

# 物理短裂纹疲劳扩展的 Markov 链模拟<sup>\*</sup>

王维明 柳春图 段梦兰 徐 灏

(中科院力学所 北京 100080)

(东北大学 沈阳 110006)

## 摘 要

使用 Markov 链理论, 基于 16Mn 钢小试样疲劳裂纹扩展试验, 构造了一个物理短裂纹扩展的概率演化模型。该模型对裂纹扩展的循环数分布以及分布的演化过程的模拟, 表明了与实验结果良好的吻合程度, 从而为物理短裂纹扩展的概率分析及可靠性评价提供了手段。

关键词: 物理短裂纹; Markov 链; 概率演化; 循环数分布; 16Mn 钢

## 1 引 言

疲劳短裂纹一般可分为: 微结构短裂纹和物理短裂纹, 前者与材料结构特征尺寸(如晶粒尺寸)同量级; 后者则一般在 0.1mm 至 1.0mm 左右。微结构短裂纹的应用, 由于材料自身存在各种缺陷以及加工的原因等, 受到了极大的限制, 在实际工程中, 几乎很难应用。相比之下, 物理短裂纹在实际工程中却大量存在, 如飞机紧固件孔边裂纹<sup>[1]</sup>, 精密轴类零件上的裂纹等等。因此, 物理短裂纹疲劳扩展规律的研究具有实用价值。

在短裂纹研究历史上<sup>[1-3]</sup>, 涉及统计性能的研究工作并不多见, Bogdanoff 等<sup>[4]</sup>使用 B-模型, 模拟了疲劳裂纹的演化过程, 文献[1]中, 介绍了在短裂纹扩展概率描述上的许多进展。过去对裂纹的研究大都针对个别样本裂纹, 不能反映裂纹整体性能, 缺乏完整性和可靠性, 而现有的许多概率研究工作, 在短裂纹扩展研究上尚缺乏实践。本文借鉴以往研究的经验, 针对 16Mn 钢小试样, 由多次重复试验<sup>[5]</sup>, 首先获得了物理短裂纹扩展数据, 采用 Bogdanoff 方法, 并使用了非稳态 Markov 链转化为准稳态 Markov 链的处理, 建立了一个物理短裂纹扩展的概率演化模型, 给出了疲劳扩展循环数概率分布及沿裂纹发展方向上的演化过程。

## 2 试验和结果

试验采用了 16Mn 钢棒材(轧制退火态), 其成分( $W_i$  - %)为: C0.16, Si0.36, Mn1.38,

\* 来稿日期: 1995-03-27; 修回日期: 1995-11-09

SQ 11, P0 17, Ni 12, Cr0 13, Cu0 15; 破断和屈服强度为 562 和 373MPa; 延伸和面缩率为 0.33 和 0.7; 硬度为 HB140。

试验在旋转弯曲疲劳机上进行, 采用等幅应力加载, 名义应力幅为 285MPa, 裂纹长度的测量采用复型技术和显微镜观测, 图 1 为试验用试样。

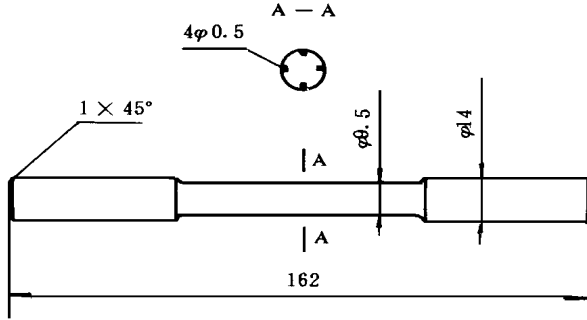


图 1 16Mn 钢试样

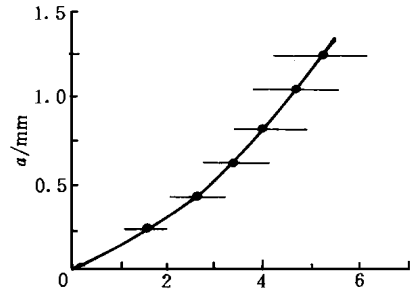


图 2 裂纹扩展的分散程度

在文献[5]基础上, 进一步扩大试验的样本容量, 共获得 16 条裂纹扩展样本曲线, 其结果由图 2 示出。横坐标为疲劳循环数  $N$ , 纵坐标为试样孔边裂纹的表面长度  $a$ , 图上示出在不同裂纹长度时, 循环数的分散程度。

循环数的样本均值  $\hat{N}$  和方差  $S_n^2$  可由试验数据获得。关于  $\hat{N}$  和  $S_n$  的置信区间, 在循环数为近似正态分布假设下, 可由下式估算:

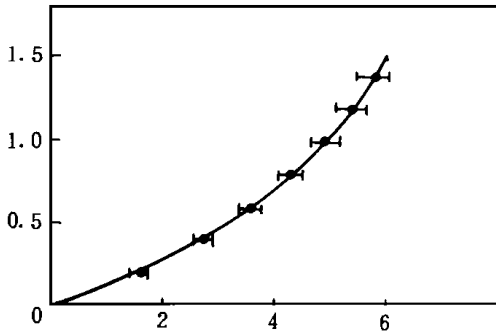
$$\begin{aligned} N: & (\hat{N} - \delta(\alpha)S_n, \hat{N} + \delta(\alpha)S_n) \\ S_n: & (Y_1(\alpha)S_n, Y_2(\alpha)S_n) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\delta(\alpha) = t_{\alpha/2}(n-1) / \sqrt{n}$ ,  $Y_1(\alpha) = \sqrt{(n-1) / \chi_{\alpha/2}^2(n-1)}$ ,  $Y_2(\alpha) = \sqrt{(n-1) / \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}$ ,  $\alpha$  为显著度,  $n$  是样本数,  $t_{\alpha/2}(n-1)$  为  $t$  分布表中的系数,  $\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$  和  $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$  是  $\chi^2$  分布表中系数。

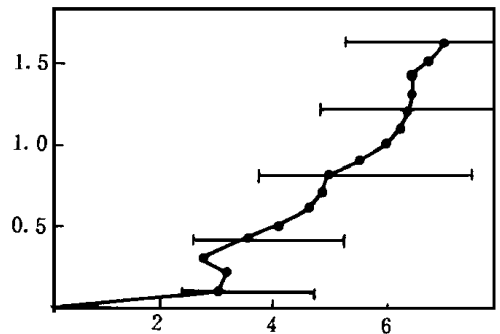
当  $\alpha = 0.05$  时,  $\hat{N}$  和  $S_n$  的置信区间为:

$$(\hat{N} - 0.5329S_n, \hat{N} + 0.5329S_n), (0.7387S_n, 1.5477S_n)$$

图 3 示出了不同裂纹长度时, 置信区间大小及变化情况。



(a)  $\hat{N}$  的置信区间 ( $\alpha = 0.05$ )



(b)  $S_n$  的置信区间 ( $\alpha = 0.05$ )

图 3

### 3 Markov 链模型

裂纹扩展数据可构成离散的时间序列,这一序列可使用有限状态-离散时间 Markov 链描述。将裂纹扩展过程划分为有限个离散状态,如  $b$  个状态,各状态对应相应的裂纹长度。设第  $j$  个状态对应裂纹长度为  $a_{j0}$ 。让  $E_k^j$  表示在时间  $k$  时,裂纹长度到达  $a_j$ ,即达到  $j$  状态这一事件,则由 Markov 过程理论有:

$$P_{rob}\{E_k^j/E_{k-1}^{j_1} \dots E_{k-2}^{j_2} \cdot E_{k-1}^{j_1}\} = P_{rob}\{E_k^j/E_{k-1}^{j_1}\} \quad (2)$$

式(2)表示 Markov 链的无后效性性质,即在  $k$  时刻,裂纹扩展状态的统计特性仅取决于前一时刻  $k-1$  状态,而与过去其它时刻无关。

裂纹扩展初始状态的概率分布以  $(1 \times b)$  行向量表示:

$$P_0 = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots, \pi_{b-1}, \pi_b) \quad (3)$$

式中  $\pi_j = P_{rob}\{E_0^j\}$ ,且有  $\sum_{j=1}^b \pi_j = 1$ 。取  $\pi_b = 0$ ,以表明疲劳初始时不会失效。

裂纹扩展至  $x$  时刻,所处状态的概率分布可表示为:

$$P_x = (p_x(1), p_x(2), \dots, p_x(j), \dots, p_x(b-1), p_x(b)) \quad (4)$$

这里  $p_x(j) = P_{rob}\{E_x^j\}$ ,  $\sum_{j=1}^b p_x(j) = 1$ ,  $p_x(j) > 0$ 。

Markov 链每一状态有二种可能的发展,一是在下一时刻,仍保持在原状态不变;二是从目前状态转移到下一个状态上。对于第  $j$  个状态前一种可能的概率为  $p_j$ ,后一种可能的概率为  $q_j$ ,各个状态的条件概率构成状态的转移矩阵如下:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & & & & \{0\} \\ & p_2 & q_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & p_j & q_j & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_{b-1} & p_{b-1} \\ \{0\} & & & & & & p_b \end{bmatrix} \quad (5)$$

这里  $0 < p_j < 1$ ,  $p_j + q_j = 1$ 。  $p_b = 1$ ,取  $b$  状态为吸收态,表明疲劳失效。其它状态均为暂态。各个状态的转移示意图如图 4。

由 Markov 链理论:在任一时刻  $x$  的有限维分布完全由初始分布和转移概率确定。即有:

$$P_x = P_0 \prod_{i=1}^x P_i \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

对于稳态的 Markov 链,  $P_i = P$  (式(5)的一步转移概率矩阵),于是式(5)简化为:

$$P_x = P_0 P^x \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

设  $W_b$  为到达  $b$  状态的疲劳循环数,则  $W_b$  的累积分布函数为:

$$F(x; b) = P_{rob}\{W_b < x\} = p_x(b) \quad (8)$$

根据生成函数理论<sup>[4]</sup>,借助于几何变换,可获得  $W_b$  与  $p_i$  和  $q_i$  间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} E[W_b] &= \sum_{i=1}^{b-1} (1 + p_i/q_i) = \mu_w \\ \text{Var}[W_b] &= \sum_{i=1}^{b-1} (p_i/q_i) (1 + p_i/q_i) = \alpha_w^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这里  $E[\bullet]$ 、 $\text{Var}[\bullet]$  分别表示期望值和方差。

由式(9) 可求出各个状态上的转移概率, 从而得到  $P$  矩阵。

在实际裂纹扩展中, 往往呈现非稳态性, 因此, 需要将以上稳态的 Markov 链模型转化为非稳态的 Markov 链, 至少是准稳态的 Markov 链。文献[6] 中给出了一个方法, 该方法可将一个非稳态 Markov 链转换为一个近似的准稳态 Markov 链。这种转换取决于实际问题的时间坐标  $y$  与稳态 Markov 链时间坐标  $x$  的一个非线性变换。设  $Q_j$  为非稳态 Markov 链在第  $j$  个状态上的转移矩阵, 则概率分布  $P_y$  为:

$$P_y = P_0 \prod_{j=1}^y Q_j \quad (10)$$

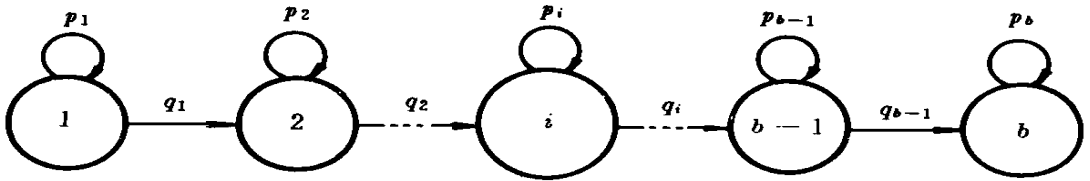


图 4 Markov 链状态示意图

设  $x$  与  $y$  存在非线性变换关系:

$$y = f(x) \quad (\text{或 } x = f^{-1}(y)) \quad (11)$$

则在区间  $(x_{j-1}, x_j]$  上,  $(y_j - y_{j-1})$  中包括有  $m$  个整数时,  $Q_j$  按下式计算:

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= P^m \quad m = 1, 2, \dots \\ Q_j &= I(\text{单位阵}), m = 0 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

于是式(10) 变为:

$$P_y = P_0 \prod_{j=1}^y P^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

## 4 模拟结果

将 16Mn 钢孔边物理短裂纹扩展划分为 10 个状态, 各状态对应的裂纹尺寸  $a$  依次为:

$$0.0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1.0 \quad 1.2 \quad 1.4 \quad 1.6(\text{mm})$$

状态的一步转移概率分别为:  $p_1 = 0.486, p_2 = 0.094, p_3 = 0.177, p_4 = 0.526, p_5 = 0.676, p_6 = 0.484, p_7 = 0.550, p_8 = 0.649, p_9 = 1.0$ 。  $q_1, q_2, \dots, q_9$  可由  $q_j = 1 - p_j$  求得。

本问题实际时间为疲劳循环数  $N$ , 则  $x$  与  $N$  之间的非线性关系可在各个不同状态上确定。例如, 在  $a = 0.2(\text{mm})$  状态上,  $x$  与  $N$  存在如下关系:

$$x = AN + BN^2 + CN^3 \quad (14)$$

式中  $A = 1.009 \times 10^{-3}, B = -1.457 \times 10^{-7}, C = 5.458 \times 10^{-12}$ 。

图 5 给出了由 Markov 链模型模拟获得的循环数分布曲线及其沿裂纹长度方向上的演化

过程, 图上实心点为实验得到的循环数的经验累积分布结果。可见二者之间取得了良好吻合, 表明M arkov 链模型极强的适应性。

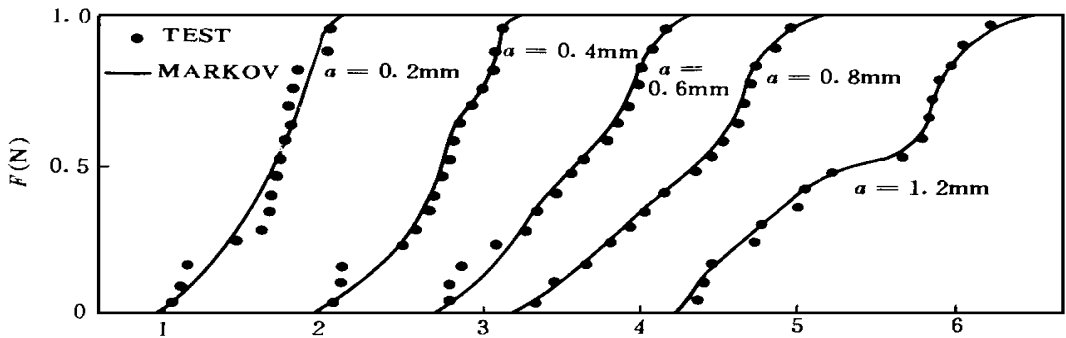


图 5 循环数分布曲线  $F(N)$

## 5 结 论

- 1) 本文首先提供了 16Mn 钢试样物理疲劳短裂纹扩展的经验累积分布及统计特性;
- 2) 构造了一个准稳态的M arkov 链模型, 描述物理疲劳短裂纹的扩展;
- 3) 模型模拟结果, 表明了与实验结果的吻合性。

## 参 考 文 献

- [1] James W. Provan, 概率断裂力学和可靠性, 北京: 航空航天工业部《AFD》系统工程办公室译, 航空工业出版社, 1989
- [2] Suresh S and Ritchie R. O., Propagation of short fatigue cracks, Int Met Revs, 1984, Vol 29(6): 445~ 475
- [3] Miller K. J., The behavior of short fatigue cracks and their initiation, Part I A review of two books Fat Engng Mater. & Stract, 1987, Vol 10(2): 93~ 113
- [4] Bogdanoff J. L. and Kozin F., Probabilistic models of cumulative damage, New York: Wiley and Sons 1985: 33 ~ 225
- [5] W. M. Wang, Y. H. Huang and H. Xu, Propagation of short fatigue cracks in steel 16Mn, ACTA METALLURGICA SINICA (English edition) Series A., 1993, Vol 6(2): 107~ 110
- [6] Bogdanoff J. L. and Kozin F., On nonstationary cumulative damage model, J. of Appl Mech, 1982, Vol 49 (1): 37~ 42

## Markov Chain Modelling of Physically Fatigue Short Crack Propagation

Wang Weiming   Liu Chuntu   Duan Menglan   Xu Hao

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

(Northeastern University)

### Abstract

Based on the experiments on the propagation of physically fatigue short cracks in steel 16Mn, a probabilistic evolutionary model of physically fatigue short cracks was constructed by means of Markov chain theory. For a good modelling, a method was employed to transform a non-stationary Markov chain into a quasi-stationary one. The model was used to simulate the fatigue cycle number distribution and its evolutionary process of physically fatigue short cracks in steel 16Mn, and the results from the model showed well agreeable to the data from the experiments. The model provides a tool for fatigue probabilistic analysis and reliability assessments of physically fatigue short cracks.

Keywords: *physically short crack, markov chain, probabilistic evolution, cycle number distribution, steel 16Mn.*

## The Reynolds Shear Stress Distribution in the Near Wake of an Airfoil at Very Low Turbulence Level

He Kenin   Bai Cunru

(Northwestern Polytechnical University)

### Abstract

The experimental investigations of the turbulent characteristics at trailing edge of aerodynamic bodies were increased in recent years (4-7). It has important meaning for the improvements of the characteristics of airfoils for airplane and gas turbine's blade and for the investigation of the noise distribution near the trailing edge. From the investigation of correlation between local Reynolds shear stress and turbulent kinetic energy of ref. 8-10, four conclusions had been obtained in ref. 11. But, in that time we haven't test condition for investigating the effect of turbulence level. In recent years, a low turbulence wind tunnel has been constructed in NPU. In this wind tunnel, we have tested airfoil NACA 0012 at very low turbulence level (0.02%) and some test results for the turbulent characteristics in boundary layer and wake of the airfoils were obtained.

This paper describes the Reynolds shear stress distribution in the near wake of NACA 0012 symmetric airfoil measured by a constant temperature hot wire anemometer.

The results had shown, the Reynolds shear stress distribution in the flow direction and in the width of the wake had regular forms obviously. When compared with the results obtained