

# 非圆管截面 Poiseuille 流动的统计模拟<sup>●</sup>

蒋建政 沈青 樊菁

(中国科学院力学研究所 LHD, 北京 100080)

**摘要** 本文用直接模拟 Monte Carlo(DSMC)方法和信息保存(IP)方法模拟了矩形, 六边形和半圆形截面的过渡领域 Poiseuille 流动。DSMC 方法和 IP 方法结果相互之间较好的符合, 而 IP 方法的计算效率比 DSMC 方法的计算效率高得多。由这两种方法得到的质量流率与 Hasegawa 和 Sone 等人的 BGK 模型结果相符。通过用这两种方法对于不同宽高比矩形截面的计算, 给出了侧壁面对质量流率和沿中心线的速度分布的影响。

**关键词** IP 方法 DSMC 方法 过渡领域 Poiseuille 流动

## 1 引言

通过管道的稀薄气体流动广泛应用于各种技术中, 如真空技术、微机电系统(MEMS)、空天飞行器等等。在管道两端间假设为线性分布的压力作用下的 Poiseuille 流动, 引起了许多科学家和技术人员的兴趣<sup>[1~7]</sup>。大部分工作是针对在两个平行平板间和通过圆形管道的 Poiseuille 流动, 也有一部分工作是对矩形, 六边形和半圆形等非圆形截面流动的研究。当前, 一种新的制造技术, 微加工技术被应用于制造微槽道。作为一种刻蚀技术, 最容易生产矩形截面的槽道, 所以矩形截面具有特殊重要的意义。最近实验研究显示了压力分布的非线性<sup>[8,9]</sup>。但是线性压力分布假设下的流动由于其简单性并能反映流动的基本特性, 它仍然是值得研究的基本问题。

当流动的特征尺度是如此小或气体是如此稀薄, 以至于气体分子的平均自由程和系统的特征尺度相比不能忽略时, 普通的流体动力学不能适用, 必须使用建立在分子动理论基础上的分子气体动力学方法。现有的通过非圆形截面的 Poiseuille 流动结果是通过 Boltzmann 方程的 BGK 模型得到的<sup>[3,4,6,7]</sup>。然而 BGK 模型不能用物理过程得到输运特性和相应的密度、温度等物理量之间的真实关系。

本文用直接模拟 Monte Carlo(DSMC)方法<sup>[10]</sup>和信息保存(IP)方法<sup>[11,12]</sup>模拟了非圆形截面的过渡领域 Poiseuille 流动。由这两种方法得到的质量流率与 Hasegawa 和 Sone 等人的 BGK 模型结果<sup>[4]</sup>进行了比较; DSMC 方法和 IP 方法得到的流场相互之间也较好的符合; 对于不同宽高比的矩形截面, 给出了两种方法得到的质量流率和沿中心线的速度分布。在下一节中简要介绍 DSMC 和 IP 方法; 然后给出了计算结果和结论。

● 国家自然科学基金(19889209, 90205024)资助。

## 2 DSMC 方法和 IP 方法

直接模拟 Monte Carlo (DSMC) 方法<sup>[10]</sup>由 G. A. Bird 提出,经几十年的发展已经广泛应用于模拟低密度气流。它是建立在分子动理论基础上的数值方法适用于非连续性、稀薄效应变得不能忽略的各种气流,已经得到了理论和实验的验证。DSMC 方法的本质是在一个很小的时间间隔内将分子的运动和它们之间的相互作用解耦。在 DSMC 模拟中,速度、温度等宏观参数由一个小区域内模拟分子的相应值平均得到。

由于在以低 Mach 数为特征的 MEMS 的模拟中,DSMC 方法存在不可克服的统计涨落的困难。因为在那里,很低的速度将引起很大的噪声和信号的比值,从而需要非常巨大的取样样本数。为了减少统计涨落提出了信息保存(IP)方法<sup>[11,12]</sup>。在这个方法中,模拟分子在物理空间的运动以及相互之间的碰撞使用和 DSMC 方法一样的规则和模型;同时速度和表面剪切力等宏观参数通过模拟分子所携带的相应的信息量的统计平均得到。这些信息量反映了每个模拟分子所代表的大量真实分子的集体行为,因此不受热运动速度引起的统计噪声的影响。IP 方法已经成功的应用于许多问题<sup>[13~18]</sup>,并且在新出版的论著<sup>[19]</sup>中进行了详细的说明。这个方法得到的结果在连续介质和自由分子流极限时分别和带滑移边界条件的 Navier - Stokes 方程精确解及自由分子流理论解相符,在过渡领域和线化 Boltzmann 方程数值解,实验数据及 DSMC 计算相符。

## 3 问题和结果

用 IP 和 DSMC 方法模拟了由于压力梯度引起的在各种截面管道内的稀薄气流。用硬球模型描述分子间的相互作用。所考虑 Knudsen 数 ( $Kn$ ) 范围从 0.05 ~ 10.0, 这里  $Kn$  被定义为  $\lambda/L$ ,  $\lambda$  是分子的平均自由程<sup>[10]</sup>:

$$\lambda = (16/5)(m/2\pi kT_0)^{1/2}(\mu/\rho_0), \quad (1)$$

这里  $m$  是气体的分子质量;  $k$  是 Boltzmann 常数;  $T_0$  是气体的参考温度;  $\mu$  是黏性系数;  $\rho_0$  是参考密度;  $L$  是截面的特征尺度(其对不同截面的取值,见图 1)。沿着管道轴线的压力分布假设为线性

$$p = p_0(1 + \alpha X_3/L), \quad (2)$$

这里  $X_3$  是沿着管道轴线的直角坐标; 它的原点位于所考虑的截面的中心, 那里的压力取为参考压力  $p_0 = \rho_0 RT_0$ ,  $R$  是气体常数, 而  $\alpha = (L/p_0)(dp/dX_3)$  是一个负的常数。并且仅考虑在两个相邻截面间的网格内的气体。这样由于压力分布导致的加速度为  $a = -\alpha p_0/(\rho_0 L)$ , 在一个时间步长  $\Delta t$  内, 沿着管道轴线的速度的增量为

$$\Delta u = -(\alpha p_0/(\rho_0 L))\Delta t. \quad (3)$$

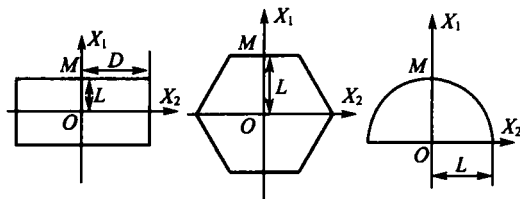


图 1 各种截面的管道

### 3.1 各种截面管道的质量流率

表 1 给出了 IP 和 DSMC 方法得到的对于矩形、六边形和半圆形截面管道在不同  $Kn$  时的质量流率  $M$ , 并与 BGK 模型结果<sup>[4]</sup>进行了比较。质量流率用  $-\alpha p_0 S / (2RT)^{1/2}$  归一化, 这里  $S$  是管道的截面面积, 所用的矩形截面的宽高比为 2。为了得到正确的黏性系数表达式, 必须调整 BGK 模型的碰撞频率, 所以 BGK 模型的  $Kn$  被除以系数<sup>[20,21]</sup>  $1.27 = 3.992/\pi$ 。

从表 1 可以看到这 3 种方法的结果在大  $Kn$  ( $Kn = 0.787$  和  $Kn = 7.87$ ) 时很好的符合。在小  $Kn$  ( $Kn = 0.0787$ ) 时, 对于矩形截面 IP 和 DSMC 方法的结果比 BGK 模型结果略小。它的趋势和对于硬球分子的线性 Boltzmann 方程数值解<sup>[5]</sup>同 BGK 模型<sup>[4]</sup>在平板结果的比较趋势一致。而在这个  $Kn$  下, 对于六边形和半圆形截面, IP 和 DSMC 方法的结果比 BGK 模型略大。

表 1 各种截面的质量流率和  $Kn$  的关系

$Kn$		0.0787	0.787	7.87
矩形 ( $D=2L$ )	IP	6.505	2.230	2.073
	DSMC	6.647	2.259	2.076
	BGK <sup>[4]</sup>	6.718	2.278	2.088
六边形	IP	3.909	1.529	1.455
	DSMC	3.972	1.546	1.455
	BGK <sup>[4]</sup>	3.885	1.550	1.461
半圆形	IP	1.7326	0.9211	0.9510
	DSMC	1.7481	0.9231	0.9499
	BGK <sup>[4]</sup>	1.6874	0.9289	0.9545

### 3.2 各种截面管道的流场

对于不同截面的管道, 在  $Kn$  为 0.0787, 0.787, 7.87 下用 IP 和 DSMC 方法进行了模拟计算。以下有选择地给出一些结果。图 2 给出了 IP 和 DSMC 模拟中得到的矩形截面在  $Kn$

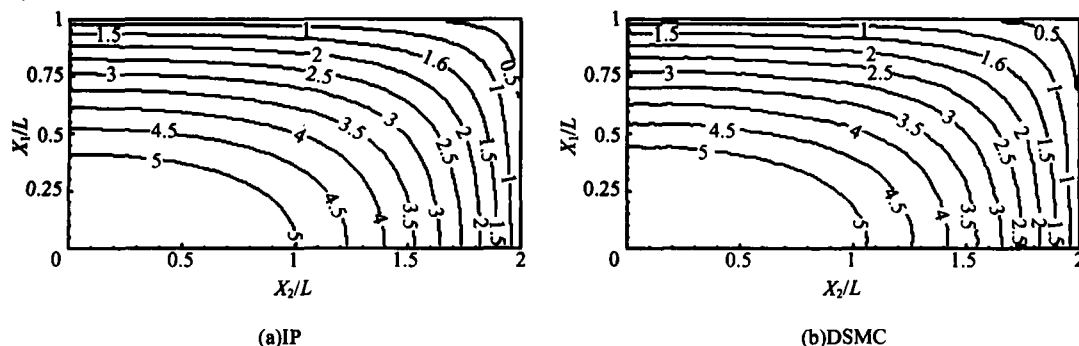


图 2 矩形截面沿轴线方向的速度等值线图 ( $Kn = 0.0787$ )

$= 0.0787$  时的沿轴线方向的速度等值线。其中速度用  $-a(2RT)^{1/2}$  归一化。对于六边形截面在  $Kn = 0.787$  时和半圆形截面在  $Kn = 7.87$  时的速度等值线分别显示在图 3 和图 4 中。图 5 给出了 IP 和 DSMC 方法得到的对于各种截面沿着中垂线 OM 的归一化速度分布。显然, IP 和 DSMC 方法的结果是相符的。

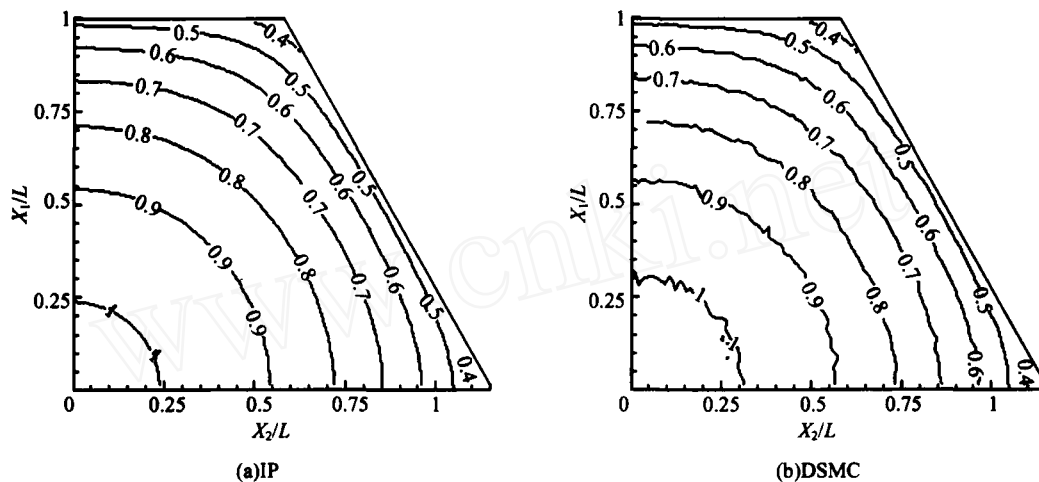


图 3 六边形截面沿轴线方向的速度等值线图( $Kn = 0.787$ )

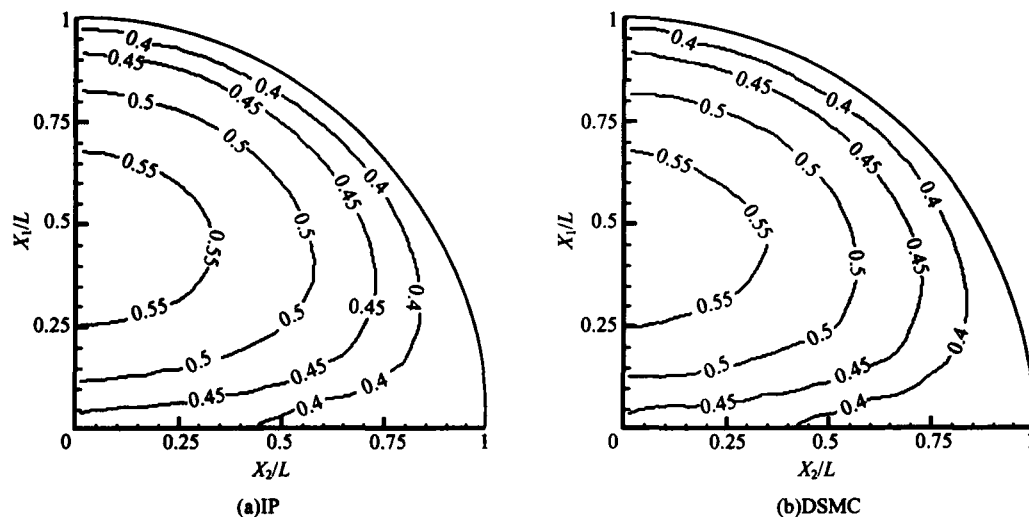


图 4 半圆形截面沿轴线方向的速度等值线图( $Kn = 7.87$ )

当前的计算中采用了较大的  $\alpha = -0.0237$  值, 在这个条件下, DSMC 过程的收敛速度是比较快的。对于一个较低的流动速度, 微槽道系统的典型速度<sup>[22]</sup>(约  $0.2 \text{ m/s}$ ),  $Ma$  和  $\alpha$  将是非常小的, DSMC 的取样次数将比 IP 大  $10^4$  倍<sup>[12]</sup>。

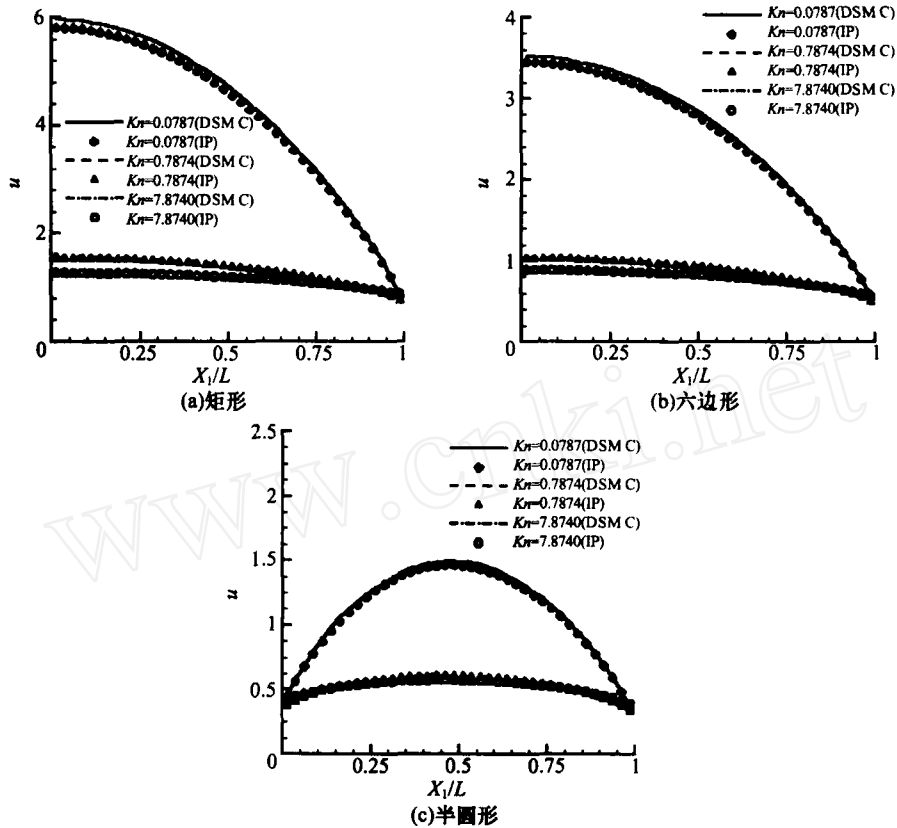


图 5 各种截面沿着中垂线 OM 的速度分布

### 3.3 通过不同截面宽高比的矩形截面的流动

表 2 给出了 IP 和 DSMC 方法得到的对于矩形截面管道在不同截面宽高比时归一化的质量流率  $M$ , 其中  $Kn = 0.226$ 。对于各种宽高比情况下, 沿中垂线  $OM$  的归一化的速度分布显示在图 6。

表 2 矩形截面的质量流率和宽高比的关系 ( $Kn = 0.226$ )

截面宽高比	1	2	5	10	$\infty$
IP	1.141	1.675	2.082	2.221	2.360
DSMC	1.161	1.706	2.123	2.263	2.406

从表 2 可以看出, 有限宽高比情况下的质量流率和无限宽高比(在两个无限大平行平板间的流动)是完全不同的。即使在宽高比为 10 时, 它的质量流率和无限大宽高比情况下的差异仍然大约有 7%, 这和 Sharipov 的结果<sup>[6]</sup>是一致的。但是图 6 (a)和(b)显示只要宽高比大于 5, 矩形截面的中心线速度分布和最大速度能够用两个平板间的流动很好地模拟。因为质量流率是一个与整个流场有关的综合参数, 因此它受到侧壁面附近缓慢的流场的影响, 而最大速度和中心线上的速度分布反映的是局部特征, 5~10 的宽高比足以使侧壁面对于中心线附近的局部参数的影响可以忽略。

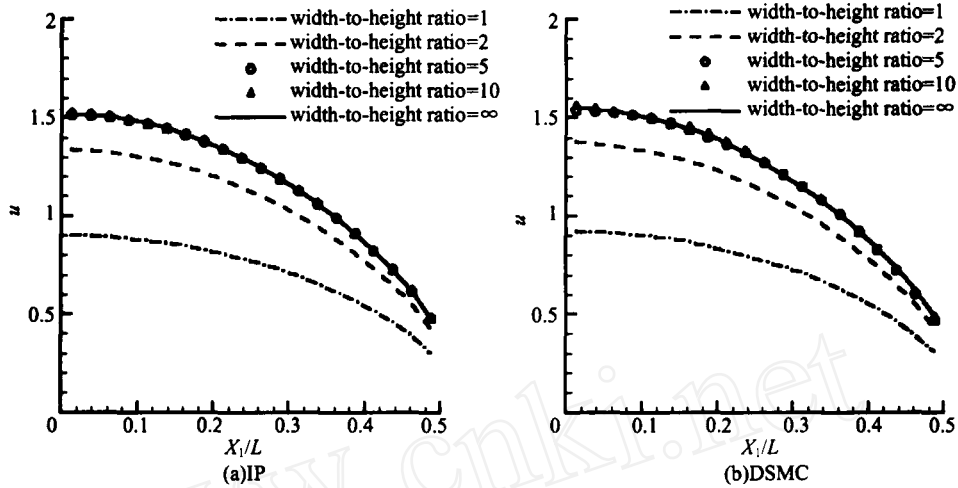


图6 不同宽高比的矩形截面沿着中垂线  $OM$  的速度分布 ( $Kn=0.226$ )

## 4 结论

非圆管截面的统计模拟显示了 IP 方法和 DSMC 方法一样适合应用于各种截面的管道流动。IP 方法的质量流率和速度剖面等结果和 DSMC 方法的结果相符,而在低速流动中,IP 方法所要求的取样样本数比 DSMC 方法小的多。这可以节省计算时间并使 IP 方法在 MEMS 中可有效应用。

在高  $Kn$  ( $Kn=0.787$  和  $Kn=7.87$ ) 时,IP 方法,DSMC 方法和 BGK 模型方法的结果之间很好的符合,在小  $Kn$  ( $Kn=0.0787$ ) 时,对于矩形截面 IP 和 DSMC 方法的结果比 BGK 模型结果略小。它的趋势和对于硬球分子的线化 Boltzmann 方程数值解<sup>[5]</sup>同 BGK 模型<sup>[4]</sup>在平板结果进行比较的趋势是一致的。

对于矩形截面不同宽高比情况下的流动统计模拟显示对于质量流率等积分流场参数,即使在宽高比为 10 时,三维流场也不能用二维流场的模拟替代。同时只要宽高比大于 5,为得到最大速度和中垂线上的速度分布等局地参数,可以用二维流场来代替三维流场的模拟计算。

## 参 考 文 献

- 1 Cercignani C, Sernagiotto F. Cylindrical Poiseuille flow of a rarefied gas. *Phys. Fluids*, 1966, 9: 40~44
- 2 Sone Y, Yamamoto K. Flow of rarefied gas through a circular Pipe. *Phys. Fluids*, 1968, 11: 1672~1178; Errata: *Phys. Fluids*, 1970, 13: 1651
- 3 Loyalka S K, Storvick T S., Park H S. Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channels in the molecular and transition flow regimes. *J. Vac. Sci. Tech.*, 1976, 13: 1188~1192
- 4 Hasegawa M, Sone Y. Poiseuille and thermal transpiration flows of a rarefied gas for various pipes. *J. Vac. Soc. Jpn.*, 1988, 31: 416 (in Japanese)
- 5 Ohwada T, Sone Y, Aoki K. Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows between two parallel plates on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules. *Phys. Fluids*, 1989,

- A 1: 2042~2049
- 6 Sharipov F. Rarefied gas flow through a long rectangular channel. *J. Vac. Sci. Tech.*, 1999, A 17: 3062~3066
  - 7 Aoki K. Dynamics of rarefied gas flows: asymptotic and numerical analyses of the Boltzmann equation. *AIAA 2001~0874*, 2001
  - 8 Pong K C, Ho C M, Liu J Q, Tai Y C. Non-linear pressure distribution in uniform microchannel. *ASME-FED*, 1994, 197: 51~56
  - 9 Shih J C, Ho C M, Liu J Q, Tai Y C. Monoatomic and polyatomic gas flow through uniform microchannels. *ASME-DSC*, 1996, 59: 197~203
  - 10 Bird G A. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*(Clarendon, Oxford, 1994)
  - 11 Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed unidirectional flows in transitional regime. in *Rarefied Gas Dynamics* edited by R Brun et al. , 1999, 2: 245
  - 12 Fan J, Shen C, Statistical Simulation of Low-Speed Rarefied Gas Flows. *J. Comp. Phys.*, 2001, 167: 399~412
  - 13 Cai C, Boyd I D, Fan J, Candler G V. Direct simulation methods for low-speed microchannel flows. *J. Thermophysics and Heat Transfer*, 2000, 14: 368~378
  - 14 Fan J, Boyd I D, Cai C P, Hennighausen K, Candler G V. Computation of rarefied flows around a NACA 0012 airfoil *AIAA J.*, 2001, 39: 618~625
  - 15 Sun Q H, Boyd I D, Candler G V. Numerical simulation of gas flow over micro-scale airfoils. *AIAA 2001~3071*, 2001
  - 16 Sun Q H, Boyd I D. A direct simulation for subsonic microscale gas flows. *J. Comp. Phys.*, 2002, 179: 400~425
  - 17 Xie C, Fan J, Shen C. Rarefied gas flows in micro-channels. presented at 23rd International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 21~25 July 2002, Whistler, to appear
  - 18 Shen C, Fan J, Xie C. Statistical simulation of rarefied gas flows in micro-channels. to appear in *J. Comp. Phys.*, 2003
  - 19 沈青. 稀薄气体动力学. 国防工业出版社, 北京 (2003)
  - 20 Vincenti W G, Kruger C H Jr. *Introduction to Physical Gas Dynamics*. edited by John Wiley & Sons, 1965
  - 21 Shen C, Xu X, Hu Z, Wu W. Transient motion of rarefied gas caused by heat addition simulated by DSMC method. *Progress in Arstro-Aero.*, 1994, 159: 234-242
  - 22 Ho C M, Tai Y C. *Micro-Electro-Mechanical Systems and Fluid Flows*. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1998, 30: 579~612