39-43, 58　概率断裂力学，蒙特卡洛模似，失效概率

A

第22卷 第1期　北京化工大学学报(自然科学版)　Vol.22, No.1
1995年　JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF CHEMICAL TECHNOLOGY　1995

(8)

# 几种抽样的统计模拟法在估算失效概率中的应用

TQ018

O242.1

丁克勤* 林钧富
(北京化工大学机械工程系，北京，100029)

**摘　要**：提出用分层抽样、重要性抽样复合法计算接管失效概率. 经与其它抽样方法比较，用复合法计算接管失效概率具有精度高、节省机时的优点.

**关键词**：概率断裂力学；蒙特卡洛模拟；失效概率
**中图分类号**：O242.1

## 前　言

随着计算机技术飞速发展，统计模拟法在近代工程结构中得到广泛应用. 由于近代工程结构的可靠性高，失效概率低（$<10^{-4}$），尤以重要性抽样法或分层抽样法的统计模拟法应用最为广泛. 例如美国橡树岭国家实验研究院研制的OCA-P，美国西屋公司研制的PFM，德国Karlsruhe核研究中心研制的PARIS程序，英国CEGB研制的PROF程序，以及VISA-Ⅰ，VISA-Ⅱ，PRAISE，CEPFM等程序都采用这两种抽样方法. 由于计算模型日益复杂，随机变量多达上百个，致使进行一次模拟计算历时数小时之久，故在工程应用中有限制模拟次数为50～100次的情形. 因此抽样次数少而覆盖面适当的拉丁超立方抽样法（下文简称拉丁抽样法）受到重视，但此法精度较差. 而重要性抽样法与分层抽样法均能减少计算方差提高精度. 因此本文作者提出分层抽样、重要性抽样复合法，以及分层抽样、拉丁抽样复合法. 并以压力容器接管作为算例，对接管的逐年失效概率进行了计算，同时还将计算结果与直接抽样的Monte Carlo法进行了比较.

## 1　抽样方法简述

### 1.1　重要性抽样法[1]

重要性抽样法是以$i$个重要性函数$g_i(\cdot)$代替原来的$i$个随机变量的概率密度函数，进行模拟抽样时改从重要性概率密度函数中抽出. 由于重要性函数的样本值对失效概率值的

收稿日期：1994-10-18

* 我院94届毕业生，现中科院力学所博士生

贡献大，使进行 $N$ 次模拟循环计算中失效事件增多，因此可以适当地减少模拟次数。理论证明，当对应于 $k$ 个随机变量 $X_j$（$j=1, 2, \cdots, k$）的一组随机值 $x_j(j=1, 2, \cdots, k)$，代人失效判据后、认为失效的随机样点 $x_j^*(j=1, 2, \cdots, k)$代人 $k$ 个随机变量的原概率密度函数 $f_j(\cdot)$和重要性函数 $g_j(\cdot)$，则可算出函数形状比 $f_j(\cdot)/g_j(\cdot)$。当各随机变量函数形状比的连乘积 $[f_1(x_1^*)/g_1(x_1^*)] \cdot [f_2(x_2^*)/g_2(x_2^*)] \cdots [f_k(x_k^*)/g_k(x_k^*)]$ 对于不同的 $x_{ji}^*(i=1,2, \cdots, N)$来说波动小，则可减少计算方差。重要性函数的选定是重要性抽样法成功的关键，目前多采用将原概率密度函数沿危险方向平移一个最佳量后作为重要性函数。

### 1.2 分层抽样法 [1]

对具有主导作用的一个随机变量，例如起始裂纹尺寸 $a_0$ 的样本空间内分割成 $m$ 个区间，按照各区对断裂失效概率贡献大小相应地多抽样或少抽样，此法即为分层抽样法。

首先在 $a_0$ 的样本空间内分成 $m$ 个区后,由 $a_0$ 的概率密度函数，计算 $a_0$ 的随机抽样值从属于第 $i$ 区的概率 $P_i$，再采用直接抽样的 Monte Carlo 法，计算 $a_0$ 值从属第 $i$ 区的裂纹导致断裂的概率 $N_i^f/N_i$($N_i$ 是从 $a_0$ 样本空间的第 $i$ 区的随机抽样数; $N_i^f$ 是 $N_i$ 个样本中，发生断裂事件的样本数)。这样，$a_0$ 从属于第 $i$ 区内的裂纹导致断裂的概率为:

$$P_f^i = P_i \times N_i^f / N_i \tag{1}$$

总的断裂概率为:

$$P_{f总} = \sum_{i=1}^{m} P_i \times N_i^f / N_i \tag{2}$$

理论分析认为，为减少计算估计值方差，应使从每个子区间抽取的样点数正比于该子区间的标准差与子区间长度的乘积。

### 1.3 拉丁抽样法 [2]

若决定模拟循环 $N$ 次，拉丁抽样法则首先将 $[0, 1]$ 区间等分成 $N$ 个互不重叠的子区间，然后在每个子区间内分别进行独立的等概率抽样。为了保证抽取的随机数确属于各子区间，则第 $i$ 个子区间内的随机数 $U_i$ 应满足下列等式

$$U_i = \frac{U}{N} + \frac{i-1}{N} \tag{3}$$

式中 $i=1, 2, \cdots, N$, $U$ 为 $[0,1]$ 区间内均匀分布的随机数，$U_i$ 为属于第 $i$ 个子区间的随机数。

由于存在下列关系式

$$\frac{i-1}{N} < U_i < \frac{i}{N}$$

因而，每一个子区间仅能产生一个随机数，然后仍要采用反变换法，由 $N$ 个子区间产生的 $N$ 个随机数得到 $N$ 个某一概率密度函数的随机抽样值。最后是对各随机变量的随机抽样值进行组对，也就是对各随机变量的随机抽样值所属区间的序号进行随机排列。

设 $K$ 个随机变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 进行 $N$ 次模拟循环为例,由 $x_1$ 的 $N$ 个子区内随机抽取的 $N$ 个抽样值与 $x_2$ 的类似地抽取的 $N$ 个抽样值进行组对、组成 $x_1x_2$ 的 $N$ 个组对。类似

地 $x_1x_2$ 的 $N$ 个组对再与 $x_3$ 的 $N$ 个抽样值进行组对为 $x_1x_2x_3$，如此类推，直至组成 $N$ 组 $x_1x_2\cdots x_k$ 为止。

文献〔3〕提出一个办法能减小因抽样的统计相关性对断裂估计值的影响。

因拉丁抽样法并不能降低估计值的方差。因此，为了提高精度，文献〔4〕提出了拉丁抽样法与能降低方差的对偶变量抽样法和条件期望值法相结合。

### 1.4 分层抽样-重要性抽样复合法

文中提出的分层抽样-重要性抽样复合法是：首先将初始裂纹长度 $a_0$ 按不同的分层规律进行分层（按文献〔5〕办法；按等比级数分层；或平均分层），然后再在每一个子区间进行重要性抽样。当然其他随机变量并不分层，但仍进行重要性抽样。

### 1.5 分层抽样-拉丁抽样复合法

文中提出的分层抽样-拉丁抽样复合法是：首先将初始裂纹长度 $a_0$ 按某一规律分层，然后再在每一子区间进行拉丁抽样。当然其他未分层的随机变量仍进行拉丁抽样。本文与前人的拉丁抽样法不同之处在于：不是从均匀分布的〔0，1〕中抽样，而是从各随机变量分布函数的实际抽样范围内抽样。

## 2 算 例

我们选用文献〔6〕中容器接管的实例，计算其拐角裂纹导致断裂的概率。

容器材料为 16 MnR，接管与容器的内直径分别为 147 mm 和 500 mm，接管与容器的壁厚均为 14 mm，故二者轴线的平分角线方向的壁厚为 20 mm。弹性模量 $E=20.58\times 10^4$ MPa。一年内波动应力循环次数不超过 252 次。工作压力范围为 0～9 MPa。按 Decock 公式计算得到拐角部位应力集中系数 $K_t\approx 2.14$。

为了计算接管经历 $N$ 次波动应力后裂纹的当量表面裂纹深度 $a$，采用屈服应力 $\sigma_Y<540$ MPa 的国产压力容器用钢的 Paris 公式数据，即

$$da/dN=C(\triangle k)^m$$

式中，$m=3.26$；$\triangle K=2.14\triangle\sigma\sqrt{\pi a}$；$\triangle\sigma$ 为波动应力幅值；$C$ 为随机变量，$C$ 的均值为 $2.334\times 10^{-14}$。

经历 $N$ 次波动应力后

$$a=\left[\frac{a_0^{0.63}}{1-7.56C(\triangle\sigma)^{3.26}\pi^{1.63}N\,a_0^{0.63}}\right]^{1.59} \tag{4}$$

采用 COD 断裂判据，$\delta_c<\delta$；采用英国标准 PD6493 的 COD 设计曲线公式计算 $\delta$，则断裂判据为

$$\left.\begin{aligned}\delta_c&\leqslant 2\pi a e_y(e/e_y)^2, &\text{当}\,e/e_y\leqslant 0.5\\ \delta_c&\leqslant 2\pi a e_y(e/e_y-0.25), &\text{当}\,e/e_y>0.5\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中 $\delta_c$ 为临界裂纹张开位移也称断裂韧性；$\delta$ 为裂纹张开拉移；$e$ 为作用在裂纹部位的应

变；$e_y$ 为屈服应变.

将（4）式代入（5）式后，将波动应力幅值$\Delta\sigma$，断裂韧性 $\delta_c$，初始裂纹当量深度 $a_0$，Paris 公式中材料常数 $C$，屈服应力 $\sigma_y$，以及膜应力 $\sigma_m(e=\sigma_m/E)$等视为随机变量，其概率密度函数和分布参数如表 1 所示，则（5）式构成概率论的断裂失效判据．计算断裂概率归结为 6 维积分式．由于求精确的解析解难，故采用不同抽样的 Mante Carlo 法作近似计算．

表 1 各随机变量的概率密度函数和分布参数

| 随机变量 | 概率密度函数 | 分布参数 |
|---|---|---|
| 初始表面裂纹当量深度 $a_0$/mm | $\lambda e^{-\lambda x}/(e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2})$ | $\lambda=0.6$, $x_1=0$, $x_2=20$ mm |
| 膜应力 $\sigma_m$/MPa | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=165.2$ MPa, $\sigma=24.78$ MPa |
| 波动应力幅值 $\Delta\sigma$/MPa | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=82.6$ MPa, $\sigma=24.78$ MPa |
| 材料常数 $c$ | $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=2.33\times10^{-14}$, $\sigma=2.33\times10^{-15}$ |
| 屈服应力 $\sigma_y$/MPa | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=380.0$ MPa, $\sigma=22.84$ MPa |
| 断裂韧性 $\delta_c$/mm | $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$ | $\alpha=1.91$, $\beta=0.138$ mm |

## 3 计算结果

### 3.1 直接抽样的 Monte Carlo 法

模拟 5 万次，计算接管的逐年断裂失效概率，其结果列于表 2 第二栏，以此作为精确值来比较各种抽样法的计算精度．

### 3.2 分层抽样-重要性抽样复合法

参照文献〔5〕的分层办法，将起始裂纹尺寸范围（0，20 mm〕进行分层．分为〔0，0.67〕，〔0.67，1〕，〔1，2〕，〔2，3〕，〔3，6〕，〔6，8〕，〔8，11〕，〔11，14〕，〔14，17〕，〔17，20〕，10 个小区间．由于 $a_0<1$ mm 的裂纹导致断裂的概率虽达 0.58，但能导致断裂的概率很低(仅 $<10^{-7}$)；$a_0>14$ mm 的裂纹导致断裂的概率高，但其出现的概率很低（$<10^{-4}$）．因此在计算时，可将〔0，0.67〕，〔0.67，1〕，〔14，17〕，〔17，20〕这第 1，2，9，10 区间略去不计，不进行抽样．这样大约节约直接抽样数的 2/5．再根据各区间的裂纹对总失效概率贡献大小分别抽取不同的样本，各区间采用重要性抽样，其抽样数分别为 1 000，1 000，2 000，2 000，1 500，800．总计模拟 8 300 次．与直接抽样的 Monte Carlo 模拟 5 万次相比，最大计算误差为 1.7%，计算时间仅为 1/5．详细结果列于表 2 第三栏．

表2　计算结果

| 时间/a | 接管断裂概率($\times 10^3$) | | |
|---|---|---|---|
| | 直接抽样5万次 | 分层抽样–重要性抽样复合法 8 300次 | 分层抽样–拉丁抽样复合法 540次 |
| 5 | 32.1 | 32.56 | 33.6 |
| 10 | 32.9 | 33.22 | 33.68 |
| 15 | 33.9 | 34.49 | 35.48 |
| 20 | 34.9 | 35.52 | 35.62 |
| 25 | 35.8 | 35.87 | 37.81 |
| 30 | 37.0 | 37.20 | 38.89 |

### 3.3 分层抽样–拉丁抽样复合法

先仍按3.2节进行分层抽样，计算3～8区的裂纹导致断裂概率时采用拉丁抽样法．各区间的抽样数分别为80，80，150，150，50，30，总计模拟540次．与直接抽样的Monte Carlo法模拟5万次相比，最大误差约为5.61%，计算时间为1/10 000．其结果详见表2第四栏

## 4　讨　论

(1) 本文提出的分层抽样–重要性抽样复合法不但计算精度高，而且节约上机时间；分层抽样–拉丁抽样复合法的精度虽比分层抽样–重要性抽样复合法稍差，但在计算费用上减少了很多．

(2) 今后尚需改进分层办法和各区间抽样数的分配方案，以及进一步研究拉丁抽样法中组对问题，以减少各随机变量抽样点所属区间序号统计相关性对计算精度的影响．

### 参　考　文　献


1 Rubinstein R Y. Simulation and the Monte Carlo method. John Wiley and Sons, New York, 1981

2 Mckay M D, Beckman R J, Conover W J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. Technometrics, 1979, 2; 239—245

3 Iman R I, Conover W J. A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. Commun. Statist. 1982(B11): 311—334

4 Ayyub B M, Kwanling Lai. Structural reliability assessment using latin hypercube sampling. Proc of the Int Conf on Struct. Safety and Reliability. ICOSSAR -89, San Fransisco, U S A, 1989: 1174—1184

5 Marshall W. An assessment of the integrity of PWR pressure vessels. Report of the UKAEA. 1976

6 Gao Zengliang, Xu Liangfeng, Zhang Kangda. Fatigue crack growth in the nozzle corner of a pressure vessel. Int J Pres Ves & Piping, 1990(42): 1—13


(下转第58页)

# A Study of Parameter Optimization with the Genetic Algorithm

Gao Yanchen Li Dazi

(Department of Automation, Polymer Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing, 100029)

**Abstract:** The essence of optimal problems is to find a point in a search space, whose prescribed features reach maximum (or minimum). The genetic algorithm is a new algorithm which mimics the mechanism of the evolution of life to complete search and optimization. This paper studies it sith a certain objective function. The results show that this algorithm is capable of approaching a globally optimal solution with a great probability.

**Key words:** genetic algorithm; global optimization; objective function

(上接第43页)

# The Application of Statistical Simulating Methods of Several Samplings in Estimating the Failure Probability

Ding Keqin Lin Junfu

(Department of Mechanical Engineering. Beijing University of Chemical Technology, Beijing, 100029)

**Abstract:** A proposed method for calculating the failure probability of the nozzle which combines importance sampling and stratified sampling and a method that combines stratified sampling–Latin hypercube sampling are presented. These combined methods are more accurate and efficient than other sampling methods.

**Key words:** probabilistic fracture mechanics; Monte Carlo simulation; failure probability