华 东 工 业 大 学 学 报
第 17 卷 第 3 期　J. East China University of Technology　Vol.17 No.3 1995

竖直圆柱常物性层流自然对流的半解析解*

黄为民　冯懿冶　游　晖**
（华东工业大学动力工程学院 上海 200093）

摘　要　本文给出了竖圆柱定壁温自然对流问题相似解存在的条件，并用加权残数法得到了半解析解．此解适用于任意 D/L（圆柱长径比）的情况，且表明：当半径 $R\to 0$ 时，由于自然对流流量的增加，导致了放热系数的增加，以及在足够长的 L 处，边界层不仅相似，而且相同，该处的等壁温解与等热流解亦相同．

关键词　自然对流；竖直圆柱；相似解；半解析解；加权残数法
中图法分类号　TK 172

垂直壁面和竖圆柱的自然对流散热问题，出现在许多工程问题中，尤其是当半径 $R\to 0$ 的圆柱散热问题，在电子元器件散热冷却计算中更为重要，因此出现了许多寻找相似解的研究[1]．因为为了找出强化这类传热问题的方法，寻找解析解和相似解将优于数值分析．本文所论问题相似解的存在已获证明，但是 Sparrow[2] 的解仅对于 $\xi\to 0$ 的小参数才适用，而本文采用加权残数法可得到任意 D/L 处解析形式的解，此解可直接得出 $R\to 0$ 时，由于抽吸量增加而导致放热系数增加的结论．此外还可以看出，在足够远的 L 处，边界层不仅相似，而且相同，并且边界上的等壁温条件也同时满足等热流的条件．亦即证明了过增元***提出的在 $R\to 0$ 时，自然对流的等热流与等壁温解趋向一致的物理解释．

1　数学模型

设一直径为 $2R$，高为 L 的恒壁温竖圆柱上的层流自然对流，其中 t_w 为常量．在圆柱坐标中，其边界层方程为

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial r}=0 \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=g\beta(t-t_\infty)+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} \tag{2}$$

收稿日期：1995－03－21

* 国家自然科学基金资助项目　No. 59236140

** 中科院力学所博士生

*** 1992 年过增元与作者黄为民的私人通信

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial r}=\frac{a}{r}\cdot\frac{\partial(r\frac{\partial t}{\partial r})}{\partial r} \tag{3}$$

定义流函数 Ψ 为 $ru=\frac{\partial \Psi}{\partial r}$，$rv=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$，且对式(1)～(3)作坐标变换

$$\xi=K_1x^{\frac{1}{4}},\quad \eta=K_2(r^2-R^2)/x^{\frac{1}{4}} \tag{4}$$

然后进行无量纲化. 为此，引进无量纲余温度与无量纲流函数

$$\theta(\xi,\eta)=\frac{t-t_\infty}{t_w-t_\infty},\ f(\xi,\eta)=K_3\Psi/x^{\frac{1}{4}} \tag{5}$$

式(4)、(5)中 K_1、K_2、K_3 待定.

由流函数 Ψ 的定义，可得

$$u=\frac{2K_2}{K_3}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta},\quad v=-\frac{\xi}{4K_1K_3xr}(f+\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}-\eta\frac{\partial f}{\partial \eta})$$

将边界层方程和能量方程由 (x,r) 坐标转换到 (ξ,η) 坐标，方程式(1)自然满足，方程式(2)可改写为

$$\xi(\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2})-f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$
$$=\frac{K_3^2 g\beta(t_w-t_\infty)}{K_1^4K_2^2}\xi^4\theta+\frac{8K_2K_3\nu}{K_1^2}(\frac{\xi\eta}{K_1K}+R^2)\xi^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3}+\frac{8K_3\nu\xi^3}{K_1^3}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} \tag{6}$$

同样，方程式(3)可改写为

$$\xi(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial f}{\partial \eta}-\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi})-f\cdot\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$
$$=\frac{8K_3a\xi^3}{K_1^3}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\frac{8K_3a\xi^3\eta}{K_1^3}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}+\frac{8K_2K_3aR^2\xi^2}{K_1^2}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} \tag{7}$$

令 $\frac{K_3^2g\beta(t_w-t_\infty)}{K_1^4K_2^2}=1$，$\frac{8K_2K_3\nu R^2}{K_1^2}=1$，$\frac{8K_3\nu}{K_1^3}=1$

解得

$$K_1=\left[\frac{g\beta(t_w-t_\infty)R^3}{\nu^2}\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot R^{-\frac{1}{4}}$$

$$K_2=\left[\frac{g\beta(t_w-t_\infty)R^3}{\nu^2}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot R^{-\frac{7}{4}}$$

$$K_3=\left[\frac{g\beta(t_w-t_\infty)R^3}{\nu^2}\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot R^{-\frac{3}{4}}\cdot \nu^{-1}$$

且有 $\frac{8K_3 a}{K_1^3}=\frac{a}{\nu}=\frac{1}{Pr}$， $K_1K_2r^2=1$

于是，加上边界条件后，竖直圆柱常物性层流自然流问题的数学模型，可归结为求解如下非线性定解问题.

$$\xi\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial f}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right)-f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=\xi^4\theta+\xi^3\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\xi^2(1+\xi\eta)\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3} \tag{8}$$

$$\xi\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}-\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)-f\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{\xi^3}{Pr}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\xi^2(1+\xi\eta)\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} \tag{9}$$

$$f\Big|_{\eta=0},\quad \frac{\partial f}{\partial\xi}\Big|_{\eta=0}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=0,\quad \theta\Big|_{\eta=0}=1 \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big|_{\eta\to\infty}=1,\quad \frac{\partial f}{\partial\eta}\Big|_{\eta\to\infty}=0,\quad \theta\Big|_{\eta\to\infty}=0 \tag{11}$$

2　半解析解与算例

为求非线性定解问题(8)～(11)式的解，采用加权残数法.

设内部试函数为

$$f=c_1\cdot\frac{\xi}{1+\xi}\cdot\frac{\eta^2}{1+\eta^2} \tag{12}$$

$$\theta=\left(1+c_2\cdot\frac{\xi\eta}{1+\xi}\right)e^{-\eta} \tag{13}$$

其中 c_1、c_2 为待定常数.

显然，上述内部试函数式(12)、(13)均严格满足非线性定解问题中边界条件式(10)、(11)，待定常数则采用加权残数法中的最小二乘配点法(此法特点：在解的解析结构清楚的前提下，计算精度较高而工作量较小)求得.

算例，设 $Pr=0.72$，内部配点77个点，其中

$\xi=0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10$

$\eta=0.5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

采用最小二乘法求得的待定常数为

$c_1=0.664\,3,\quad c_2=0.411\,4$

代入式(12)、(13)，即得非线性定解问题(8)～(11)式的半解析解

$$f=0.664\,3\cdot\frac{\xi}{1+\xi}\cdot\frac{\eta^2}{1+\eta^2} \tag{14}$$

$$\theta=(1+0.4114\cdot\frac{\xi\eta}{1+\xi})e^{-\eta} \tag{15}$$

由此，求得速度 $\frac{\partial f}{\partial\eta}$ 分布与温度 θ 分布分别如图1、图2所示.

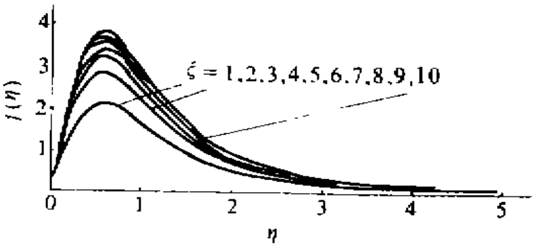

图1 速度分布

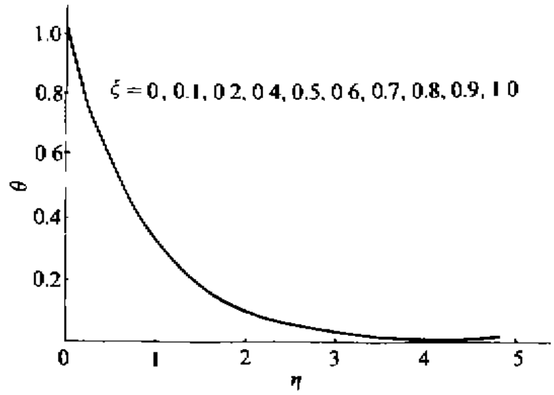

图2 温度分布

3 相似解存在的条件

设边界层方程式(1)～(3)的边界条件为

$$u\Big|_{r=R}=0,\quad v\Big|_{r=R}=0,\quad t\Big|_{r=R}=t_\infty\ ;$$

$$u\Big|_{r\to\infty}=0,\quad v\Big|_{r\to\infty}=0,\quad t\Big|_{r\to\infty}=t_\infty\ ;$$

$$u\Big|_{r\to 0}=0,\qquad\qquad t\Big|_{r\to\infty}=t_\infty\ .$$

对上述定解问题作变换

$$x=GrRx^*,\quad r=R\sqrt{r^*}$$

并定义流函数 φ 为 $u=\frac{Gr\nu}{R}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r^*}$，$v=-\frac{\nu}{2R\sqrt{r^*}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^*}$，且令 $\xi=x^*$，$\eta=r^*g(x^*)$，$\varphi=z(\xi)f(\xi,\eta)$，则方程式(1)自然满足，而式(2)、(3)可分别改写为

$$gz^2\frac{dg}{d\xi}(\frac{\partial f}{\partial\eta})^2+g^2z\frac{dz}{d\xi}(\frac{\partial f}{\partial\eta})^2+g^2z^2\frac{\partial f}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}-g^2zf\frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}-g^2z^2\frac{\partial f}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}$$

$$=\theta+4g^2z(\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\eta\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3}) \tag{16}$$

$$z\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-f\frac{dz}{d\xi}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-z\frac{\partial f}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{4}{Pr}(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\eta\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}) \tag{17}$$

方程式(16)、(17)存在相似解的条件为

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0、\frac{\partial f}{\partial\xi}=0、z=K_1\xi,\ g=K_2\xi^{-\frac{1}{2}}$$

其中，K_1、K_2 为常数，不失一般性，选择 $K_1=K_2=1$，则式(16)、(17)为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2-f\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=\theta+4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\eta\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3}\right) \tag{18}$$

$$-f\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{4}{Pr}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\eta\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}\right) \tag{19}$$

相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\eta}\right|_{\xi=0}=0,\quad \theta\Big|_{\xi=0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\eta}\right|_{\eta=\xi^{-\frac{1}{2}}}=0,\ \theta\Big|_{\eta=\xi^{-\frac{1}{2}}}=1,\ f\Big|_{\eta=\xi^{-\frac{1}{2}}}=0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\eta}\right|_{\eta=\infty}=0,\ \theta\Big|_{\eta=\infty}=0.$$

当 $R=0$ 时，方程具有相似性，但边界条件含有 $\xi^{-\frac{1}{2}}$，故不存在相似解.

当 $R\to0$ 时，在上述变换中 R 以有限长度(如 1 m)作当量尺度，变换后方程不变，相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\eta}\right|_{\xi=0}=0,\quad \theta\Big|_{\xi=0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\eta}\right|_{\eta\to0}=0,\quad \theta\Big|_{\eta\to0}=1,\quad f\Big|_{\eta\to0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\eta}\right|_{\eta\to\infty}=0,\quad \theta\Big|_{\eta\to\infty}=0.$$

这样的边界条件也满足相似解要求，即说明当竖直圆柱直径趋于零时，其速度分布和温度分布也存在相似性.

4　讨论和结论

a. 当 $R=0$ 时，从图 2 计算得到不同的 ξ 位置有相同的 $\theta\sim\eta$ 曲线表明，在等壁温条件下，有相似的温度边界层. 同时，由于此温度边界层不仅相似，而且相同，因此 $\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial\eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial q}{\partial\xi}\right|_{\eta=0}=0$，即为等热流条件. 故此解意味着也满足等热流条件.

b. 在 $\xi\geqslant10$ 附近，此解中边界层速度分布变为相似解. 由 ξ 定义，当 $R\to0$，x 有限值时，此条件满足，故小 R 时速度相似条件满足，且所述等热流也满足此解.

c. 对任意 L/D、任意 x 处和 R 处，有加热垂直圆柱在等热流和等壁温定解条件下一致有效的半解析解.

参考文献

1 Yang K T. Possible similarity solutions for laminar free convection on vertical plates and cylinders. *J. appl Mech*, 1960, 27: 230～236

2 Sparrow E M, Gregg J L. Laminar free convection from the outer surface of a vertical slender cylinder. In: *Proceedings of Fifth International Heat Transfer Conference*, 1975, 3(section NCL 4): 15～19

The semi-analytic solution of natural convection for vertical cylinder with constant physical properties

Huang Weimin Feng Yizhi You Hui

(College of Power Engineering, ECUT)

Abstract The conditions of existence of an analogous solution of vertical cylinder's natural convection with constant wall temperature is presented in the paper. A semi-analytic solution has been obtained with the method of weighted residuals, which is suitable for any D/L ratio. The study illustrates: when cylinder radius $R \to 0$, the convective heat transfer coefficient increases, accompanying with the increase of natural convection flow and at the position of long L, the boundary layer is similar and equal, leading to an unique solution of both the constant wall temperature case and the constant heat flow case.

Keywords *natural covection; vertical cylinder; analogous solution; semi-analytic solution; method of weighted residuals*