

关于三维Navier-Stokes方程的粘性项计算*

王保国

清华大学工程力学系, 北京(邮政编码 100084)

卞荫贵

中国科学院力学所, 北京(邮政编码 100080)

√211.48

√211.18

摘要 借助于张量分析和张量计算, 在贴体曲线坐标系下本文讨论了不同求解变量导致了粘性项个数上的重大差异和不同大小的计算量, 并提出了便于粘性计算的最佳形式。文中借助于有限体积离散技术, 通过引进两个对称辅助矩阵[A]和[B], 使粘性项的计算量大大减少, 这对完成三维粘性流的数值计算具有重要的指导意义。

借助于上述方法, 本文完成了某型真实进气道两种工况的三维粘性 Navier-Stokes 方程计算(即 $M_\infty = 3.0$, $\alpha = 0^\circ$ 和设计工况 $M_\infty = 2.65$, $\alpha = 0^\circ$), 获得了满意的全场结果, 对于 $M_\infty = 2.65$ 的设计工况, 同实验数据作了比较, 符合良好。由于本文的方法明显的减少了粘性项的计算量且节省了大量内存, 以致于使三维流场的 N-S 求解能在普通微机上进行。

关键词 张量计算, 对称矩阵, 有限体积离散, 粘性项, 三维粘性流动。

进气道, 粘性流场, 引言

近年来, 带激波的粘性流场计算在国内外获得了很大发展, 尤其是国内, 已涌现出许多新的有效格式和算法, 例如文献[1]提出的 NND 格式在粘流计算和激波捕捉中得到了成功的应用^[2~4], 文献[5]提出的耗散比拟法也成功地求解了航天飞机的超声速粘性流场。所有这些方法和格式对于改善捕捉激波的质量、提高激波分辨率是十分有效的。本文主要讨论粘性项的处理问题, 探讨减少计算量、节省内存的方法。

在现代流场计算中, 由于边界形状的复杂, 贴体坐标已得到广泛应用。在曲线坐标中, 场的计算离不开张量分析和张量计算, 尤其是流场的计算, 它依赖于 Navier-Stokes 方程, 存在着反映粘性的二阶粘性应力张量 τ 和它与速度矢的数量积(内积), 存在着 $\nabla \cdot \tau$ 和 $\nabla \cdot (\tau \cdot \vec{r})$ 的计算问题, 因此单纯按照传统的张量分析手段则上述项无论采取逆变分量或协变分量展开都会导致大量的 Christoffel 记号, 例如文献[7]的(4.7)式是用逆变分量表达的弱守恒 N-S 方程组, 它就包含了大量的这类记号, 该方程组的形式是

* 国家自然科学基金和国家博士后基金资助项目。

本文于1993年2月18日收到, 9月23日收到修改稿。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^1 \\ \rho v^2 \\ \rho v^3 \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} \rho v^i \\ \rho v^1 v^i + g^{1i} p \\ \rho v^2 v^i + g^{2i} p \\ \rho v^3 v^i + g^{3i} p \\ (e+p)v^i \end{bmatrix} = \nabla_i \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{1i} \\ \tau^{2i} \\ \tau^{3i} \\ \tau^{ij} v_j + \lambda g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^i \rho v^j \\ \rho v^1 v^j \Gamma_{ij}^1 + \rho v^2 v^j \Gamma_{ij}^2 \\ \rho v^1 v^j \Gamma_{ij}^2 + \rho v^2 v^j \Gamma_{ij}^1 \\ \rho v^1 v^j \Gamma_{ij}^3 + \rho v^2 v^j \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^i (e+p) v^j \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 p 为压强, λ 和 T 分别为流体的热传导系数和温度, v^i , g^{ij} 和 τ 分别为速度、度量张量和粘性应力张量的逆变分量, Γ_{ij}^k 为第二类 Christoffel 记号 ($i, j, k=1 \sim 3$), 其定义为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) g^{km} \quad (2)$$

这里 g_{ij} 为度量张量的协变分量。显然对于三维粘性问题的 (1) 式的完全展开其项数是相当多的。如何尽量减少主方程中的计算项数, 正是本文探讨的内容。

本文采用了两大措施来减少 N-S 方程的计算量: (1) 将主方程组中的动量方程沿 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 方向 (即笛卡尔坐标系 (y^1, y^2, y^3) 的单位矢量方向) 展开, 取代了文献 [7] 中沿 e_1, e_2, e_3 方向 (即贴体曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) 的基矢量方向) 展开的做法, 使得出的方程项数大为减少。(2) 主方程组中的动量方程仍沿 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 方向展开, 并采用有限体积离散技术, 通过对单元体的积分使微分方程组的阶数降低, 使得二阶导数的粘性项降为一阶, 这就大大减少了做数值微分的次数; 本文还引进了两个辅助对称矩阵 [A] 和 [B], 这样做一方面使粘性项的计算更为简便, 另一方面也大大节省了计算机内存, 有利于在普通微机上完成大型三维粘流计算。

一、取 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 为动量方程的展开方向

在任意曲线坐标系中, 对 N-S 方程组中的动量方程选取什么样的三个方向列出, 这是个非常重要的问题。它直接影响着方程项数的多少, 尤其对三维粘流问题更为突出。然而这个问题在过去的许多文献中却一直被忽视。

文献 [7] 从传统的张量分析出发, 推导给出了任意曲线坐标系下 N-S 方程的通用形式, 即本文的 (1) 式, 但由于这个方程组的动量方程是沿 e_1, e_2, e_3 方向的, 所以粘性项的项数是相当的多, 例如 $\nabla_i \tau^{1i}$ 可写作

$$\nabla_i \tau^{1i} = f_1 \left(v^1, v^2, v^3, \frac{\partial v^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) \quad (3)$$

这里函数 $f_1(\dots)$ 是一个多项式; 对于任意曲线坐标, 这个多项式有 108 项; 对于正交曲线坐标系它变为 64 项; 因篇幅所限, 这里略去它们的具体表达式。对于 $\nabla_i \tau^{2i}$ 和 $\nabla_i \tau^{3i}$ 也有类似的结论。显然, 方程的项数越多, 越不利于数值计算, 尤其是粘性问题是如此。

文献 [8] 改进了文献 [7] 的做法, 将动量方程写成

$$\frac{\partial(\sqrt{g} \rho V^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} \rho v^j V^i) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} p \bar{e}_j) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \tau^{ij} \bar{e}_j) = 0 \quad (4)$$

式中 ρ , p , τ^{ij} , v^i , g^{ij} 的定义同(1)式; 这里 g 的定义为

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

这里 g_{ij} 为曲线坐标系 (x^1, x^2, x^3) 的协变度量张量。然后, 将(4)式沿 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 方向展开, 结果大大减少了方程中的项数; 最后, 文献[8, 9]推出了任意曲线坐标系下一种新形式的通用 N-S 方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sqrt{g} \rho \\ \sqrt{g} \rho u \\ \sqrt{g} \rho v \\ \sqrt{g} \rho w \\ \sqrt{g} e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{bmatrix} \sqrt{g} \rho v^j \\ \sqrt{g} (\rho u v^j + g^{ij} \tilde{y}^{1i} p) \\ \sqrt{g} (\rho v v^j + g^{ij} \tilde{y}^{2i} p) \\ \sqrt{g} (\rho w v^j + g^{ij} \tilde{y}^{3i} p) \\ \sqrt{g} (e + p) v^j \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^i} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \sqrt{g} N^{1i} \\ \mu \sqrt{g} N^{2i} \\ \mu \sqrt{g} N^{3i} \\ \sqrt{g} \left(\mu M^i + \lambda g^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

式中 μ 和 λ 分别为粘性系数和热传导系数; u, v, w 分别为 \vec{v} 沿 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 方向的分速度; 而 \tilde{y}^{ii}, N^{ii} 和 M^i 的定义分别为

$$N^{ii} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + g^{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) g^{ik} \tilde{y}^{ik} \quad (7a)$$

$$M^i = \left[u_k \frac{\partial u_i}{\partial y^k} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial y^i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) u_i \right] \frac{\partial x^i}{\partial y^i} \quad (7b)$$

$$\tilde{y}^{ii} = \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \quad (7c)$$

这里 $u_i (i = 1, 2, 3)$ 为 \vec{v} 沿 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 方向的分速; 显然(6)式既保留了曲线坐标系的优点, 同时又减少了方程的项数; 将这个方程组与(1)式相比, 其重要的差别在于两个方程组中的动量方程是沿着不同的方向列出的, 而且两个方程组求解的变量也不同。对于选用差分法来说, 采用(6)式计算要更方便些, 而且计算量要比(1)式小。作为例子, 文献[10]计算了(6)式的特例即无粘流动情况下的三维 Euler 方程组, 并得到了满意的三维无粘解。计算中为提高捕捉激波的分辨率, 采用了 Harten 的数值通量^[11, 12]。

二、有限体积离散及两个对称的辅助阵

采用有限体积法, 将微分方程组降阶, 是减少计算量的又一个重要措施。文献[10, 13]中推导出了如下形式的守恒积分型 N-S 方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} W d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot E dS = 0 \quad (8)$$

这里

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ e \end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho \dot{V} \\ \rho \dot{V} \vec{V} - \Pi \\ \dot{e} \vec{V} - \Pi \cdot \vec{V} - \lambda \nabla T \end{bmatrix} = F_{\text{inv}} - F_{\text{vis}} \quad (9b)$$

$$F_{\text{inv}} = \begin{bmatrix} \rho \dot{V} \\ \rho \dot{V} V + p(\vec{i} \vec{i} + \vec{j} \vec{j} + \vec{k} \vec{k}) \\ (e + pV) \end{bmatrix} \quad (9c)$$

$$F_{\text{vis}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau \cdot \vec{V} + \lambda \nabla T \end{bmatrix} \quad (9d)$$

式中 Π 和 τ 分别为应力张量和粘性应力张量, $\rho \dot{V} \vec{V}$ 为并矢张量, T 和 λ 分别为温度和热传导系数。在(8)式的计算中, 两个面积分 $\oint_{\partial \Omega} \vec{n} \cdot \Pi dS$ 和 $\oint_{\partial \Omega} \vec{n} \cdot (\Pi \cdot \vec{V}) dS$ 的计算非常重要。如将这两个面积分分别用于单元体的六个表面, 则有

$$\oint_{\partial \Omega} \vec{n} \cdot \Pi dS = \sum_{i=1}^6 (\vec{S} \cdot \Pi)_i \quad (10)$$

$$\oint_{\partial \Omega} \vec{n} \cdot (\Pi \cdot \vec{V}) dS = \sum_{i=1}^6 (\vec{S} \cdot \Pi \cdot \vec{V})_i \quad (11)$$

式中

$$\vec{S} = S_1 \vec{i} + S_2 \vec{j} + S_3 \vec{k} \quad (12a)$$

$$V = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad (12b)$$

$$\Pi = \tau - p(\vec{i} \vec{i} + \vec{j} \vec{j} + \vec{k} \vec{k}) \quad (12c)$$

为了减少计算量, $(S \cdot \Pi)$ 和 $(\vec{S} \cdot \Pi \cdot \vec{V})$ 均在直角坐标系中计算。经过推导和一系列的张量计算, 则(10)与(11)式分别变成(13)与(14)式

$$\oint_{\partial \Omega} \vec{n} \cdot \Pi dS = \sum_{i=1}^6 \left\{ - \left[p + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \vec{S} + \mu [S_1, S_2, S_3] [A] [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]^T \right\}_i \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Omega} \vec{n} \cdot (\Pi \cdot \vec{V}) dS = & \sum_{i=1}^6 (-p \vec{S} \cdot \vec{V})_i + \sum_{i=1}^6 \left\{ -\frac{\mu}{6} [b_{11}, b_{22}, b_{33}] [\Pi] [a_{11}, a_{22}, a_{33}]^T \right. \\ & \left. + \mu [b_{12}, b_{13}, b_{23}] [a_{11}, a_{13}, a_{23}]^T \right\}_i \end{aligned} \quad (14)$$

这里

$$[\Pi] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

a_{ij} 和 b_{ij} 分别为辅助矩阵[A]和[B]的元素。对于单元体体心上的 a_{ij} 可由下式计算

$$a_{ij} = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^6 (u_i S_j + u_j S_i) \quad (16)$$

而面上的 a_{ij} 值可由相邻两个单元体体心上 a_{ij} 值的算术平均得到。面上 b_{ij} 值为

$$b_{ij} = u_i S_j + u_j S_i \quad (17)$$

由(16)和(17)式可知,辅助矩阵[A]和[B]分别都是对称矩阵。

显然,利用(8)式并结合(13)式与(14)式的计算来求解三维粘性流场,其计算量要比求解(6)式还要小,而且由于粘性项的巧妙处理既避免了许多数值微分过程又节省了计算机内存,因此具有省机时、省内存的特征。

三、典型的两个算例

借助于上节给出的粘性项处理技巧,本文计算了典型高速进气道三维流场的两种工况:(1) $M_\infty=3.0$ 和攻角 $\alpha=0^\circ$, (2)设计工况 $M_\infty=2.65$ 和 $\alpha=0^\circ$;进气道形状取自文献[14],流场计算选取了三维、湍流、可压缩、雷诺平均的 N-S 方程组作为求解的主方程;湍流模式采用 Baldwin-Lomax 模型;数值离散采用有限体积离散技术;在数值格式方面,对 Jameson-Turkel 的 LU 格式^[15]做了改进,采用了 LU-TVD 杂交格式^[13,16],其中粘性项的计算采用本文的(13)与(14)式;为了提高激波的分辨率,数值通量计算采用了张涵信的 NND 格式中的数值通量^[1]。对于三维湍流计算的详细过程将另文发表,这里仅扼要介绍一下主要结果。图 1 给出了 $M_\infty=3.0$ 时子午面上全场的速度矢

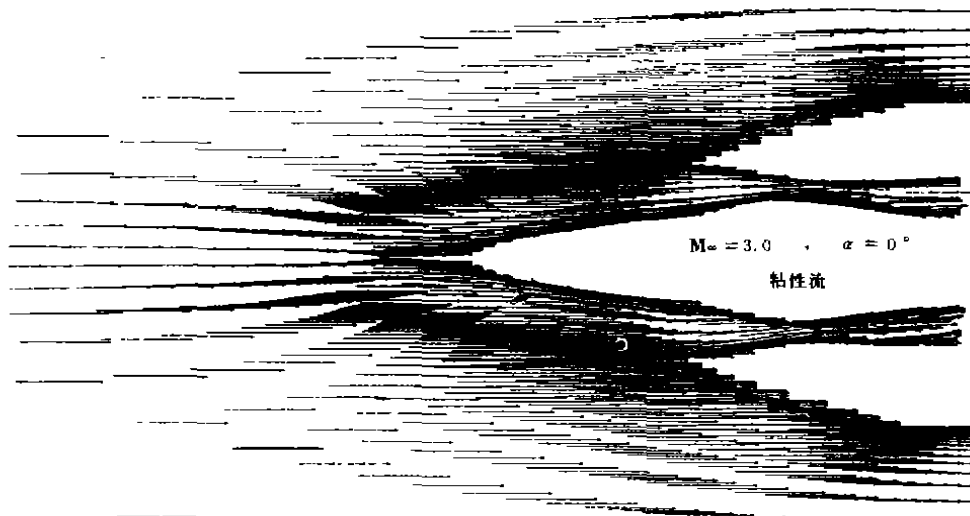


图 1 进气道全场速度矢量图(子午面上)
Fig.1 Velocity vector field of symmetrical plane at $M_\infty=3.0$

量图,图 2 给出了速度分布的局部放大,可以看出流场分布是较合理的。图 3 和图 4 分别给出进气道内流道两种工况下等马赫数线分布的局部放大图,显然由于粘性的存在,其壁面附近等马赫线的分布与无粘计算大不相同。图 5 和图 6 分别给出设计工况($M_\infty=2.65$)下,沿中心体和外罩

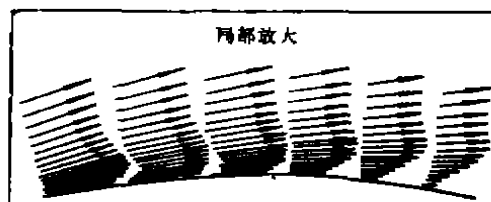


图 2 局部放大的速度矢量剖面($M_\infty=3.0$)
Fig.2 Enlarged velocity vectors profiles ($M_\infty=3.0$)

外表面的压力分布, 并且都与实验^[14]作了比较, 符合良好, 变化趋势基本上一致。

由于采用了有限体积离散技术、粘性项处理技巧和 LU-TVD 杂交格式, 使得三维粘性计算可以在微机上进行。

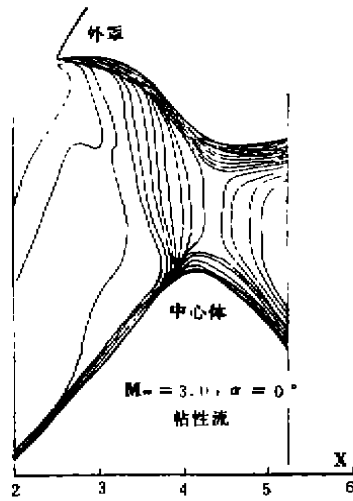


图3 局部放大的等马赫线分布($M_\infty = 3.0$)
Fig.3 Enlarged Mach contours($M_\infty = 3.0$)

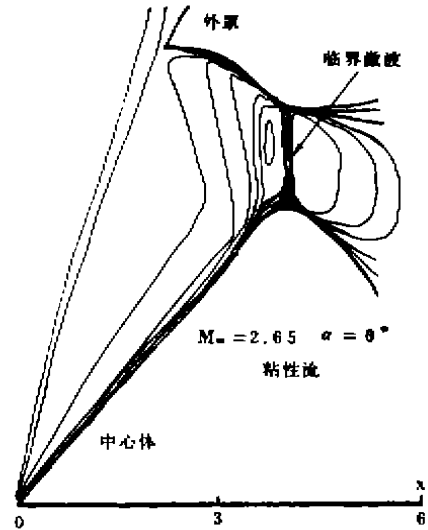


图4 局部放大的等马赫线分布($M_\infty = 2.65$)
Fig.4 Enlarged Mach contours($M_\infty = 2.65$)

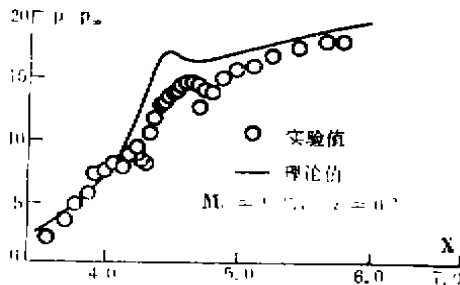


图5 沿中心体表面的压力分布与实验的比较
($M_\infty = 2.65$)
Fig.5 Comparison of centerbody static pressure distributions with experimental data for $M_\infty = 2.65$

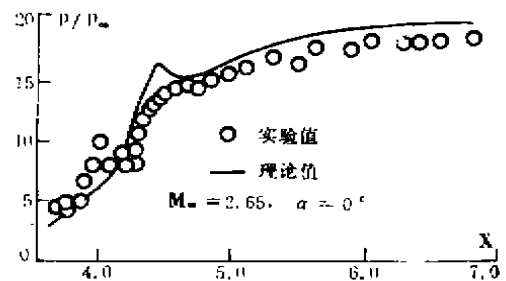


图6 沿外罩外表面的压力分布与实验的比较
($M_\infty = 2.65$)
Fig.6 Comparison of cowl static pressure distributions with experimental data for $M_\infty = 2.65$

四、结 论

1. 用差分方法求解三维 N-S 方程组, 选用(6)式要比(1)式好, 它有较小的计算量。
2. 用有限体积法解三维 N-S 方程组, 有利于微分方程组的降阶; 引进对称矩阵 [A]和[B], 大大减少了三维粘性计算的工作量。典型算例表明: 本文给出的粘性项处理技巧是可行的、有效的。

参 考 文 献

- 1 张涵信.无波动、无自由参数的耗散差分格式.空气动力学学报,1988,6(2):143~165
- 2 张涵信,刘君.超声速主流中横向喷流场的激波-旋涡结构的数值模拟.空气动力学学报,1991,9(1):8~13
- 3 张涵信,沈清,高树椿.钝锥有攻角分离流动的数值模拟及其分析.空气动力学学报,1991,9(2):160~175
- 4 郑敏,张涵信.无波动、无自由参数的耗散差分格式(NND)在喷流计算中的应用.空气动力学学报,1989,7(3):273~281
- 5 马延文,傅德薰.计算空气动力学中一个新的激波捕捉法——耗散比拟法.中国科学 A辑,1992,22(3):263~271
- 6 傅德薰,马延文.耗散比拟法求解航天飞机超音速粘性绕流问题.中国科学 A辑,1993,23(1):39~48
- 7 王保国.N-S方程组的通用形式及近似因式分解.应用数学和力学,1988,9(2):165~172
- 8 王保国.跨音速叶栅流动数值计算的新方法[博士学位论文].中国科学院,1990.
- 9 王保国.跨音速主流与边界层迭代的稳定性分析与数值实验.工程热物理学报,1989,10(4):379~382
- 10 王保国,卞荫贵.求解三维欧拉流的隐-显式格式及改进的三维LU算法.计算物理,1992,9(4):423~425
- 11 Harten A.J. *Comp. Phys.*, 1983, 49(3): 357~393
- 12 Yee H C, Harten A. *AIAA J.*, 1987, 25(2): 266~274
- 13 王保国.三维高速进气道无粘及粘性流场计算[博士后论文].中国科学院力学研究所,1993.
- 14 Smeltzer D B, Sorensen N E. NASA TN D-6971, 1972.
- 15 Jameson A, Turkel E. *Math. Comp.*, 1981, 37(156): 385~397
- 16 王保国,卞荫贵.高速进气道三维Euler流场的两种高效算法.中国博士后首届学术大会论文集,北京:国防工业出版社,1993,974~977

On Numerical Computation of Viscous Terms for 3-D Navier-Stokes Equations

Wang Baoguo

(*Qinghua University*)

Bian Yingui

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science*)

Abstract Different forms for viscous terms of three-dimensional Navier-Stokes equations with different primeval variables are discussed by using tensor analysis technique in curvilinear coordinate system and two effective approaches for computation of viscous terms are presented in this paper. These are, (1) an optimum form of [Navier-Stokes equations for finite-difference method is given, (2) the auxiliary matrixes [A] and [B] are considered by using finite-volume technique. They provide efficient methods for calculating three-dimensional compressible viscous flows. The methods were used to compute the external and internal flow field for an inlet. Results were obtained for two flow conditions ($M_\infty=3.0$ and $\alpha=0^\circ$, $M_\infty=2.65$ and $\alpha=0^\circ$). Some of the computed results were compared with wind tunnel data. The computations and experimental results compare reasonably well. Numerical application shows that the present method needs less computer storage and CPU time.

Key words tensor analysis, symmetric matrix, finite-volume method, viscous terms, 3-D viscous flows.