

一种自适应涡团法*

王东耀 马晖扬 童秉纲

(中国科学院力学所) (中国科技大学研究生院)

摘要 涡团法对二维无粘不可压缩流动是具有吸引力的数值方法. 本文应用 Delaunay 三角形, 提出了一种自适应涡团法. 数值结果表明, 本文涡团法比传统涡团法有更高的精度, 能适应于长时间历程问题.

关键词 涡方法, 自适应涡团

中图分类号 O357.1

1 引言

本文的涡方法是近廿年来迅速发展起来的一种模拟流动的数值方法. 用涡方法模拟不可压缩流动具有很强的直观物理性^[4,7]. 流动是由一系列有标记的涡团的运动来表达的. 传统的涡团法是由 Chorin^[2]将点涡法^[6]改造而来的, 在此基础上一些提高精度的方法^[1,7]先后被提出来, 但这些方法的精度在时间历程较长时总是迅速下降. 本文提出的涡团法对流场的演化在一定程度上能自行调整, 经过较长的时间历程之后精度也不明显下降, 仍然较高.

本文考察了涡元对流场的作用, 分析了对流场演化能够自适应的涡团的特点, 提出了一种自适应涡团法. 本文涡方法已推广到具有固体边界的有粘流动, 在边界附近涡元分布较密集, 则涡元尺度较小; 而在外区涡元分布较稀疏, 则涡元尺度较大. 这在一定程度上反映了流场结构的尺度, 数值结果也是令人满意的^[9].

2 涡方法

二维无粘不可压缩流动的 Euler 方程的涡量形式为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \omega = 0 \quad (1)$$

其中 ω 为涡量, \bar{V} 为速度, 均为空间 $z \equiv (x, y)$ 及时间 t 的函数. 引入流函数 ψ , 则有

$$\Delta \psi = -\omega \quad (2)$$

由 Biot-Savart 定律, 速度场可由涡量场唯一确定:

$$\bar{V}(z, t) = (K * \omega)(z, t) = \int_{R^2} K(z - z') \omega(z', t) dz' \quad (3)$$

1993年4月13日收到.

* 国家自然科学基金资助项目

其中

$$K(z) = \frac{1}{2\pi|z|^2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (4)$$

若流场由流体质点的位置与时间表示,即 $z = z(\zeta, t)$, 其中 ζ 为初始时刻的质点位置. 因此由(3)式,有

$$\frac{dz}{dt}(\zeta, t) = \int_{R^2} K[z(\zeta, t) - z(\zeta', t)] \omega(\zeta') d\zeta' \quad (5)$$

将式(5)离散为

$$\frac{dz}{dt}(\zeta, t) = \sum_j^N K[z(\zeta, t) - z(\zeta_j, t)] \omega(\zeta_j) A_j(t) \quad (6)$$

这里 A_j 是涡元的面积. 记 $z(\zeta_j, t) = z_j(t)$, $\omega(\zeta_j) = \omega_j$, 则式(6)为

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_j^N K(z_i - z_j) \omega_j A_j \quad (7)$$

由于 $K(z)$ 在 $|z|=0$ 时有奇性, 为了提高方法的稳定性, 引入涡量分布的形函数 $\varphi_\sigma(z) = \frac{1}{\sigma^2} \varphi(z/\sigma)$, 这里 σ 是涡核的半径, 亦即涡团的截断参数. 以 $K_\sigma(z) = \varphi_\sigma(z) * K(z)$ 代替 $K(z)$, 有

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_j^N K_\sigma(z_i - z_j) \omega_j A_j \quad (8)$$

因为涡团的大小、环量及形函数的截断参数均不随时间变化, 因此 Chorin 涡团法在应用时很方便, 但该涡团模型存在不容易适应流场的扭曲变形、其误差又随时间迅速增长的缺点.

为解决这个问题, 我们提出了一个对流场的扭曲变形能在一定程度上自适应调整的涡团模型. 将涡量场初始离散后, 各个涡元即以当地速度运动, 随着时间的推移, 涡元中心的相对位置也在不断改变. 涡量是连续分布的, 因此当相邻涡元之间的距离变化相当大时, 仍然认为各涡元的面积和环量保持不变是无法适应流场的演化的. 涡元的面积应该取决于邻近涡元之间的相对位置, 它的面积、环量均随着它们的位置的迁移而改变. 涡元的相互位置关系是由 Delaunay 三角形的布置来确定的, 由于 Delaunay 三角形是局部最佳三角形, 所以插值性质是最好的. 完成 Delaunay 三角形的布置之后, 我们可以得到涡元的面积及环量, 并确定涡元形函数的截断参数. 各个涡元以时间步为单位运动之后, 又重复以上各步骤.

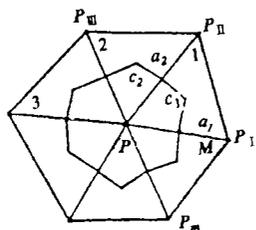


图 1 自适应涡团示意图

Fig. 1 Sketch map of a adaptive vortex element

首先我们应用 Delaunay 三角形进行构造. 涡元 P 和与其相邻的二个涡元的中心构成一个 Delaunay 三角形. 因为任一 Delaunay 三角形内不可能包含其它涡元, 所以由 Delaunay 三角形的排列来确定邻近涡元是合适的^[5]. 如图 1 所示, 设以涡元中心 P 为顶点的 Delaunay 三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, 按逆时针方向围成一个凸多边形. 取三角各相邻的中点和形心, 将其依次连接, 构成一个以 P 为中心的多边形, 该多边形所围区域就是我们需要的涡元, 其环量为涡元中心的涡强及涡元面积之乘积. 在实际计算中, 我们提出了一种布置 Delaunay 三角形的快速算法, 使构造自适应涡元成为实际可行的方法.

其次是关于涡元形函数的截断参数的确定. Beale 和 Majda^[1]认为引入形函数, 用具有涡

核的涡团模型有较高的精确度. Mald^[3]证明了涡团法的收敛性,并认为 $\sigma = ch^q$ ($0 < q \leq 1$, 其中 h 为正方形涡元的边长. 在数值计算中,人们注意到取较小 σ 时短时间内数值解精度较高,但在时间较长时精度较低;取较大 σ 时,则相反. 我们考察涡元对流场的作用. 设边长为 h 的正方形涡元 P , 中心为 $z_P = (x_P, y_P)$, 环量为 $\Gamma_P = \omega(z_P)h^2$; 设涡元外一点 Q 处在涡元对称轴上, 且 $z_Q = (x_Q, y_P) |x_Q - x_P| = L$ (见图 2). 假设涡元的涡量是均匀分布的, 则涡元对 Q 点的诱导速度为

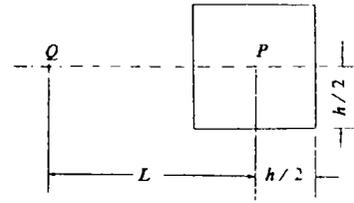


图 2 涡元 P 的作用示意图

Fig. 2 Sketch map of a vortex element induces velocity

$$V_{PQ} = \frac{1}{2\pi} \mu(L) \cdot h\omega \int_{L-h/2}^{L+h/2} \frac{1}{x} dx$$

化简得

$$V_{PQ} = \frac{1}{2\pi} \mu(L) \cdot \frac{\Gamma_P}{r} \tag{8}$$

其中 $\mu(z) = \frac{1}{|z|^2} (-y, x)^T$, $r = h / \left[\ln \frac{L+h/2}{L-h/2} \right]$. 当 $L \gg h$ 时, $r \approx L$; 当 $L = h$ 时, $r \approx h$. 因此涡元 P 对流场的作用近似相当于截断参数为 h 的涡团, 即

$$\sigma = h \tag{9}$$

该式对圆形涡元是准确的, 但对多边形涡元是近似的. 对本文所提自适应涡元, 可取

$$\sigma_i = \sqrt{A_i} \tag{10}$$

且(8)式为

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_j^N K_{\sigma_j}(z_i - z_j) \omega_j A_j \tag{11}$$

该涡团的面积、环量及形函数截断参数均不由人为决定, 因此没有自由参数, 且是完全 Lagrange 的, 对流场自适应的.

3 数值结果

本文选择一个较为简单的模型问题来检验我们提出自适应涡团的适用性. 该问题的初始涡量分布为

$$\omega(r) = \begin{cases} (1 - r^2)^4, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \tag{12}$$

这个问题曾由 Beale 和 Majda^[1]用来研究形函数的有效性. 它的精确解是

$$V(r) = H(r) (-y, x)^T \tag{13}$$

其中

$$H(r) = \begin{cases} [1 - (1 - r^2)^{K+1}] / [2(K+1)r^2], & r \leq 1 \\ 1 / [2(K+1)r^2], & r > 1 \end{cases}$$

本文考察了 $K=3$ 的情况. 形函数取 $f_\sigma(r) = 1 - 2e^{-r^2/\sigma^2} + e^{-r^2/2\sigma^2}$, $K_\sigma(r) = K(r)f_\sigma(r)$. 在各个不同 r 值的同心圆上取一点, 考察 $\sigma = 3h, 2h, 1.5h, h, 0.5h$ 时数值解与精确解之差, 离散单元为正

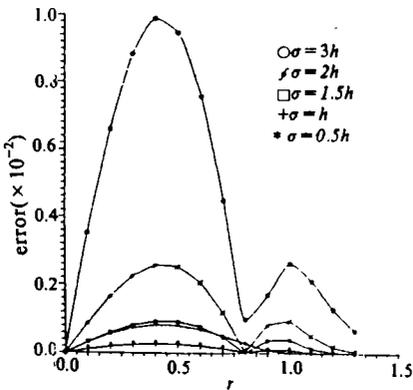


图 3 形函数截断参数对误差的影响

Fig. 3 Errors versus parameters of cut-off function

方形(见图 3)。由图可知, $\sigma=h$ 时数值解的误差是最小的, 因此(9)式与(10)式是合适的。定义平均误差为

$$\text{erre} = \left(\frac{1}{N} \sum_j |V_{j,\text{comp}}^2 - V_{j,\text{exact}}^2| \right)^{1/2} \quad (14)$$

用传统涡团法与本文自适应涡团法所得数值解的 errors 示于图 4, 初始离散尺度为 $h=0.125$, $\Delta t=0.5$, 用二阶 Runge-Kutta 法对时间积分。数值结果表明, 在时间 t 很小时两者的误差相当, 但随着时间 t 的增大, 传统涡团法的误差增长很迅速, 而本文自适应涡团法的误差不单调增长, 基本上取决于初始离散的尺度。在 t 较大时, 本文方法的精度显著高于传统涡团法。

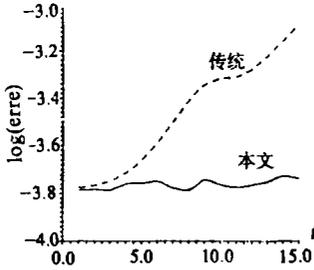


图 4 本文涡团法与传统涡团法的误差比较

Fig. 4 The Comparison of the errors with respect to the present vortex method and the classical vortex method due to chorin

4 结论

本文提出了一种自适应涡团法, 它的面积环量和形函数截断参数均由离散流场本身确定, 因此没有自由参数; 涡团的尺度能在一定程度上反映流场结构的尺度, 可以避免涡团的严重扭曲变形, 无须对涡量场重新离散, 适于长时间历程问题。本文涡团法比传统涡团法有更高的精度, 对 2D Euler 方程是有效的, 且可推广到有固体边界的粘性流动。

参 考 文 献

- [1] Beale J T and Majda A J, *J. Comp. Phy.*, **58**(1985), 188-208.
- [2] Chorin A J, *J. Fluid Mech.*, **57**(1973), 785-796.
- [3] Hald O H, *SIAM J Numer. Anal.*, **18**(1979), 726-755.
- [4] Leonard A, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **17**(1985), 523.
- [5] Preparata F P and Shamos M I 著, 庄心谷译, 计算几何导论, 科学出版社, 1985.
- [6] Rosenhead L, *Proc R. Soc., London*, **A134**(1931), 170.
- [7] Russo G, *J Comp Phys.*, **108**(1993), 84.
- [8] Sarpkaya T, *J. Fluid Engineering.*, **111**(1989), 5-52.
- [9] 王东耀, 一种新的确定性涡方法及非常流动的数值模拟, 中国科技大学博士论文, 1994.

A Self-Adaptive Vortex Blob Method

Wang Dongyao

(Institute of Mechanics Academia Sinica)

Ma Huiyang Tong Binggang

(Graduate School of USTC, Beijing)

Abstract This paper presents a self-adaptive vortex blob method constructed by Delaunay triangulation. Numerical results show that the method is more accurate than the classical ones, and is highly accurate over long time intervals.

Key words vortex method, self-adaptive vortex blob