

# SRNS 方程求解叶栅流动的研究

赵桂林 徐建中

(中国科学院力学所 北京 100080) (中国科学院工程热物理所 北京 100080)

## 摘 要

为建立 SRNS 方程适用的数值计算方法,并使下游信息充分反馈到上游,本文对不可压 SRNS 方程提出了拟压缩性空间推进法,对压气机叶栅和透平叶栅的典型计算表明,该方法可准确地快速地模拟叶轮机械内部流场。

关键词 SRNS, 拟压缩性, 空间推进

## 1 引 言

近年来,叶轮机械内部粘性流动的计算有了很大的进展,特别是求解 Reynolds 平均形式的完全 Navier-Stokes(CNS)方程,提出了不少有效的数值方法,使其在一些工程设计中得到了应用,发挥着越来越大的作用。但是,求解 CNS 方程通常要求计算机的大存储和高运算速度,尤其是在叶轮机械气动参数变化的时候。因此,探讨既能比较准确描绘流动现象,又计算简便的数学物理模型,是一项有意义的工作。

基于对 CNS 方程中粘性项量阶的分析,文献 [1] 提出了比现有简化 NS(RNS) 方程精度高一阶而数学性质仍然保持双曲一抛物型的略微简化 NS(SRNS) 方程。通过对在分离点处流函数解的分析,文献 2 证明,SRNS 方程在数学上是正则的;而且,只要 Re 数不是非常小,它是 CNS 方程很好的近似。因此,SRNS 方程有可能用来求解包含分离的复杂流动。目前,它已受到国际上的重视,认为是“Solver from incompressible to supersonic flows”<sup>[3]</sup>。为了建立 SRNS 方程适用的数值计算方法,需正确处理其包含的椭圆因素。为此,本文专门研究了不可压流中 SRNS 方程的数值解法,用它来求解叶栅流动。

## 2 拟压缩性空间推进法

为了说明问题清楚,首先考虑二维非定常不可压的 CNS 方程,其矢量形式为:

$$\bar{I} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} - \frac{\bar{D}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

此时,连续方程可写为:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(a^2 u)}{\partial x} - \frac{\partial(a^2 v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

其中  $a$  为拟声速或人工声速,  $p = a^2 \rho$ 。不难看出,新增加的压力对时间的导数项相当于可压方程中的密度项,称为拟压缩性项,而联立求解方程 (1) 和 (2),即为拟压缩性时间推进法<sup>[4]</sup>。

本文曾于 1994 年 10 月在宁波召开的中国工程热物理学会热机气动热力学学术会议上宣读。

现在, 从非定常的 SRNS 方程出发, 建立一中拟压缩性空间推进法。事实上, 此 NRNS 方程可展开为:

$$\begin{aligned} a_1'(p^n - p^{n-1}) + u_x + v_y &= 0 \\ a_2'(u^n - u^{n-1}) + (u^2 + p)_x + (uv)_y &= (u_{xx} + u_{yy})/Re \\ a_2'(v^n - v^{n-1}) + (uv)_x + (v^2 + p)_y &= (v_{xx} + v_{yy})/Re \end{aligned} \quad (3)$$

式中的  $a_1' = 1/\beta\Delta t$ , 而  $a_2' = 1/\Delta t$ 。

按照文献 [1] 中的方法, 方程组 (3) 对应的 SRNS 方程可表为下列矢量形式:

$$\mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y = (\mathbf{D}_{yy} + \mathbf{G}_{xy})/Re + \mathbf{S} \quad (4)$$

这里,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_1 p + u \\ a_2 u + u^2 + p \\ a_2 v + uv \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + p \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_1 [p_x - (p^n - p^{n-1})] \\ a_2 [u_x - (u^n - u^{n-1})] \\ a_2 [v_x - (v^n - v^{n-1})] \end{bmatrix}$$

$a_1 = a_1' \Delta x$ ,  $a_2 = a_2' \Delta x$ 。显然, 计算收敛时, 附加的拟压缩性项趋于零。这就是拟压缩性空间推进法。

对含拟压缩性项的 SRNS 方程的特征分析 [5] 表明, 其数学特征仍保持为双曲—抛物型。通过对其差分方程特征值的分析, 文献 [5] 还证明, 用拟压缩性空间推进法求解 SRNS 方程能够确保计算的整体稳定性, 它在多次推进中可得到稳定的收敛解。值得指出的是, 在上述证明过程中可以得出, 与通常的 RNS 方程要求在整个流动中  $u > 0$  不同, SRNS 方程仅要求  $u > -a_2/2$ , 这样它适用于求解满足这一条件的分离流动。

### 3 基本方程及其离散

采用任意非正交贴体坐标系  $(\xi, \eta)$ , 取  $\xi$  为主流方向。为用拟压缩性空间推进法求解 SRNS 方程, 在连续方程中引入压力对时间的偏导数项:

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{p}{J} \right)_t + \left[ \frac{1}{J} (\xi_x u + \xi_y v) \right]_{\xi} + \left[ \frac{1}{J} (\eta_x u + \eta_y v) \right]_{\eta} = 0 \quad (8)$$

对任意非正交曲线坐标系下 SRNS 方程中的时间导数项进行处理后可写成:

$$\mathbf{E}_{\xi} + \mathbf{F}_{\eta} = \frac{1}{Re} (\mathbf{D}_{1\eta} + \mathbf{D}_{2\eta} + \mathbf{G}_{1\eta}) + \mathbf{S} \quad (9)$$

式中

$$\mathbf{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_x u + \xi_y v + a_1 p \\ (\xi_x u + \xi_y v) u + \xi_x p + a_2 u \\ (\xi_x u + \xi_y v) v + \xi_y p + a_2 v \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_x u + \eta_y v \\ (\eta_x u + \eta_y v) u + \eta_x p \\ (\eta_x u + \eta_y v) v + \eta_y p \end{bmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ v L_2 u_{\eta} \\ v L_5 v_{\eta} \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ vL_1 u_\xi \\ vL_4 v_\xi \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ vL_1 u_\eta \\ vL_3 v_\eta \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} a_1 [(\frac{P}{J})_{i,j}^n - (\frac{P}{J})_{i,j}^{n-1}] \\ a_2 [(\frac{u}{J})_{i,j}^n - (\frac{u}{J})_{i,j}^{n-1}] \\ a_2 [(\frac{v}{J})_{i,j}^n - (\frac{v}{J})_{i,j}^{n-1}] \end{bmatrix}$$

$n$  表示迭代次数,  $a_1$  和  $a_2$  是可根据求解问题不同而选取不同数值的控制参数。

对方程 (9) 的离散, 采用如下格式, 当以二阶精度逼近时, 其差分方程为:

$$\Delta^i E = \frac{\theta_1 \Delta \xi}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta^i E) + \frac{\Delta \xi}{1 + \theta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (E^i) + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} (\Delta^{i-1} E)$$

这里  $\Delta^i E = E^{i+1} - E^i, \xi = i \Delta \xi$ 。  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的不同取值, 对应着不同的差分格式<sup>[6]</sup>。在本文中, 采用对应于  $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0$  的一阶 Euler 隐格式:

$$\Delta^i E = \Delta \xi \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\Delta^i E) + \frac{\partial}{\partial \xi} (E^i) \right] \quad (10)$$

使用 Taylor 级数展开, 便可得到以下形式的三对角矩阵方程组:

$$[A] \Delta^i q = \text{RHS} \quad (11)$$

此处  $[A]$  为  $3 \times 3$  矩阵, RHS 表示差分方程右端所有项, 它与  $\Delta^i q$  均为列向量, 方程 (11) 不难用矩阵求逆的方法来求解。

## 4 湍流模型

本文计算采用  $\kappa - \varepsilon$  湍流模型<sup>[7]</sup>。在非正交曲线坐标系中, 对湍流模型进行抛物化处理, 即略去含  $\kappa_{\xi\xi}$ 、 $\varepsilon_{\eta\eta}$  项便得:

$$(\xi_x u + \xi_y v) \kappa_\xi + (\eta_x u + \eta_y v) \kappa_\eta = \frac{J}{\text{Re}} (2A_\kappa \kappa_{\xi\eta} + B_\kappa \kappa_{\eta\eta} + C_\kappa \kappa_\xi + D_\kappa \kappa_\eta) + S_\kappa \quad (12)$$

$$(\xi_x u + \xi_y v) \varepsilon_\xi + (\eta_x u + \eta_y v) \varepsilon_\eta = \frac{J}{\text{Re}} (2A_\varepsilon \varepsilon_{\xi\eta} + B_\varepsilon \varepsilon_{\eta\eta} + C_\varepsilon \varepsilon_\xi + D_\varepsilon \varepsilon_\eta) + S_\varepsilon \quad (13)$$

参数选择为:  $c_\mu = 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.44, c_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$

对粘性底层外的点  $P$ , 其切向速度  $Q_p$  由下式确定:

$$Q_p / u_\tau = \ln(E u_\tau y_p \text{Re} / \nu) / K \quad (y^+ = u_\tau y / \nu > 11.63) \quad (14)$$

这里  $y_p$  为  $P$  点至壁面的法向距离, 而  $K$  和  $E$  分别是 von Karman 常数和表面粗糙度, 在本文中分别取  $K = 0.41, E = 9.79$ 。

## 5 算 例

### 5.1 NACA 65-010 压气机叶栅

叶栅的几何形状和实验结果见文献 [8]。叶栅的相对节距  $t/c=1.0$ , 进口气流角为  $30^\circ$ ,  $\text{Re}$  数是  $2.45 \times 10^5$ , 网格数为  $91 \times 41$  (图 1)。

图 2 给出了叶栅表面压力系数分布的计算值与实验结果的比较。可以看出, 计算结果与实验数据的符合都比较好。这表明, 用拟压缩性空间推进法求解 SRNS 方程能较好地模拟压气机叶栅流场。在图 3 和 4 中, 分别给出了计算的速度矢量图和速度等值线分

布, 它们显示了叶栅内速度沿流向的变化情况。

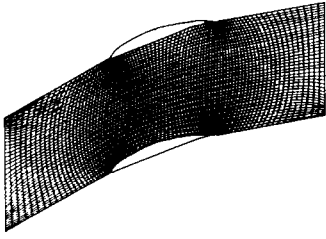


图 1 压气机叶栅计算网格

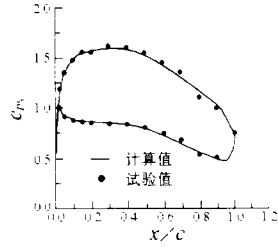


图 2 压气机叶栅叶片表面压力系数分布

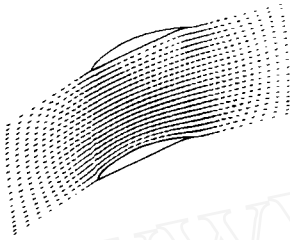


图 3 压气机叶栅速度矢量图

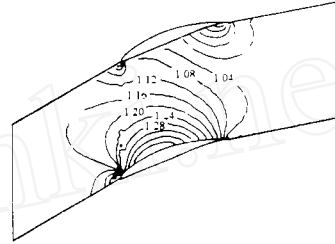


图 4 压气机叶栅速度等值线分布

## 5.2 NACA TN-3802 透平叶栅<sup>[9]</sup>

叶栅相对节距  $t/c=0.667$ , 进口的  $\beta_1=0^\circ$ ,  $Re=4 \times 10^5$  网格数  $121 \times 41$  (图 5)。

从叶栅表面压力系数的分布 (图 6) 来看, 计算结果与实验值<sup>[9]</sup> 符合得很好, 这说明本文方法可用于模拟透平叶栅的湍流流场。速度矢量图与等值线分布分别给在图 7 和图 8 上。

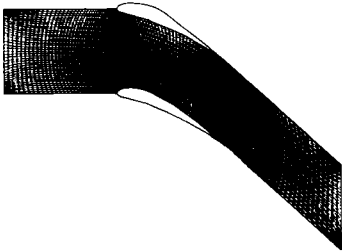


图 5 透平叶栅计算网格

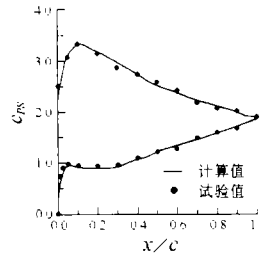


图 6 透平叶栅叶片表面压力系数分布

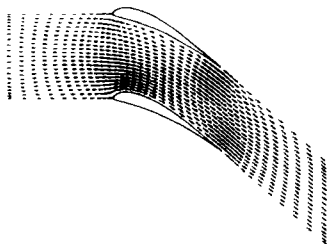


图 7 透平叶栅速度矢量图

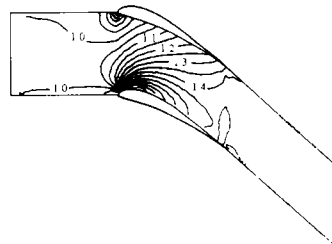


图 8 透平叶栅速度等值线分布

## 6 结 语

为准确、简便地求解叶轮机内的复杂流动,使下游信息充分反馈到上游,本文对 SRNS 方程提出了拟压缩性空间推进法,该方法经证明在计算中保持稳定并可获得收敛解。

考虑到叶轮机边界的复杂,导出了在任意非正交坐标系中湍流形式的 SRNS 方程;与控制方程相适应,对计算中采用的  $\kappa-\varepsilon$  湍流模型也进行了抛物化处理。

分别对压气机叶栅和透平叶栅中的不可压流,进行了典型计算。结果表明,用拟压缩性空间推进法求解 SRNS 方程可准确而快速地模拟叶轮机内部流场,是一种有希望的方法。

## 参 考 文 献

- [1] 徐建中,余文胜. 含流向粘性扩散和传热项的简化 Navier-Stokes 方程. 工程热物理学报, 1991, 12 (2)
- [2] Xu J Z, Yu W S. On the Slightly Reduced Navier-Stokes (SRNS) Equations. ASME J. of Fluids Engineering, 1994, 116 (2)
- [3] Rubin S G, Tannehill J C. Parabolizal/Reduced Navier-Stokes Computational Techniques. Annual Review of Fluid Mechanics, 1992, 24
- [4] Chorin A J. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. Mathematics of Computation, 1968, 22
- [5] 赵桂林. 用 SRNS 方程求解叶轮机粘性流场的研究及实验验证: [博士论文]. 中国科学院工程热物理研究所, 1994
- [6] Beam R M, Warming R F. An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA J., 1978, 16 (4)
- [7] Patel V C, Rodi W, Scheuerer G. Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review. AIAA J., 1985, 23 (9)
- [8] Herrig L T, Emery J C, Erwin J R. Systematic Two-Dimensional Cascade Tests of NACA 65-Series Compressor Blades at Low Speeds. NACA TN-3916, 1957
- [9] Duvant J C, Erwin J R. Investigation of a Related Series of Turbine-Blade Profile in Cascade. NACA TN-3802, 1956

## INVESTIGATION OF NUMERICAL SOLUTIONS OF CASCADE FLOWS USING SRNS EQUATIONS

ZHAO Guilin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

XU Jianzhong

(Institute of Engineering Thermophysics, Academia Sinica, Beijing 100080)

### Abstract

In order to establish numerical method suitable for the SRNS equations, and make the downstream informations feedback to upstream fully, this paper presents the pseudo-compressibility space marching method for the incompressible SRNS equations. Typical computations of incompressible flows of compressor and turbine cascades indicated that this method can simulate internal flows of turbomachinery accurately and rapidly.

**Keywords** SRNS, pseudocompressibility, space-marching