

文章编号: 1000-6893(2009)07-1227-09

纤维复合材料刚度设计的力学原理及其应用

高思阳^{1,2}, 张晶¹, 付强¹, 刘芳¹

(1. 中国科学院力学研究所 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190)

(2. 北京大学 数学科学学院, 北京 100871)

Mechanical Principles for Stiffness Design of Fibrous Composites and Their Applications

Gao Siyang^{1,2}, Zhang Jing¹, Fu Qiang¹, Liu Fang¹

(1. The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics,

Chinese Academy Sciences, Beijing 100190, China)

(2. School of Mathematical Science, Peking University, Beijing 100871, China)

摘要: 针对航空用纤维复合材料, 基于纤维与基体的协调变形规律和材料应变能密度的计算, 导出了纤维复合材料的刚度表达式, 研究了刚度矩阵的基本力学特性, 给出了复合材料刚度矩阵元素与基体材料的刚度、纤维束的刚度及铺设方向的关系, 提供了平面铺层和三维取向纤维复合材料的基本刚度设计公式和设计方法。最后给出工程应用设计方法的几个具体例子, 并与其他理论和实验结果进行了对比。研究表明, 在考虑材料制备工艺缺陷造成的刚度折减后, 本文提出的设计公式及方法可应用于纤维复合材料的优化设计。

关键词: 纤维复合材料; 刚度矩阵; 刚度设计; 力学特性; 工程应用

中图分类号: V258⁺. 3; TB33 **文献标识码:** A

Abstract: In this article, stiffness tensor of materials is derived for fibrous composites of aerial materials, based on the compatibility relation of deformation of fibers in matrices and the strain energy density of the fibrous composites. Principal mechanical properties of the stiffness matrix are investigated to derive the relations between material stiffness and matrix stiffness, and between stiffness of fibers and their orientations. Moreover, fundamental formulas and methods for stiffness design of laminated and spatially distributed fibrous composites are provided. Finally, examples are given to illustrate how to use the design formulas and compare them with other theories and experimental data. The research results indicate that after considering the stiffness discount due to imperfect of manufacture technology, the proposed formulas and methods can be applied to the optimization of design with fibrous composites.

Key words: fibrous composites; stiffness matrix; stiffness design; mechanical properties; engineering application

纤维复合材料是一类高比强度、高比刚度、结构和性能可设计的新兴材料, 在航空工业中具有广泛的应用。复合材料的力学性能设计主要包括强度设计和刚度设计。材料刚度系数作为表征复合材料宏观力学性能的重要参数, 对复合材料的设计与开发有着重要的影响^[1-2], 本文主要讨论刚度设计问题。复合材料本身具有强烈的结构特征和明显的各向异性特征, 影响其宏观刚度的主要因素可分为两类: 一是复合材料中每一组成材料的弹性常数; 二是复合材料内部的微结构特征, 包括纤维的形状和取向、加工工艺导致纤维的实际分布等, 非常复杂。复合材料这种细观结构的复杂性增加了用理论模型来预测其力学性能和进行材料设计的难度^[3]。国内外许多研究者建立了多

种复合材料理论预测模型并进行了实验研究, 如 Eshelby 等效夹杂理论^[4], Mori-Tanaka 方法^[5], Z. Hashin 和 S. Shtrikman 的上下限方法^[6], 以及细观的剪切滞后模型^[7]等, 对复合材料力学性能的研究都起到了推动作用。目前, 对单向纤维复合材料的研究较多, 但是对于纤维相体积分数较高且形状复杂、分布随机的复合材料, 刚度预测仍然是有待解决的重要问题^[8], 只有少数研究者从实验方面研究了非单向纤维复合材料各向异性弹性性能^[9-10], 刚度设计则更加困难。到目前为止, 还没有一个物理意义明确、算法简单而又实用的理论模型来指导纤维任意分布复合材料的刚度设计问题。

本文主要研究长纤维复合材料, 对于短纤维复合材料, 如果纤维长细比较大, 经过折合计算, 也可以使用笔者所在课题组前期的设计公式^[11-13]。对于纤维复合材料, 基体通常可以作为

收稿日期: 2008-05-15; 修订日期: 2008-06-02
基金项目: 国家自然科学基金(10572140, 10721202)
通讯作者: 付强 E-mail: fuq@nm.imech.ac.cn

各向同性均匀材料,纤维起主要承载作用。本文从纤维与基体的协调变形规律和复合材料内部应变能密度的研究出发,考虑基体和纤维性质、纤维的体积分数以及铺排角度等影响因素,提出纤维复合材料刚度设计的基本准则,研究了复合材料刚度矩阵的结构和基本力学特性,并对典型例子进行分析。

1 纤维复合材料的刚度矩阵

1.1 纤维变形规律及其应变能密度

对于纤维复合材料,取一个代表性体积单元,设宏观应变为 ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), 某一取向纤维束如图 1 所示。为纤维束在 xOy 平面的投影与 x 轴的夹角, θ 为纤维束与 z 轴的夹角。由于基体与纤维协调变形,因此方向为 $n^{(s)}$ 的纤维束轴向应变 $\epsilon_f^{(s)}$ 为

$$\epsilon_f^{(s)} = \epsilon_{ij} n_i^{(s)} n_j^{(s)} \quad (1)$$

式中: $n_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, 3$) 为该纤维束取向的方向余弦。

$$\left. \begin{aligned} n_1^{(s)} &= \sin \theta \cos \varphi \\ n_2^{(s)} &= \sin \theta \sin \varphi \\ n_3^{(s)} &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

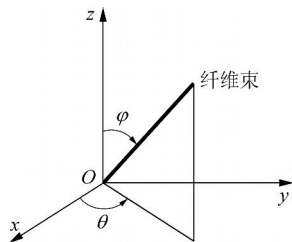


图 1 复合材料纤维取向描述

Fig. 1 Orientation of composite fiber

设 $E_f^{(s)}$ 为该纤维束的弹性模量,则该取向纤维束的应变能密度可以表示为

$$W_f^{(s)} = E_f^{(s)} \epsilon_f^{(s)} d_f^{(s)} V_f^{(s)} = \frac{1}{2} E_f^{(s)} (\epsilon_f^{(s)})^2 V_f^{(s)} \quad (3)$$

式中: $V_f^{(s)}$ 为铺设方向为 $n^{(s)}$ 的纤维束体积分数; $W_f^{(s)}$ 为纤维束的应变能密度。这样,如果基体内共有 r 个方向铺设纤维束,将所有方向纤维束对复合材料应变能的贡献求和,可得纤维相总应变能密度 W_f 为

$$W_f = \sum_{s=1}^r W_f^{(s)} = \sum_{s=1}^r \frac{1}{2} E_f^{(s)} (\epsilon_f^{(s)})^2 V_f^{(s)} \quad (4)$$

把式(1)代入式(4)中,可得

$$W_f = \sum_{s=1}^r \frac{1}{2} E_f^{(s)} V_f^{(s)} n_i^{(s)} n_j^{(s)} n_k^{(s)} n_l^{(s)} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (5)$$

1.2 基体应变能密度

对于基体材料,设 V_m 为基体的体积分数, $C_{m,ijkl}$ 为其各向同性弹性刚度张量分量。由连续介质力学知,基体的应变能密度可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} V_m C_{m,ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (6)$$

1.3 纤维复合材料的宏观刚度张量

纤维复合材料的应变能密度 W_c 等于基体与纤维相应应变能密度之和,即为

$$W_c = \sum_{s=1}^r \frac{1}{2} E_f^{(s)} V_f^{(s)} n_i^{(s)} n_j^{(s)} n_k^{(s)} n_l^{(s)} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} V_m C_{m,ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (7)$$

将式(7)对应变进行二次微分可以得到纤维复合材料宏观刚度张量的表达式为

$$C_{c,ijkl} = \frac{\partial^2 W_c}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} n_i^{(s)} n_j^{(s)} n_k^{(s)} n_l^{(s)} + V_m C_{m,ijkl} = C_{f,ijkl} + V_m C_{m,ijkl} \quad (8)$$

式中: $C_{f,ijkl}$ 为纤维相对复合材料宏观刚度的贡献; $V_m C_{m,ijkl}$ 为基体相对复合材料宏观刚度的贡献。其中,体积分数 V_m 和 $V_f^{(s)}$ 满足

$$V_m + \sum_{s=1}^r V_f^{(s)} = 1 \quad (9)$$

式(8)表明复合材料的宏观刚度是纤维相组集刚度 $C_{f,ijkl}$ 和基体刚度 $V_m C_{m,ijkl}$ 的叠加。

以纤维复合材料平面铺层为例,取一宏观材料的代表性体单元,可将其分解为基体和不同取向纤维束的组合,如图 2 所示。对每一个方向铺设的纤维束,根据其纤维取向 $n^{(s)}$ 、弹性模量 $E_f^{(s)}$

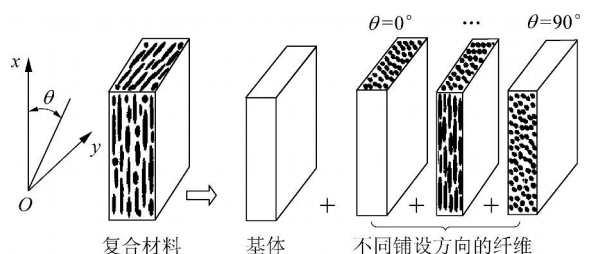


图 2 纤维复合材料铺层代表单元及刚度计算示意图

Fig. 2 Representative unit of composite lamination and computing of its stiffness

和体积分数 $V_f^{(s)}$, 计算其对宏观刚度的贡献。这样, 将所有方向纤维束对宏观刚度的贡献求和, 并考虑基体对宏观刚度的贡献, 就构成了复合材料的宏观刚度张量。这就是纤维复合材料宏观刚度张量的基本力学特征。

1.4 纤维复合材料的刚度矩阵

在工程应用中, 材料的本构关系通常可表示为

$$\sigma = c_c \epsilon \quad (10)$$

式中: $\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T$; $\epsilon = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \epsilon_{12} \quad \epsilon_{13} \quad \epsilon_{23}]^T$; c_c 为纤维复合材料的宏观刚度矩阵, 它与刚度张量分量 $C_{c,ijkl}$ 的对应关系是: $c_{c,11} = C_{c,1111}$, $c_{c,12} = C_{c,1122}$, ..., 即 c_c 的下角标 1, 2, 3, 4, 5, 6 分别对应于 C_c 的双指标 11, 22, 33, 12, 13, 23。下面分别讨论平面铺层和三维取向纤维复合材料的宏观刚度矩阵。

(1) 平面铺层纤维复合材料

复合材料设计通常将平面铺层作为平面应力状态, 即 $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ 。平面铺层的刚度矩阵的具体结构为

$$c_c = \begin{bmatrix} C_{c,1111} & C_{c,1122} & C_{c,1123} \\ C_{c,2211} & C_{c,2222} & C_{c,2212} \\ C_{c,1211} & C_{c,1222} & C_{c,1212} \end{bmatrix}$$

根据材料宏观刚度计算公式 (8), 其弹性常数的具体计算公式为

$$\left. \begin{aligned} C_{c,1111} &= \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} (n_1^{(s)})^4 + V_m \frac{E_m}{1 - \frac{2}{m}} \\ C_{c,2222} &= \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} (n_2^{(s)})^4 + V_m \frac{E_m}{1 - \frac{2}{m}} \\ C_{c,1212} &= \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} (m_1^{(s)} m_2^{(s)})^2 + V_m \frac{E_m}{2(1 + \frac{1}{m})} \\ C_{c,1122} &= \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} (n_1^{(s)} n_2^{(s)})^2 + V_m \frac{E_m}{1 - \frac{2}{m}} \\ C_{c,1112} &= \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} (m_1^{(s)})^3 n_2^{(s)} \\ C_{c,2212} &= \sum_{s=1}^r E_f^{(s)} V_f^{(s)} n_1^{(s)} (m_2^{(s)})^3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: m 和 E_m 分别为基体材料的泊松比和弹性模量。

(2) 三维取向纤维复合材料

同理, 三维取向纤维复合材料的宏观刚度矩阵 c_c 可表示为

$$c_c = \begin{bmatrix} C_{c,1111} & C_{c,1122} & C_{c,1133} & C_{c,1112} & C_{c,1113} & C_{c,1123} \\ C_{c,2211} & C_{c,2222} & C_{c,2233} & C_{c,2212} & C_{c,2213} & C_{c,2223} \\ C_{c,3311} & C_{c,3322} & C_{c,3333} & C_{c,3312} & C_{c,3313} & C_{c,3323} \\ C_{c,1211} & C_{c,1222} & C_{c,1233} & C_{c,1212} & C_{c,1213} & C_{c,1223} \\ C_{c,1311} & C_{c,1322} & C_{c,1333} & C_{c,1312} & C_{c,1313} & C_{c,1323} \\ C_{c,2311} & C_{c,2322} & C_{c,2333} & C_{c,2312} & C_{c,2313} & C_{c,2323} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其弹性常数的具体计算式可根据式 (8) 展开。

2 纤维复合材料刚度矩阵的基本力学特性

本节通过对纤维复合材料宏观刚度矩阵的基本力学特性分析, 讨论其独立弹性常数。

2.1 平面铺层纤维复合材料

当 $V_m = 1$ 时, 即考虑复合材料为纯基体材料, 此时, 有 2 个独立的弹性常数 m 和 E_m 。

当 $V_m = 0$ 时, 材料全部是纤维相, 即 $c_c = \alpha_c$ 。由于存在关系 $G_{f,1122} = G_{f,1212}$, 纤维相组集刚度张量所对应的刚度矩阵 α_c (称为纤维相刚度矩阵) 最多有 5 个独立弹性常数。

当 $0 < V_m < 1$ 时, 纤维相刚度矩阵 α_c 有 5 个独立常数, 增加基体相刚度后, 由式 (11) 可知, 宏观刚度矩阵的参数 $C_{c,1122}$ $C_{c,1212}$ 。因此复合材料宏观刚度矩阵 c_c 最多有 6 个独立的弹性常数。

实际上, 对于一般的正交各向异性铺层, 有 $C_{c,1112} = C_{c,2212} = 0$, 宏观刚度矩阵的独立弹性常数是 4 个, 即 $C_{c,1111}$, $C_{c,2222}$, $C_{c,1122}$, $C_{c,1212}$ 。因此本文构造的宏观刚度矩阵可完整描述一般正交各向异性平面铺层纤维复合材料。

2.2 三维取向纤维复合材料

对于纤维任意三维分布的复合材料, 取一个代表性体积单元, 同样可将其分解为基体和不同方向纤维束的组合, 只是纤维沿空间分布。总刚度矩阵如式 (12) 所示。

当 $V_m = 1$ 时, 即考虑复合材料为纯基体材料, 此时, 有 2 个独立的弹性常数 m 和 E_m 。

当 $V_m = 0$ 时, 材料全部是纤维相, 即 $c_c = \alpha_c$ 。

对于纤维相刚度矩阵 α , 它同时满足 Voigt 对称性和 Cauchy 对称性, 即

$$C_{i,jkl} = C_{i,klj} = C_{i,jlk} = C_{i,ljk} = C_{i,ikjl}$$

从而, 有

$$\left. \begin{aligned} C_{f,1122} &= C_{f,1212} \\ C_{f,1133} &= C_{f,1313} \\ C_{f,2233} &= C_{f,2323} \\ C_{f,1123} &= C_{f,1213} \\ C_{f,2213} &= C_{f,1223} \\ C_{f,3312} &= C_{f,1323} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

因此纤维相刚度矩阵 α 最多有 15 个独立的弹性常数。

当 $0 < V_m < 1$ 时, 纤维相组集刚度再加上基体相刚度后, 复合材料宏观刚度有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} C_{c,1313} &= C_{c,1133} + C_{c,1212} - C_{c,1122} \\ C_{c,2323} &= C_{c,2233} + C_{c,1212} - C_{c,1122} \\ C_{c,1123} &= C_{c,1213} \\ C_{c,2213} &= C_{c,1223} \\ C_{c,3312} &= C_{c,1323} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

因此, 复合材料宏观刚度矩阵 c 最多具有 16 个独立弹性常数。

由于实际工程材料的独立弹性常数一般不超过 16 个, 因此大部分工程材料的设计要求都在本文提出的设计方法范围之内。

3 基本设计公式与设计方法

由于工程用纤维复合材料宏观刚度矩阵的独立弹性常数, 平面铺设情况下不超过 5 个, 三维取向情况下不超过 16 个, 因此式 (8) 可以满足大多纤维复合材料的设计要求。

为了讨论方便, 将 $E_f^{(s)} V_f^{(s)}$ 作为一个参数 $K_f^{(s)}$ (称为纤维束刚度) 进行考虑, 则纤维复合材料的宏观刚度张量计算式 (8) 可以改写为

$$C_{c,ijkl} = \sum_{s=1}^r K_f^{(s)} n_i^{(s)} n_j^{(s)} n_k^{(s)} n_l^{(s)} + V_m C_{m,ijkl} \quad (15)$$

当基体材料性质确定, 复合材料的宏观刚度的改变依赖于纤维相参数, 包括纤维分布的取向参数 $n(\cdot, \cdot)$ 和纤维束刚度 $K_f^{(s)}$ 。

下面, 对于纤维铺设方向已经选定和需要选择两种情况, 进行讨论。

3.1 纤维铺设方向已经选定

复合材料中纤维的铺设方向 $n(\cdot, \cdot)$ 确定, 则

复合材料宏观刚度 c 和纤维束刚度 $K_f^{(s)}$ 显式对应。

(1) 如果给定纤维束刚度 $K_f^{(s)}$, 由式 (15) 可以显式、唯一地确定材料的宏观刚度 c , 即预测复合材料的宏观刚度。

(2) 如果给定 c , 则问题转换成由给定的 c 确定 $K_f^{(s)}$, 即进行复合材料设计。在这种情况下, 由于复合材料宏观刚度叠加特征的存在, 当复合材料宏观刚度和基体性质以及基体体积分分数已知时, 可得纤维相刚度矩阵 α 。这样问题进一步转换成由 α 确定纤维刚度。

纤维相刚度矩阵 α 的系数等于所有方向纤维束刚度贡献的和, 即

$$C_{i,jkl} = \sum_{s=1}^r C_{i,jkl}^{(s)} = \sum_{s=1}^r K_f^{(s)} n_i^{(s)} n_j^{(s)} n_k^{(s)} n_l^{(s)} \quad (16)$$

这样, 把纤维具体铺设角度的方向余弦代入式 (16), 可以建立以纤维束刚度 $K_f^{(s)}$ 为未知数的方程组

$$AK_f = \alpha \quad (17)$$

式中: A 为方向余弦系数矩阵, 不同纤维铺设方式所对应的 A 不同; K_f 为纤维束刚度向量。求解式 (17) 可得到不同方向纤维束的设计刚度 $K_f^{(s)}$, 以满足设计要求。

3.2 纤维铺设方向需要选择

在很多工程设计中, 已知纤维弹性模量 E_f , 而纤维铺设方向未知。这样, 复合材料宏观刚度矩阵 c 与纤维相体积分数 $V_f^{(s)}$ 和纤维铺设方向 $n(\cdot, \cdot)$ 对应。当复合材料宏观刚度和基体性质已知时, 此问题转换成由纤维相刚度 α 确定纤维铺设方向和纤维束刚度 (为描述方便, 仍然把纤维束刚度 $K_f^{(s)} = E_f^{(s)} V_f^{(s)}$ 作为一个未知数)。

由于纤维铺设方向基本无法显式求解, 本文考虑采用半逆解法, 即先设定纤维的铺设方向, 再使其满足刚度设计条件等, 进行纤维束刚度的求解, 从而进行复合材料设计。

下面具体讨论在这种情况下平面和三维纤维铺设复合材料的设计。

(1) 平面铺层纤维复合材料

对于平面铺层, 由前面的讨论可知: α 最多有 5 个独立弹性常数。由于纤维铺设角度未知, 可以假设它采用最简单的铺设形式: 纤维束在 xOy

平面沿 180 平均铺设 5 束,即纤维束的铺设角度(与 x 方向的夹角)分别为 $0^\circ, 36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$ 。纤维束的刚度 $K_f^{(s)}$ 分别为 $K_f^{(1)}, K_f^{(2)}, K_f^{(3)}, K_f^{(4)}, K_f^{(5)}$, 这样就有 5 个未知的纤维相刚度。每个方向的纤维束都为 α 提供 5 个分量 $C_{f,1111}^{(s)}, C_{f,1122}^{(s)}, C_{f,1112}^{(s)}, C_{f,2212}^{(s)}, C_{f,2222}^{(s)}$ 。

根据式(16),对于这种纤维束分布方式,每一弹性系数可以表示为 5 个方向纤维贡献的和,即

$$C_{f,1111} = C_{f,1111}^{0^\circ} + C_{f,1111}^{36^\circ} + C_{f,1111}^{72^\circ} + C_{f,1111}^{108^\circ} + C_{f,1111}^{144^\circ} \quad (18)$$

表 1 列出了纤维束平面铺设角度的方向余弦。

表 1 纤维束平面铺设角度的方向余弦

Table 1 Cosine of orientation of fibers in a plane					
纤维束编号	m_1	m_2	纤维束编号	m_1	m_2
1	1	0	4	-0.309	0.951
2	0.809	0.588	5	-0.809	0.588
3	0.309	0.951			

注:纤维束平面铺设时, n_3 都为 0。

此时纤维束的铺设方向已知,根据式(16)和式(17),可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.428 & 0.009 & 0.009 & 0.428 \\ 0 & 0.226 & 0.086 & 0.086 & 0.226 \\ 0 & 0.311 & 0.028 & -0.028 & -0.311 \\ 0 & 0.164 & 0.266 & -0.266 & -0.164 \\ 0 & 0.120 & 0.818 & 0.818 & 0.120 \end{bmatrix}$$

$$K = [K_f^{(1)} \quad K_f^{(2)} \quad K_f^{(3)} \quad K_f^{(4)} \quad K_f^{(5)}]^T$$

$$\alpha = [C_{f,1111} \quad C_{f,1122} \quad C_{f,1112} \quad C_{f,2212} \quad C_{f,2222}]^T$$

矩阵 A 的秩为 5,根据 α 的值,可以唯一确定各铺设方向的纤维束刚度 $K_f^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, 5$)。

由于这 5 个纤维束取向对材料宏观刚度的贡献独立且完备,纤维束的其他取向对材料宏观刚度的贡献都可以用这 5 个取向纤维相的弹性常数线性表示得到。

(2) 三维取向纤维复合材料

根据 2.2 节的分析结果,每一空间铺设的纤维束为复合材料宏观刚度最多提供 15 个分量。当需要纤维相刚度矩阵 α 最多提供 15 个独立参数时,由于纤维铺设方向未知,不失一般性,可以假设将沿整个空间分布的纤维用 15 个代表性方向来表示,如图 3 所示,表 2 是各纤维的取向。

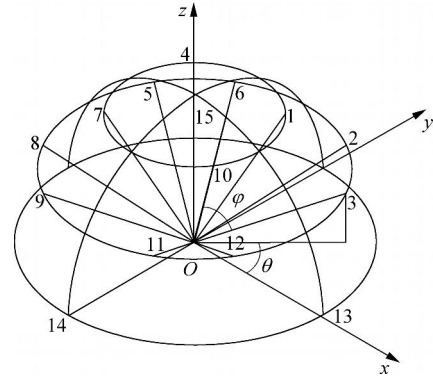


图 3 纤维空间铺设示意图

Fig. 3 Orientation of spatial fibers

表 2 纤维空间铺设角度

Table 2 Orientation of spatial fibers

纤维束编号	θ / (°)	φ / (°)	纤维束编号	θ / (°)	φ / (°)
1	30	45	9	60	120
2	60	30	10	30	45
3	60	60	11	60	60
4	30	135	12	60	30
5	60	120	13	90	0
6	60	150	14	90	90
7	30	135	15	0	90
8	60	150			

设不同取向纤维束的刚度 $K_f^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, 15$) 不同,这样就有 15 个未知数,而 α 独立的弹性常数为 15 个,一般情况下,可求解。

根据式(16)和式(17)可得

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.0156 & 0.3164 & 0.0352 \\ 0.0156 & 0.1055 & 0.1055 \\ 0.0938 & 0.1406 & 0.0469 \\ 0.0156 & 0.1827 & 0.0609 \\ 0.0383 & 0.2109 & 0.0406 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.0156 & 0.0352 & 0.3164 \\ 0.0156 & 0.1055 & 0.1055 \\ 0.0937 & 0.0469 & 0.1406 \\ -0.0156 & -0.0609 & -0.1827 \\ -0.0383 & -0.0406 & -0.2109 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0.0156 & 0.3164 & 0.0352 \\ 0.0156 & 0.1056 & 0.1055 \\ 0.0937 & 0.1406 & 0.0469 \\ 0.0156 & 0.1827 & 0.0609 \\ -0.0383 & -0.2109 & -0.0406 \end{bmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 0.0156 & 0.0352 & 0.3164 \\ 0.0156 & 0.1055 & 0.1055 \\ 0.0938 & 0.0469 & 0.1406 \\ -0.0156 & -0.0609 & -0.1827 \\ 0.0383 & 0.0406 & 0.2109 \end{bmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.0383 & 0.1218 & 0.0703 \\ 0.0156 & 0.0352 & 0.3164 \\ 0.0812 & 0.0234 & 0.0703 \\ 0.0156 & 0.0609 & 0.1827 \\ 0.0383 & 0.0703 & 0.1218 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0.0383 & 0.0703 & 0.1218 \\ 0.0156 & 0.3164 & 0.0352 \\ 0.0812 & 0.0703 & 0.0234 \\ -0.0156 & -0.1827 & -0.0609 \\ 0.0812 & -0.1218 & -0.0703 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} -0.0383 & -0.1218 & -0.0703 \\ 0.0156 & 0.0352 & 0.3164 \\ 0.0812 & 0.0234 & 0.0703 \\ 0.0156 & 0.0609 & 0.1827 \\ -0.0383 & -0.0703 & -0.1218 \end{bmatrix}$$

$$A_{24} = \begin{bmatrix} -0.0383 & -0.0703 & -0.1218 \\ 0.0156 & 0.3164 & 0.0352 \\ 0.0812 & 0.0703 & 0.0234 \\ -0.0156 & -0.1827 & -0.0609 \\ 0.0383 & 0.1218 & 0.0703 \end{bmatrix}$$

$$A_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0.0383 & 0.0406 & 0.2109 \\ 0.5625 & 0.0625 & 0.0625 \\ 0.0938 & 0.0812 & 0.0812 \\ 0.2296 & 0.0938 & 0.0541 \\ 0.2296 & 0.0541 & 0.0938 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} -0.0156 & 0.2109 & 0.0406 \\ -0.0383 & 0.0625 & 0.0625 \\ 0.0383 & -0.0812 & -0.0812 \\ 0.5625 & -0.0541 & -0.0938 \\ -0.0937 & 0.0938 & 0.0541 \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} -0.0383 & -0.0406 & -0.2109 \\ 0.5625 & 0.0625 & 0.0625 \\ 0.0937 & 0.0812 & 0.0812 \\ 0.2296 & -0.0938 & -0.0541 \\ -0.2296 & -0.0541 & -0.0938 \end{bmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{bmatrix} -0.0383 & -0.2109 & -0.0406 \\ 0.5625 & 0.0625 & 0.0625 \\ -0.0937 & -0.0812 & -0.0812 \\ 0.2296 & 0.0541 & 0.0938 \\ -0.2296 & -0.0938 & -0.0541 \end{bmatrix}$$

$$A_{35} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [K_f^{(1)} \quad K_f^{(2)} \quad \dots \quad K_f^{(15)}] J^T$$

$$\alpha = [C_{f,1111} \quad C_{f,1122} \quad C_{f,1133} \quad C_{f,1112} \quad C_{f,1113} \\ C_{f,2222} \quad C_{f,2233} \quad C_{f,2212} \quad C_{f,2213} \quad C_{f,2223} \quad C_{f,3333} \\ C_{f,3312} \quad C_{f,3313} \quad C_{f,3323}] J^T$$

矩阵 A 的秩是 15, 因此根据 α 的值由式 (17) 可以唯一确定 $K_f^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, 15$)。同样, 由于这 15 个纤维取向对材料宏观刚度的贡献独立且完备, 纤维的其他取向对材料宏观刚度的贡献都可以用这 15 个取向纤维相的弹性常数线性表示得到。

4 典型例子与应用注意事项

下面对典型纤维铺设形式(平面铺层和三维取向)的纤维复合材料刚度进行预测和设计。

4.1 各向同性铺层设计

在实际工程中, 经常会用到面内任意方向弹性性能均相同的铺层。

对于各向同性铺层, 宏观刚度张量独立的弹性常数只有 2 个, 且存在

$$\left. \begin{aligned} C_{c,1111} &= C_{c,2222} \\ C_{c,1122} &= C_{c,2211} \\ C_{c,1212} &= (C_{c,1111} - C_{c,1122})/2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

基体也是各向同性材料, 因此根据式 (15) 和关系式 $G_{f,1212} = G_{f,1122}$, 可得

$$\left. \begin{aligned} G_{f,1111}/G_{f,1122} &= 3/1 \\ G_{f,1111} &= G_{f,2222} \\ G_{f,1112} &= 0 \\ G_{f,2212} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

即对各向同性铺层, 纤维相刚度矩阵 C_f 必须满足设计条件式(20)。

(1) 纤维铺设方向需要选择

当纤维的铺设方向未知, 采用半逆解法, 可以假设纤维束在 xOy 平面沿 180° 平均铺设 5 束, 如 3.2 节(1)中所讨论。然后, 确定各铺设方向纤维束刚度。

根据刚度设计式(17), 设 $G_{f,1122} = 1$ 可以建立方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.428 & 0.009 & 0.009 & 0.428 \\ 0 & 0.226 & 0.086 & 0.086 & 0.226 \\ 0 & 0.311 & 0.028 & -0.028 & -0.311 \\ 0 & 0.164 & 0.266 & -0.266 & -0.164 \\ 0 & 0.120 & 0.818 & 0.818 & 0.120 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_f^{(1)} \\ K_f^{(2)} \\ K_f^{(3)} \\ K_f^{(4)} \\ K_f^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

求解式(21), 可以得到 5 个铺设方向纤维束的刚度为

$$K_f = [1.6 \quad 1.6 \quad 1.6 \quad 1.6 \quad 1.6] \quad (22)$$

可验证此铺设形式得到的铺层为各向同性铺层。

因此, 建立各向同性铺层的一种设计方案就是: 纤维沿 xOy 平面 180° 平均铺设 5 束, 5 个铺设方向的纤维束刚度相同。

(2) 纤维铺设方向已经选定

已知纤维彼此相隔 60° 编制成平面铺层, 求构成各向同性铺层时的纤维束刚度。根据纤维设计式(16)和式(17), 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.0625 & 0.0625 \\ 0 & 0.1875 & 0.1875 \\ 0 & 0.1083 & -0.1083 \\ 0 & 0.3248 & -0.3248 \\ 0 & 0.5625 & 0.5625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_f^{(1)} \\ K_f^{(2)} \\ K_f^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

则纤维束刚度 K_f 为

$$K_f = [2.667 \quad 2.667 \quad 2.667] \quad (24)$$

3 个纤维铺设方向刚度相同。当采用相同弹性模量的纤维时, 各方向纤维的体积分数相同。这个设计结果与文献[14]结果一致。

4.2 正交对称铺层

在工程实际中, 经常会遇到 1×1 经纬交织形成的铺层, 且纵向与横向的纤维性质相同。这相当于在与 x 轴成 0° 和 90° 方向上铺设相同性质的纤维, 且纵向与横向纤维的体积分数相同, 都是 $\frac{1}{2}V_f$ 。

设纤维的弹性模量为 E_f , 根据式(11), 可以计算此复合材料的宏观刚度系数为

$$\left. \begin{aligned} C_{c,1111} &= C_{c,2222} = \frac{1}{2} E_f V_f + V_m \frac{E_m}{1 - \frac{2}{m}} \\ C_{c,1122} &= C_{c,2211} = V_m \frac{E_m}{1 - \frac{2}{m}} \\ C_{c,1212} &= G_m V_m \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

在这种纤维铺设情况下, 铺层的纵向和横向弹性性能相同, 材料的独立弹性常数只有 3 个, 分别是 $C_{c,1111}$, $C_{c,1122}$ 和 $C_{c,1212}$, 这种铺层称为正交对称铺层。刚度预测结果与文献[14]结果一致。

4.3 单向纤维复合材料

单向纤维复合材料具有明显的横观各向同性特征, 设坐标轴 x 方向沿纤维纵向, 如图 4 所示。

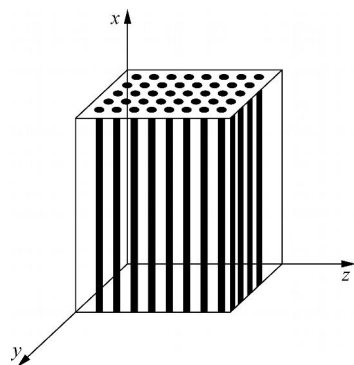


图 4 单向纤维复合材料

Fig. 4 Unidirectional fibrous composites

由式(8)可得

$$C_{c,ijkl} = E_f V_f n_i^{(1)} n_j^{(1)} n_k^{(1)} n_l^{(1)} + V_m C_{m,ijkl} \quad (26)$$

根据材料刚度系数可以计算复合材料在 x 方向的弹性模量为

$$E_{11} = C_{c,1111} - 2C_{c,1122} / (C_{c,2222} + C_{c,2233}) \quad (27)$$

表 3 是随着纤维体积分数改变, x 方向弹性模量的改变, 并分别与其他理论的预测值进行了比较。

表3 复合材料弹性模量随纤维体积分数的变化
Table 3 Variation of elastic modulus with ratio of fibers volume fraction

纤维体积分数 V_f	弹性模量 E_{11}			
	本文方法	文献[15]方法	文献[16]方法	文献[17]方法
0.20	86.05	86.05	86.19	86.06
0.55	229.39	229.40	229.60	229.47
0.60	249.87	249.87	249.59	249.93
0.65	270.35	270.35	270.28	270.41
0.70	290.83	290.83	290.96	290.91

4.4 与经验公式的比较

纤维单一取向沿 x 方向排列时,由式(8)可知复合材料在 x 方向上的刚度模量为

$$C_{c,1111}^{1D} = V_m C_{m,1111} + E_f V_f \quad (28)$$

垂直于纤维排列方向上复合材料的刚度模量为

$$C_{c,2222}^{1D} = V_m C_{m,2222} \quad (29)$$

当纤维在 xOy 平面内随机分布时, $V_f^{(s)} = V_f \frac{d}{l}$, 将式(8)改写为积分形式,可以导出

$$C_{c,1111}^{2D} = \frac{3}{8} E_f V_f + V_m C_{m,1111} \quad (30)$$

当纤维在空间随机分布时, $V_f^{(s)} = V_f \frac{\sin \phi d \phi}{2}$, 由式(8)可以积分导出

$$C_{c,1111}^{3D} = \frac{1}{5} E_f V_f + V_m C_{m,1111} \quad (31)$$

比较式(28)、式(29)和式(30)可得

$$C_{c,1111}^{2D} = \frac{3}{8} C_{c,1111}^{1D} + \frac{5}{8} C_{c,2222}^{1D} \quad (32)$$

与 I. C. Halpin 等^[18]给出的经验公式一致。比较式(28)、式(29)和式(31)可得

$$C_{c,1111}^{3D} = \frac{1}{5} C_{c,1111}^{1D} + \frac{4}{5} C_{c,2222}^{1D} \quad (33)$$

与 L. E. Nielsen 等^[19]给出的经验公式一致。

4.5 应用注意事项

(1) 本文考虑复合材料在理想状态下的基本力学原理,并未讨论界面、损伤和制造工艺缺陷对材料刚度的影响。应用本文公式时应适当考虑性能的折减。

(2) 工程上往往只需要对几个主要的刚度系数提出设计要求,如刚度矩阵的某几个对角线元

素与泊松比等,可能有多个取值方案。这时,还可以参考工艺及其他要求决定最终方案。

(3) 对于短纤维复合材料,需要考虑短纤维特性对复合材料宏观刚度的折减,对复合材料刚度计算式(8)中的纤维相刚度计算公式进行修正,具体可参考文献[11-13]。

5 结论

(1) 给出了具有任意铺设形式的纤维复合材料的宏观弹性刚度张量。

(2) 讨论了平面铺层和三维取向纤维分布,以及纤维铺设方向已经选定和需要选择等情况下的纤维复合材料设计,可用于航空工程复合材料的刚度设计。

参 考 文 献

- [1] 杜善义,王彪. 复合材料细观力学[M]. 北京:科学出版社, 1998.
Du Shanyi, Wang Biao. Micromechanics of composites [M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)
- [2] 蒋咏秋. 复合材料力学[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1990.
Jiang Yongqiu. Mechanics of composites[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1990. (in Chinese)
- [3] 罗祖道,王震鸣. 复合材料力学进展[M]. 北京:北京大学出版社, 1992.
Luo Zudao, Wang Zhenming. Advances in mechanics of composites[M]. Beijing: Peking University Press, 1992. (in Chinese)
- [4] Eshelby J D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion[J]. Proceedings of the Royal Society: A, 1959, 252 (1271): 561-569.
- [5] Mori T, Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions[J]. Acta Metallurgica, 1973, 21(5): 571-574.
- [6] Hashin Z, Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963, 11 (2): 127-140.
- [7] Cox H L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials[J]. British Journal of Applied Physics, 1952, 3(3): 72-79.
- [8] 吴林志,杜善义,石志飞. 含夹杂复合材料宏观性能研究[J]. 力学进展, 1995, 25(3): 410-423.
Wu Linzhi, Du Shanyi, Shi Zhifei. Study of overall properties of composites with inclusions[J]. Advances in Mechanics, 1995, 25(3): 410-423. (in Chinese)
- [9] Chen C, Cheng C H. Effective elastic moduli of misoriented short-fiber composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, 33(17): 2529-2539.

- [10] Hine P J, Davidson N, Duckett R A, et al. Measuring the fiber orientation and modeling the elastic properties of injection-molded long-fiber reinforced nylon[J]. *Composites Science and Technology*, 1995, 53(2): 125-131.
- [11] Wang N, Liu Q, Liu X. Strain regularity in reinforcers of short-fiber/whisker reinforced composite and its application[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2000, 13(4): 204-210.
- [12] Wang Z, Li M, Liang N G. Strain regularity and stiffness tensor of reinforcers in dense particle reinforced composites[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2001, 14(4): 217-221.
- [13] 刘洪秋, 梁乃刚, 夏蒙芬. 脆性短纤维增强复合材料亚宏观模型及损伤本构关系[J]. *中国科学 E 辑: 技术科学*, 2000, 30(1): 29-38.
Liu Hongqiu, Liang Naigang, Xia Mengfen. Modeling and mesoscopic damage constitutive relation of brittle short-fiber-reinforced composites[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2000, 30(1): 29-38. (in Chinese)
- [14] 沃丁柱. 复合材料大全[M]. 北京: 化学工业出版社, 2000.
Wo Dingzhu. *Completedictionary of composites*[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2000. (in Chinese)
- [15] Hashin Z. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, 46(3): 543-550.
- [16] Whitney J M, Riley M B. Elastic properties of fiber-reinforced composite materials[J]. *AIAA Journal*, 1966, 4(9): 1537-1542.
- [17] Zhang W C, Evans K E. Numerical prediction of the mechanical properties of anisotropic composite materials[J]. *Computers and Structures*, 1988, 29(3): 413-422.
- [18] Halpin I C, Pagano N J. The laminate approximation for randomly oriented fibrous composites[J]. *Journal of Composite Materials*, 1969, 3(4): 573-587.
- [19] Nielsen L E, Landel R F. *Mechanical properties of polymers and composites*[M]. 2nd ed. New York: Marcel Dekker, 1994.

作者简介:

高思阳(1988 -) 男, 本科生, 现为中科院力学所非线性力学国家重点实验室客座研究人员。主要研究方向: 复合材料力学。
Tel: 010-52765873
E-mail: sunnygarygs@hotmail.com

张晶(1976 -) 女, 博士研究生。主要研究方向: 材料本构方程和损伤。
E-mail: zhangj@lnm.imech.ac.cn

付强(1983 -) 男, 博士研究生。主要研究方向: 复合材料力学和晶体塑性理论。
Tel: 010-82543926
E-mail: fuq@lnm.imech.ac.cn

刘芳(1984 -) 女, 博士研究生。主要研究方向: 固体本构理论和复合材料力学。
E-mail: liufang@lnm.imech.ac.cn

(编辑: 徐晓, 杨冬)
(梁乃刚编委推荐稿件)