例如撞击问题^[21], 侵彻问题^[22], 爆炸焊接问题等^[23], 其中爆炸焊接问题的计算实现了气-液-固多物质一体化计算, 是许多商业软件难以完成的, 我们采用快速杂交粒子水平集方法实时追踪物质界面解决了这一问题. 爆炸焊接, 亦称爆炸复合, 是一种特殊的工程焊接技术. 它是采用炸药爆炸作为能源, 利用爆炸推动两金属或金属体产生高速碰撞, 从而使金属体焊接在一起的技术.

计算模型初始时刻各个板的位置如图 3(a)所示. 基板是长 40 mm, 厚 7 mm 的 LY12 铝板, 基板的底部是 x 方向固壁边界条件. 飞板是长度 40 mm, 厚 1 mm 的薄钢板. 飞板和基板之间的初始距离是 4 mm. 炸药起爆位置在炸药的左下角, 且在初始时刻起爆. 计算区域是 45×20 mm, 网格数 1350×600 , 总计算时间为 $15 \mu\text{s}$.

图 3(b)和(c)分别表示焊件在 9 和 $15 \mu\text{s}$ 时刻的密度等值云图. 从图 3(b)中可以看到钢板和铝板之间波纹状分界面. 数值结果还表明, 最高速度位于碰撞点, 这导致了界面处的高塑性应变和剪切应力, 最大压力也出现在界面的碰撞点上, 碰撞点压力的范围在 1~16 GPa. 压力和塑性变形同时引起界面温度升高. 可以认为在爆炸焊接过程中, 碰撞界面温度达到金属熔化温度并快速冷却, 从而将两种金属焊接到一起.

2.4 化学反应流动

爆炸力学需要研究化学反应和力学作用的强耦合问题, 化学反应过程的准确模拟是数值结果能否与实际相符合的重要因素. SUPER CE/SE目前能够广泛应用于气相爆轰的数值模拟^[6]. 本文通过模拟爆轰波的胞格结构对SUPER CE/SE中的化学反应模型

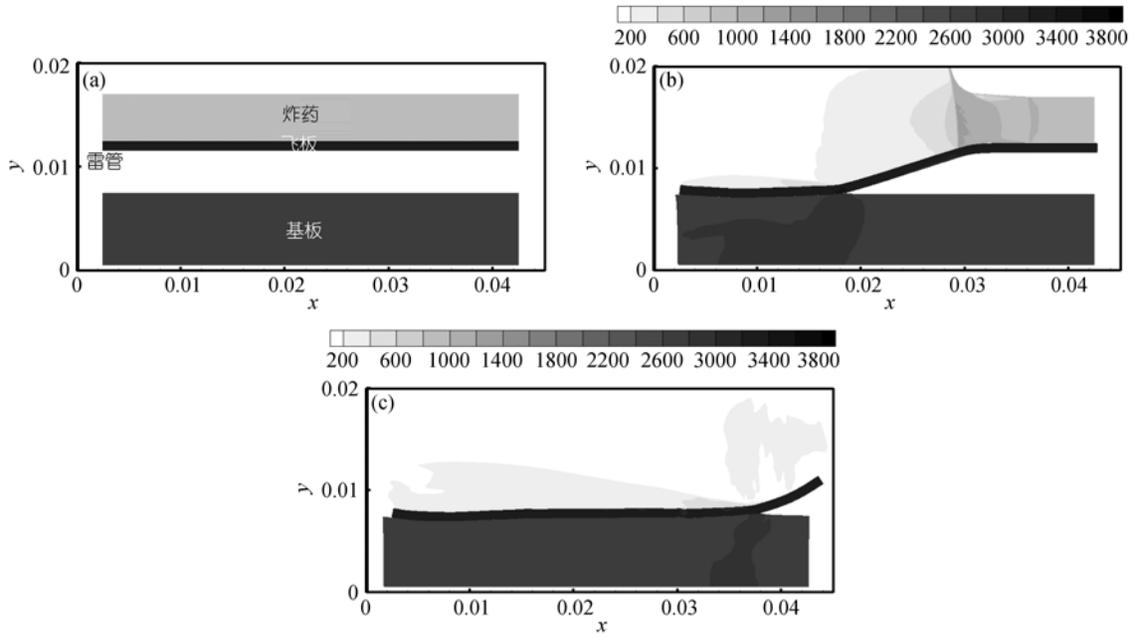


图3 不同时刻密度等值云图
(a) 0 μs (计算模型); (b) 9 μs; (c) 15 μs

进行考察.

计算模型的初始状态为在封闭的管道内充满化学当量比的 H_2-O_2 混合气体, 初始温度 298 K, 初始压力 1.01×10^5 Pa. 管道左端点火区加一个高温高压. 二步模型计算参数为: 质量气体的反应热 $Q = 1.33 \times 10^7$ J/kg, 诱导反应速率常数 $k_a = 3.0 \times 10^8$ $m^3/kg \cdot s^{-1}$, 放热反应速率常数 $k_\beta = 1.875 \times 10^{-5}$ $m^4/N^2 \cdot s^{-1}$, 诱导反应的活化能 $E_a = 2.261 \times 10^7$ J/kg, 放热反应的活化能 $E_\beta = 4.6151 \times 10^6$ J/kg^[16]. 基元反应模型的计算参数见文献[17]. Sichel的二步模型计算参数为: $a = 1.2 \times 10^8$, $b = 8 \times 10^3$, $c = 0$ ^[18], 化学反应达到平衡后 H_2 , O_2 , H , O , HO , HO_2 , H_2O 和 H_2O_2 的质量分数分别为 1.978×10^{-2} , 0.10042 , 4.49×10^{-3} , 3.27×10^{-2} , 0.14027 , 2.3209×10^{-4} , 0.70209 和 2.2772×10^{-5} , 该数据取自基元反应模型的计算结果.

图4(a)为烟熏金属片记录下来的爆轰波胞格结构. 图4(b)~(d)给出了使用二步模型、基元反应模型和 Sichel 的二步模型得到的数值胞格结构. 3种模型都能得到稳定的胞格结构, 但外观有所不同. 为了进一步考察3种数值胞格结构的准确性, 表2给出了实验和3种模型得到的胞格结构尺寸. 通过比较可以发现, 这3种化学反应模型得到的数值胞格均能定

表2 3种模型得到的胞格尺寸

方法	宽长比 (d/l)	胞格出射 角 α (°)	胞格入射 角 β (°)	横波迹线 角 ω (°)
实验	0.5~0.6	5~10	32~40	≈30
二步模型	0.59	9.2	33.0	30.5
基元反应模型	0.51	9.5	38.2	28.5
Sichel的二步模型	0.60	11.2	31.5	29.0

性地和实验结果吻合.

2.5 两相流动

SUPER CE/SE 处理的两相流动主要是气体-颗粒流动, 其应用背景十分广泛, 例如气体-液滴燃烧系统. SUPER CE/SE 采用基于颗粒相连续介质假设的两流体模型处理两相流动, 模拟过程考虑了相间质量传递, 动量转换, 化学反应等复杂过程. 本文对 C_6H_{14} 燃料在不同当量比情况下的平面爆轰进行了数值模拟.

图5给出了半径为 $25 \mu m$ 的 C_6H_{14} 燃料在不同当量比情况下的实验^[24], 数值模拟和C-J理论得到的爆轰速度. 通过比较可以发现, 气液两相爆轰的数值模拟结果和实验结果的吻合程度远没有气相爆轰好. 但总体来说数值模拟结果能够反映爆轰的趋势, 大部分数值结果能够和实验吻合, 并且要比C-J理论准确.

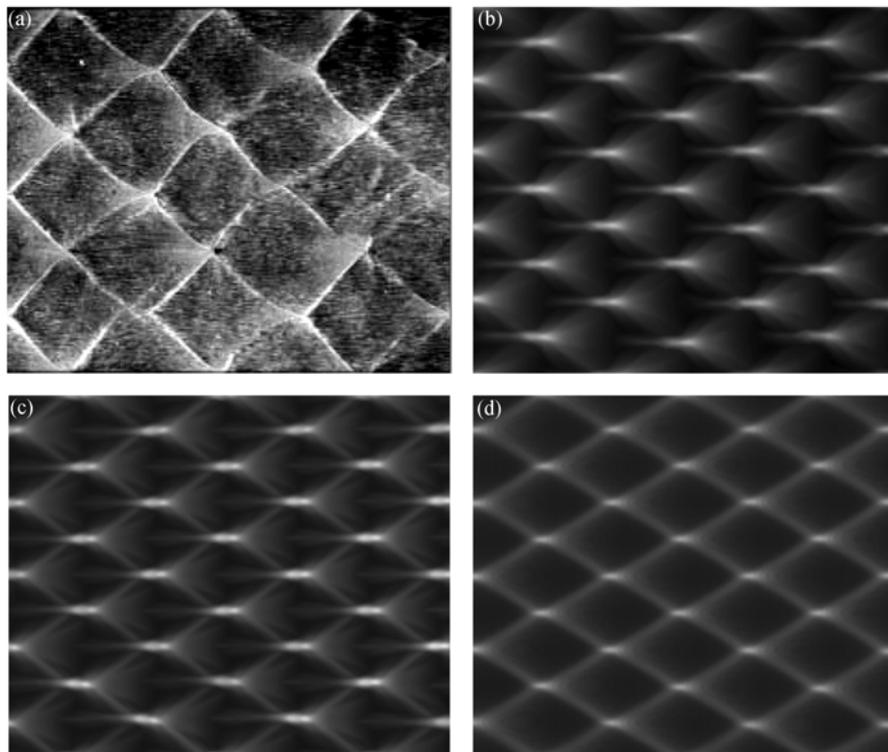


图 4 实验和数值胞格结构(网格数 220×200)

(a) 实验结果; (b) 二步模型; (c) 基元反应模型; (d) Sichel 的二步模型

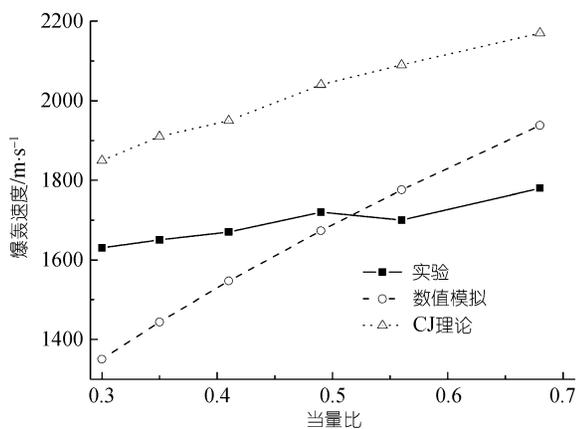


图 5 C₆H₁₄ 燃料在不同当量比情况下的爆轰速度

事实上, 两相爆轰的实验结果往往也不是很精确(同一实验条件下, 爆速最多相差 300 m/s^[24]), 有的甚至是趋势上的错误, 例如图 5 中 C₆H₁₄ 在当量比 0.49 和 0.56 时. 同时, 实验给定的条件往往也很模糊, 这也

给两相爆轰数值模拟的验证造成了困难.

3 结论

本文讨论了 SUPER CE/SE 的新算法及其在爆炸力学的应用. 着重考察了改进 CE/SE 算法, 快速杂交粒子水平集方法, 常用化学反应模型(二步模型、基元反应模型和 Sichel 的二步模型)和两流体模型之间的结合和具体实现. 并且, 对激波楔面反射、爆炸焊接、爆轰波胞格结构和气液两相爆轰问题进行了数值模拟和讨论. 数值结果表明: (i) 改进 CE/SE 算法具有物理意义明确, 计算精度高, 便于边界处理和向三维推广等优点; (ii) 界面捕捉方法和各种化学、物理模型均能成功地与改进 CE/SE 算法结合, 并保持较高精度; (iii) SUPER CE/SE 可实现多物质一体化计算, 具有计算精度高、适用范围广, 兼容性强等优点, 可广泛应用于爆炸力学的数值研究和航空、航天、军事工程等领域.

参考文献

- 1 何长江, 于志鲁, 冯其京. 高速碰撞的三维欧拉数值模拟方法. 爆炸与冲击, 1999, 19(3): 216—221
- 2 Wu K T, Ning J G. Numerical Simulation of the Protective effect of complex boundaries toward shock waves in a 3D explosive field. J Beijing Ins Technol, 2003, 12(1): 50—54
- 3 Hallquist J O. User's manual for DYNA2D-An Explicit Two-Dimensional Hydrodynamic Finite Element Code With Interactive Rezoning And Graphical Display. Lawrence Livermore National Laboratory Report UCID-18756, Rev.3, 1988
- 4 Amsden A A, O'Rourke P J, Butler T D. KIVA-3: A KIVA program with block-structure mesh for complex geometries. Los Alamos National Laboratory report La-12503-MS, 1993
- 5 Liu K X, Wang J T. Analysis of high accuracy conservation-element and solution-element schemes. Chin Phys Lett, 2004, 21(11): 2085—2088
- 6 Wang G, Zhang D L, Liu K X. An improved CE/SE scheme and its application to detonation propagation. Chin Phys Lett, 2007, 24(12): 3563—3566
- 7 王景焘. 时-空守恒元解元方法(CE/SE)的高阶精度格式及其应用. 博士学位论文. 北京: 北京大学, 2007
- 8 王刚. 基于改进 CE/SE 算法的爆轰波数值模拟平台. 博士学位论文. 北京: 北京大学, 2009
- 9 Chang S C. The method of space-time conservation element and solution element—A new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations. J Comput Phys, 1995, 119(2): 295—324[DOI]
- 10 Zhang Z C, John Yu S T, Chang S C. A space-time conservation element and solution element method for solving the two- and three-dimensional unsteady Euler equations using quadrilateral and hexahedral meshes. J Comput Phys, 2002, 175: 168—199[DOI]
- 11 张德良, 谢巍, 郭长铭, 等. 气相爆轰胞格结构和马赫反射数值模拟. 爆炸与冲击, 2001, 21(3): 161—167
- 12 Shu W C, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. J Comput Phys, 1988, 77(2): 439—471[DOI]
- 13 Adalsteinsson D, Sethian J A. A fast level set method for propagating interfaces. J Comput Phys, 1995, 118: 269—277[DOI]
- 14 Peng D, Merriman B, Osher S, et al. A PDE-based fast local level set method. J Comput Phys, 1999, 155: 410—438[DOI]
- 15 Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, et al. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. J Comput Phys, 2002, 183(1): 83—116[DOI]
- 16 Taki S, Fujiwara T. Numerical simulation on the establishment of gaseous detonation. Prog Astronaut Aeronaut, 1984, 94: 186—200
- 17 Kee R J, Rupley F M, Meeks E, et al. CHEMKIN-III: A FORTRAN chemical kinetics package for the analysis of gas-phase chemical and plasma kinetics. UC-405, SAND96-8216. 1996
- 18 Sichel M, Tonello N A, Oran E S, et al. A two-step kinetics model for numerical simulation of explosions and detonations in H₂-O₂ mixtures. P Roy Soc Lond A Mat, 2002, 458 (2017): 49—82
- 19 田宙, 郭永辉, 郝保田. 气液爆轰波及冲击波传播的数值研究. 计算物理, 2000, 17(1-2): 131—136
- 20 Ben-Dor G. Regions and Transitions of Nonstationary Oblique Shock-Wave Diffractions in Perfect and Imperfect Gases. UTIAS Report No. 232, 1978
- 21 Wang J T, Liu K X, Zhang D L. An improved CE/SE scheme for multi-material elastic-plastic flows and its applications. Comput Fluids, 2009, 38: 544—551[DOI]
- 22 王景焘, 张德良, 刘凯欣. 基于 CE/SE 方法的二维 Euler 型多物质流体弹塑性问题计算. 计算物理, 2007, 24(4): 365—401
- 23 Liu K X, Liu W D, Wang J T, et al. Atomic-scale bonding of bulk metallic glass to crystalline aluminum. Appl Phys Lett, 2008, 93: 081918[DOI]
- 24 Roy G D, Frolov S M, Borisov A A, et al. Pulse detonation propulsion: Challenges, current status, and future perspective. Prog Energ Combust, 2004, 30: 545—672[DOI]