

文章编号: 1000-4874(2009)-05-0596-08

## 采用新的结构—尾流反作用力耦合模型 分析圆柱结构涡激共振\*

宋芳, 林黎明, 凌国灿

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190,

Email: songfang95@163.com)

**摘要:** 该文建立了一个新的结构—与尾流振子流固耦合模型。采用具有非线性阻尼的振子来模拟、van der pol 方程来描述流场近尾迹动力学。以结构与流体的受力互为反作用力的关系, 建立了新的流固耦合模型。使用该文的模型对二维结构涡激振动问题进行研究, 能很好地预计结构涡激共振的特性。计算结果表明, 结构共振的最大振幅  $A_{\max}^*$  随着结构的  $S_G$  数和质量阻尼参数  $(m^* + C_A)\zeta$  的增大而减小, 与实验结果规律一致、数值吻合。根据该文的模型计算结果给出了预测共振振幅  $A_{\max}^*$  值的拟合公式, 并给出了共振情况下升力、相位等的变化规律。

**关键词:** 涡激振动; 流固耦合; 结构与尾流振子模型; 动力响应

**中图分类号:** P731.22; O353.2

**文献标识码:** A

## Research on vortex-induced vibration of cylinder by using new coupling structure and wake oscillator

SONG Fang, LIN Li-ming, LING Guo-can

(The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** A new model of coupling structure and wake oscillator in vortex-induced vibration (VIV) is established. The fluctuating behavior of the near wake and vortex street is modeled by a nonlinear oscillator satisfied the van der pol equation. The interaction of the coupling system is of force balance between the structure and near wake flow. 2-D VIV is studied by the coupling model. It is thus found that the features of synchronization regime are well describe. These results prove that peak amplitude of structure  $A_{\max}^*$  decreases as  $S_G$  or mass-damping  $(m^* + C_A)\zeta$  increases. The obtained relationships are consistent with the Griffin

\* 收稿日期: 2009-03-18(2009-06-22 修改稿)

基金项目: 国家 863 计划(2006AA09Z350)资助;中国科学院知识创新工程重要方向项目(KJ CX2-YW-L02)

作者简介: 宋芳,(1976—),女,辽宁人,博士研究生。

Plot and some other experiment results. An empirical formula on  $A_{\max}^*$  versus  $(m^* + C_A)\zeta$  is drawn based on these results. The variations of the lift force and phase are also presented.

**Keywords:** vortex-induced vibration (VIV); interaction between structure and fluid; coupling structure and wake oscillator model; dynamics response.

## 1 引言

涡激振动 (vortex-induced vibration, 简称 VIV) 是工程中常见的重要现象。在来流作用下, 结构的尾迹中旋涡以一定频率交替脱落, 产生周期振荡的升力, 导致结构以一定的频率和振幅振动。在一定流速下, 旋涡脱落频率接近结构固有频率时, 结构会发生共振<sup>[1,2]</sup>, 造成破坏。涡激共振的预报和抑制对工程结构稳定和安全有重要意义。

VIV 中结构与尾迹相互作用, 是个非常复杂的问题。流动具有很强的非线性特征<sup>[3,4]</sup>, 结构的运动使尾迹流动性态与非振动结构的尾迹大不相同。这种流场变化和流固耦合作用的复杂性及规律, 目前主要依靠实验研究获得, 而通过 DNS 方法精细刻画这些过程则因为受计算量等的限制遇到很多困难<sup>[5, 6, 7]</sup>, 现有的大部分研究成果局限于中低 Re 数情况, 很难满足实际工程需求。

尾流振子模型自上世纪 70 年代提出以来, 至今已经取得了一定成果。其中心思想是把结构近尾迹动力学用振子来模化, 采用 van der pol 方程或者 Rayleigh 方程来描述其自激励自限制的谐振动过程, 称为尾流振子方程。通过耦合关系将结构振动方程与尾流振子方程联立, 描述流固耦合作用。Hartlen, Ronald T. & Currie<sup>[8]</sup> 提出了尾流振子模型, 计算得到了结构共振阶段变量的突变特征。W.D.Iwan<sup>[9]</sup> 采用控制体动量守恒的原理推出了流体振子方程, 但是由于模型中参数过多, 计算结果对参数选取有很大依赖。S.Krenk & S.R.K.Nielsen<sup>[10]</sup> 将“能流率平衡”作为流固耦合原则, 计算得到的相位、振幅和频率比曲线与实验结果定性吻合; 但升力系数曲线则在共振阶段突然减小, 这与实验结果相反。M.L.Facchinetti et al.<sup>[11]</sup> 对比了分别采用结构的位移、速度、加速度来表示流体振子受力的模型计算结果, 认为采用结构加速度描述结构对尾流振子的作用最理想。这个模型的计算结果在定性上较好地反映了涡激振动的共振特征, 在定量上与实验结果相差很大。现有的尾流振子模型在其建立方法上各有特色, 得到的计算结果均有不同程度的缺陷。对于工程上最关心的结构共振最大振幅, 目前尚未有尾流振子模型能够很好地预测, 这使尾流振子模型的应用受到了限制<sup>[12]</sup>。

本文研究二维圆柱结构横向振动, 建立了一个新的结构与尾流振子模型: 流固作用力与反作用力耦合模型。采用 van der pol 方程来描述被模化为非线性振子的近尾迹动力学, 称为尾流振子方程。基于控制体中结构与尾流振子之间的受力互为反作用力关系建立流固耦合作用模型, 组成了耦合作用的结构振动方程和流体振子方程组。采用本文模型进行了二维结构 VIV 计算, 验证了模型的正确可用性。定性上得到了结构共振的基本性态变化规律; 变量的共振峰值在定量上与实验结果非常接近。针对影响最大振幅  $A_{\max}^*$  的主要参数  $S_G$  数和质量阻尼参数  $(m^* + C_A)\zeta$ , 给出了本文模型计算得到的  $A_{\max}^*$  变化规律和拟合公式。

## 2 流固作用力与反作用力耦合模型

### 2.1 结构振动方程

二维 VIV 耦合系统如图 1(a) 所示, 以  $x$  轴表示流向,  $y$  轴表示横向, 经典的结构横向振动方程为:

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = F_y \quad (1)$$

其中:  $m$  为结构质量;  $c$  为结构阻尼;  $k$  为结构刚度;  $F_y$  为结构横向受力;  $Y$ 、 $\dot{Y}$  和  $\ddot{Y}$  分别表示结构在横向的位移、速度和加速度, 圆点表示对时间  $T$  的导数。考虑在流速为  $U$  的均匀来流作用下, 只沿横向运动的结构受到流向拖曳力  $F_D$  和横向升力  $F_L$ , 如图 1(b) 所示。由于结构在横向具有一定速度, 来流相对流动方向和结构的受力方向都发生偏转, 形成攻角。定义  $F_D$  和  $F_L$  与原方向偏离的角度为  $\alpha$ , 则结构在横向受到的总力为

$$F_y = F_L \cos \alpha + F_D \sin \alpha$$

横向振动方程写为:

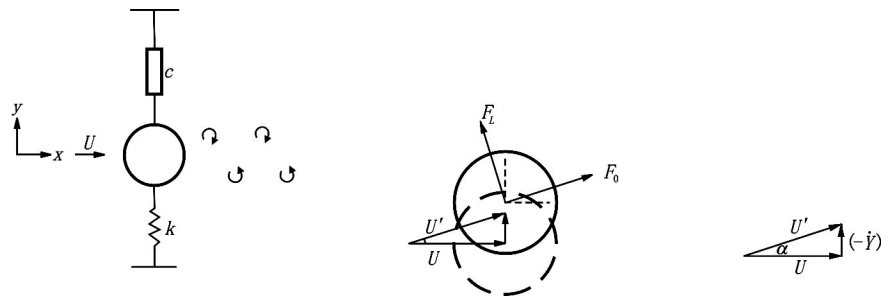


图1 二维耦合系统受力示意图

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = F_D \sin \alpha + F_L \cos \alpha \quad (2)$$

假设当攻角  $\alpha$  为较小值时,  $F_D$  和  $F_L$  与  $\alpha$  无关, 其三角函数关系有:

$$\sin \alpha = \frac{-\dot{Y}}{\sqrt{U^2 + \dot{Y}^2}} \approx \frac{-\dot{Y}}{U} \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{U}{\sqrt{U^2 + \dot{Y}^2}} \approx 1 \quad (4)$$

依据 Lighthill<sup>[13]</sup> 的观点, 结构受到的总升力  $F_L$  应该由两部分组成: 相当于惯性附加质量力的有势力  $F_p$  和由附加涡量引起的涡升力  $F_v$ , 因此有:

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = (F_v + F_p) \cos \alpha + F_D \sin \alpha \quad (5)$$

有势力在横向的分量  $F_p \cos \alpha$  等于附加流体质量与其加速度乘积, 即有:

$$F_p \cos \alpha = -C_A \frac{\pi D^2 \rho}{4} \ddot{Y} \quad (6)$$

这里  $C_A$  表示结构的附加质量力系数,  $D$  为圆柱直径, 将 (6) 代入 (5), 得到:

$$(m + C_A \frac{\pi D^2}{4} \rho) \ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = F_v \cos \alpha + F_D \sin \alpha \quad (7)$$

定义  $C_D$  和  $C_v$  分别为拖曳力系数和涡升力系数, 则  $F_D$  和  $F_v$  的表达式分别为:

$$F_D = C_D \frac{\rho D}{2} U^2 \quad (8)$$

$$F_v = C_v \frac{\rho D}{2} U^2 \quad (9)$$

通常在研究中利用实验结果来选取总升力经验系数, 而对涡升力目前尚未有通用的表达式和经验系数。  $C_v$  是一个无量纲参数, S.Krenk & S.R.K.Nielsen<sup>[10]</sup> 假设其正比于流场变量速度和来流速度之比, 此外本文假设  $C_v$  与无量纲的静止圆柱上旋涡脱落频率  $\omega_f / \omega_n$  具有一定的比例关系, 这里  $\omega_f$  为来流作用下静止圆柱上旋涡脱落频率,  $\omega_n$  为结构固有频率。无量纲来流速度定义为  $U^* = \frac{U}{f_n D} = \frac{2\pi U}{\omega_n D}$ 。实验结果表明, 在  $U^*$  比较小,

$\omega_f / \omega_n \leq 1$  时, 升力系数与  $\omega_f / \omega_n$  成正比; 当  $U^*$  较大,  $\omega_f / \omega_n > 1$  时, 升力系数与  $\omega_f / \omega_n$  成反比。因此本文采用分段函数表示  $C_v$ 。以  $\dot{Y}$  表示流场变量速度, 则涡升力  $C_v$  的表达式写为:

$$C_v = \gamma \frac{\dot{Y}}{U} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \gamma = \lambda \omega_f / \omega_n & (\omega_f / \omega_n \leq 1) \\ \gamma = \lambda \omega_n / \omega_f & (\omega_n / \omega_f > 1) \end{cases}$$

将式 (8)、(9)、(10) 代入式 (7), 得到:

$$(m + C_A \frac{\pi D^2}{4} \rho) \ddot{Y} + \left( c + C_D \frac{\rho D U}{2} \right) \dot{Y} + kY = \left( \frac{\rho D U}{2} \gamma \right) \dot{Y} \quad (11)$$

定义总质量

$$m_0 = m + C_M \frac{\pi D^2 \rho}{4}$$

质量比  $m^* = \frac{4m_0}{\pi \rho D^2}$ ;  $\frac{c}{m_0} = 2\zeta\omega_n$ , 其中  $\zeta$  称为结构阻尼比; 结构的固有频率  $\omega_n^2 = \frac{k}{m_0}$ , 式 (11) 整理为无量纲的结构振动方程:

$$\ddot{Y} + (2\zeta\omega_n + \frac{2C_D U}{\pi D m^*})\dot{Y} + \omega_n^2 Y = \frac{2U\gamma}{\pi D m^*} \dot{V} \quad (12)$$

定义无量纲变量  $y = Y/D$ ,  $v = V/D$ , 无量纲时间  $t = T\omega_f$ , 得到无量纲结构振动方程:

$$\ddot{y} + (2\zeta\omega_n + \frac{2C_D U}{\pi m^* D})\frac{1}{\omega_f} \dot{y} + \frac{\omega_n^2}{\omega_f^2} y = \frac{2}{\pi m^* D} \frac{U}{\omega_f} \dot{v} \quad (13)$$

定义频率比  $\delta = \frac{\omega_n}{\omega_f}$ ;  $\omega_f = 2\pi St \frac{U}{D}$ , 无量纲结构振动方程为:

$$\ddot{y} + (2\zeta\delta + \frac{C_D}{\pi^2 m^* St})\dot{y} + \delta^2 y = \frac{\gamma}{\pi^2 m^* St} \dot{v} \quad (14)$$

## 2.2 尾流振子方程

尾流振子是一个抽象概念, 它对应着旋涡交替脱落性态的尾迹特征, 可以用一个隐含流场变量<sup>[11]</sup>来表示, 可以与流动横向分量的加权平均相关联, 并对应于结构所受到升力的变化。以无量纲变量  $v(t)$  来表示尾流振子的运动, van der pol 方程形式的尾流振子振动方程<sup>[8]</sup>为:

$$\ddot{v} + \varepsilon\omega_f(v^2 - 1)\dot{v} + \omega_f^2 v = f \quad (15)$$

其中:  $\varepsilon$  为 van der pol 参数,  $f$  为无量纲振子受力。根据流固耦合作用力与反作用力在数值上相等的原则,  $f$  在数值上包括两部分: 一部分等于结构作用反力, 即式 (11) 方程右端项; 另一部分等于流体附加质量力的反力。尾流振子的受力可以写为:

$$F = -\left(-C_A \frac{\pi D^2 \rho}{4} \ddot{Y} + \frac{\rho D U \gamma \dot{V}}{2}\right) \quad (16)$$

式 (16) 的无量纲表达式为:

$$f = \frac{F}{\rho D^3 \omega_f^2} = C_A \frac{\pi}{4} \ddot{y} - \frac{\gamma}{4\pi St} \dot{v} \quad (17)$$

则无量纲的流体振子振动方程为:

$$\ddot{v} + \varepsilon(v^2 - 1 + \frac{\gamma}{4\pi St \varepsilon})\dot{v} + v = C_A \frac{\pi}{4} \ddot{y} \quad (18)$$

## 2.3 二维耦合模型

本文的无量纲二维流固作用力反作用力耦合模型为:

$$\ddot{y} + (2\zeta\delta + \frac{C_D}{\pi^2 m^* St})\dot{y} + \delta^2 y = \frac{\gamma}{\pi^2 m^* St} \dot{v} \quad (19)$$

$$\ddot{v} + \varepsilon(v^2 - 1 + \frac{\gamma}{4\pi St \varepsilon})\dot{v} + v = C_A \frac{\pi}{4} \ddot{y} \quad (20)$$

对于圆柱结构取  $C_A = 1.0$ ; 计算中取  $C_D = 1.2$ ;  $\varepsilon = 0.3$ ;  $\lambda = 0.8$ 。

## 3 二维圆柱结构涡激振动计算

针对二维计算模型, 采用二阶精度中心差分格式求解。时间步长  $\Delta t = 0.02$ 。假设结构和振子的谐振动可以写为:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = v_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

其中:  $\varphi$  相位差。代入模型方程, 可得:

$$\varphi = \arctan \frac{f^* \left(2\zeta\delta + \frac{C_D}{\pi^2 m^* St}\right)}{\delta(f^* - 1)} \quad (21)$$

对于某一个来流  $U^*$ , 本文给出的计算结果中, 结构无量纲振动幅值  $A^* = Y/D$  为平均值; 涡升力系数  $C_v$  为 RMS 值; 频率比  $f^* = f_s/f_n$  由位移时间

历程  $y(t)$  的快速傅立叶变换(FFT)得到; 无量纲相位  $(\varphi/\pi)$  根据式 (21) 得到。

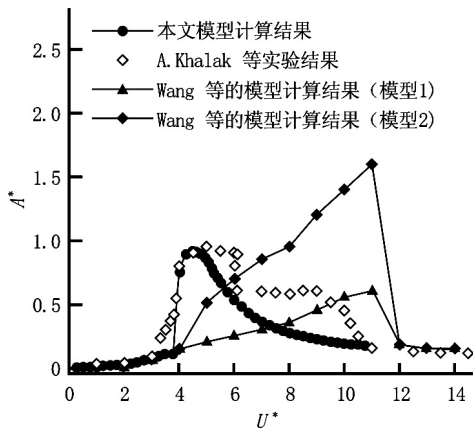


图2 小质量比结构振幅随流速变化

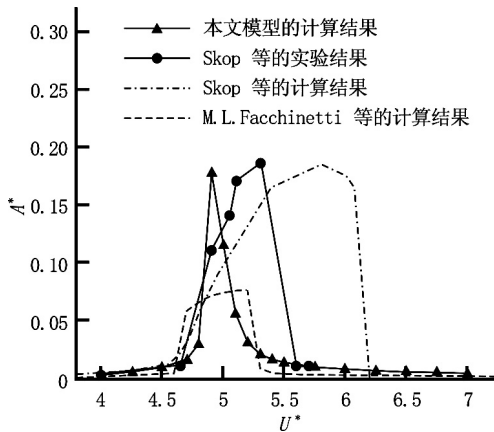


图3 大质量比结构振幅随流速变化

### 3.1 振幅

当结构尾迹中的旋涡脱落频率接近结构固有频率的时候, 结构会发生共振, 最明显的特征就是结构振幅突然大幅增加。图2和图3为采用本文模型计算得到的两种不同质量比结构振幅变化规律。与大质量比结构 ( $m^* \sim O(10^2)$ ) 相比, 小质量比结构 ( $m^* \sim O(1)$ ) 的最大振幅  $A_{\max}^*$  相对较大, 共振发生域较宽。图2中小质量比结构算例  $m^* = 2.4$ ,  $\zeta = 0.00542^{[14]}$ , 计算结果表明  $A^*$  在共振阶段突然增大, 共振过后又减小, 其共振前段和共振段变化规律与实验结果吻合很好。本文模型计算得到的振幅峰值  $A_{\max}^* = 0.91$ , 与实验结果  $A_{\max}^* = 0.95$  非常接近。图3则是大质量比结构算例  $m^* = 247.4$ ,  $\zeta = 0.0031$ , 计算得到了与实验变化规律吻合较好

的  $A^*$  变化规律, 但共振域略窄, 计算和实验测量<sup>[16]</sup> 得到的  $A_{\max}^*$  分别为 0.17 和 0.18。与其它现有的尾流振子模型计算结果相比<sup>[11, 15]</sup>, 本文模型的计算结果从定性上和定量上, 都更为合理。

Skop<sup>[2]</sup>定义  $S_G$  数 (Skop-Griffin parameter) 为:

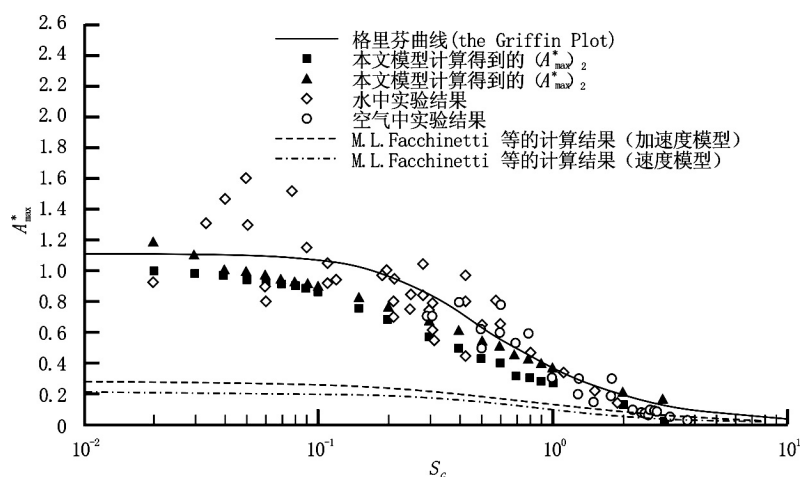
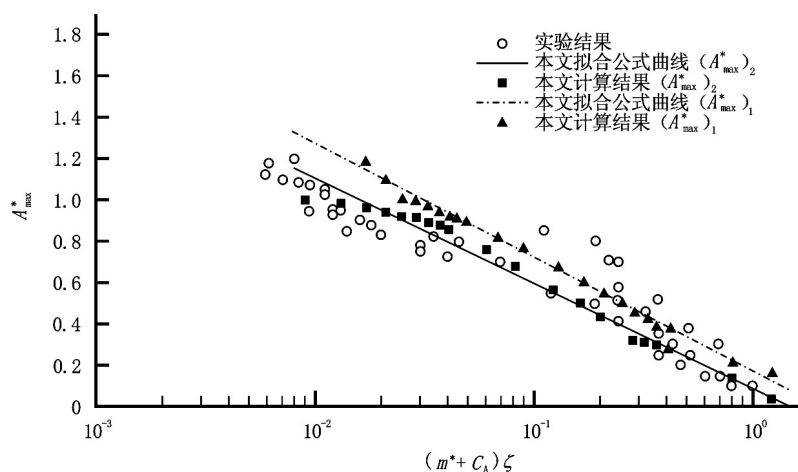
$$S_G = 2\pi^3 St^2 (m^* \zeta) \quad (22)$$

其中  $St$  为斯特罗哈尔数 (Strouhal Number)。他认为以  $S_G$  数为自变量可以得到更加归一化的  $A_{\max}^*$  的变化规律, 并给出了相应的变化曲线: 格里芬曲线 (The Griffin Plot)。Sarpkaya<sup>[11]</sup> 给出了一个描述格里芬曲线的经验公式:

$$A_{\max}^* = \frac{0.385}{(0.12 + S_G^2)^{1/2}} \quad (23)$$

本文选取了 21 个介于 0.02 与 3.0 之间的  $S_G$  数值计算点, 一般情况下  $\zeta \sim O(10^{-3})$ , 在计算中分别取  $\zeta_1 = 1 \times 10^{-3}$  和  $\zeta_2 = 9 \times 10^{-3}$  两种情况, 对应于每一个  $S_G$  数计算得到两种情况的极值  $A_{\max}^*$ , 对应于  $\zeta_1 = 1 \times 10^{-3}$  的计算结果为  $(A_{\max}^*)_1$ ; 对应于  $\zeta_2 = 9 \times 10^{-3}$  的计算结果为  $(A_{\max}^*)_2$ 。图4是采用本文模型计算得到  $A_{\max}^*$  随  $S_G$  数的变化规律。从中可以看出, 本文模型的计算结果得到了  $A_{\max}^*$  随着  $S_G$  数的增大逐渐减小的变化规律, 与实验结果一致。图中实心图标值域, 为本文模型预测随  $S_G$  数变化的  $A_{\max}^*$  值区间。总体来说, 计算结果比 Griffin Plot 曲线<sup>[2]</sup> 的值略小, 但数据点基本都处于实验结果域内。与其他模型的计算结果<sup>[11]</sup> 比较, 本文模型的预测结果更加理想。

除了  $S_G$  数, 研究中还经常用质量阻尼参数  $(m^* + C_A)\zeta$  来衡量  $A_{\max}^*$  变化规律。将本文计算的 42 组结果以及实验结果<sup>[2]</sup> 画在图5中, 可以看出,  $A_{\max}^*$  随  $(m^* + C_A)\zeta$  的增加而逐渐减小, 与实验结果一致。在  $(m^* + C_A)\zeta < 0.1$  区域, 计算结果比实验结果略大; 在  $0.1 < (m^* + C_A)\zeta < 1$  区域里, 计算结果与实验结果非常接近。总体来看, 计算结果均落在实验结果域中。根据本文模型计算结果, 将  $(A_{\max}^*)_1$  和  $(A_{\max}^*)_2$  与  $(m^* + C_A)\zeta$  的关系分别拟合成对数型拟合公式:

图4 本文模型模拟  $A_{\max}^*$  随  $S_G$  数的变化规律图5 本文模型模拟  $A_{\max}^*$  随  $(m^* + C_A)\zeta$  数的变化规律

$$(A_{\max}^*)_1 = 0.17 - 0.24 \ln \left[ (m^* + C_A)\zeta \right] \quad (24)$$

$$(A_{\max}^*)_2 = 0.09 - 0.22 \ln \left[ (m^* + C_A)\zeta \right] \quad (25)$$

式(24)和(25)拟合的相关系数分别为0.996和0.978,证明拟合曲线与计算点数值非常吻合。图5中给出了两个拟合公式曲线。与图4相比,图5中给出的  $A_{\max}^*$  随着  $(m^* + C_A)\zeta$  的变化更规律更均一、离散性更小。图中计算范围内,对于同一  $(m^* + C_A)\zeta$  值,由式(24)和(25)分别计算得到的  $(A_{\max}^*)_1$  和  $(A_{\max}^*)_2$ ,其值相差最大为0.17,最小为0.07。

### 3.2 升力、频率比和相位

随着来流流速的变化,当进入共振状态时,结构受到的升力会突然增大,共振过后又减小;振频则在发生共振时有一次跳跃增大,在共振结束时又有一次跳跃增大;结构位移与升力在共振前为同相位,共振发生时突变为反相位。这些现象与尾迹中旋涡脱落模态在共振前后发生突变直接相关。对于圆柱结构一般情况下,共振前旋涡以2S(two single vortex per cycle)模态脱落<sup>[2]</sup>,每个周期有两个方向相反的单涡脱落;共振时突变为2P(two vortex pairs per cycle)模态,每个周期中有两个涡对脱落。

图6、图7和图8给出了本文模型计算得到的升力、相位和振频随流速的变化规律,计算参数  $m^*=8.63$ ,  $\zeta=0.00151$ 。图6中,计算得到的升力系数的突跃趋势与实验结果<sup>[13]</sup>一致,共振发生区间略有差别,升力系数最大值与实验结果相等,  $C_{v\max}=1.14$ 。图7中,计算得到共振发生时刻,振

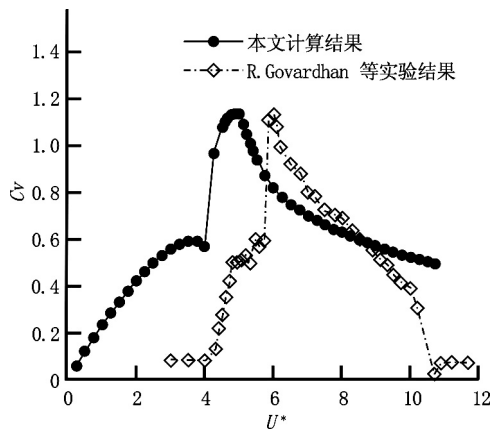


图6 升力系数随来流的变化规律

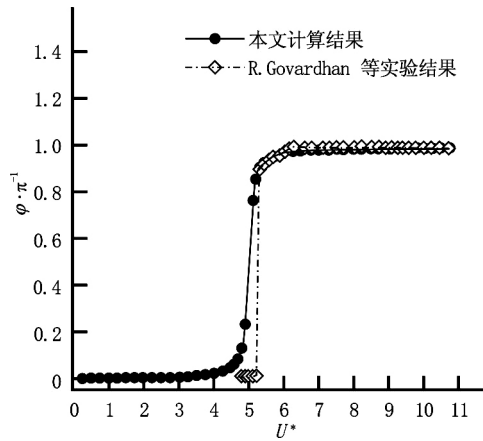


图7 相位随来流的变化规律

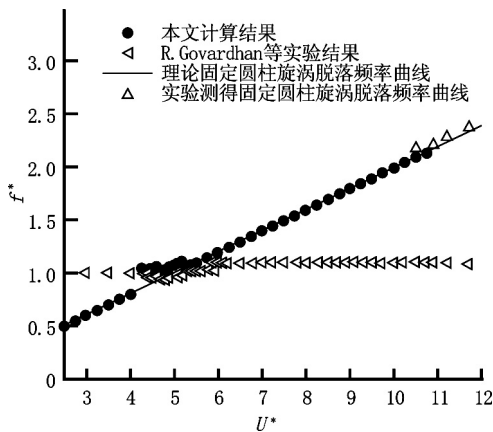


图8 振动频率比随来流的变化规律

幅与升力之间的相位角由0变为 $\pi$ 。图8中,计算得到的频率比 $f^*$ 在共振时从略小于1突变到略大于1,在共振阶段内,计算得到频率比数值的变化范围是 $f^*=1.01\sim 1.12$ ,实验<sup>[13]</sup>测得其变化范围是

$f^*=0.93\sim 1.1$ 。采用本文模型计算能够得到正确的升力、相位和频率比共振变化规律,其数值变化与实验结果非常接近。

### 4 结论

本文通过尾流振子与结构的作用力互为反作用力平衡的耦合模式,建立了一个新的流固耦合模型,并用该模型计算了圆柱结构二维涡激振动问题。计算得到了正确的结构共振的基本性态,包括振幅、升力、频率和相位的变化规律。共振前和共振突跃阶段的性态变化与实验结果非常吻合,结构振幅峰值 $A_{max}^*$ 与实验结果接近,较其它几个尾流振子模型的计算结果更为理想。结构最大振幅 $A_{max}^*$ 随着 $S_G$ 数和质量阻尼参数 $(m^* + C_A)\zeta$ 的增大而减小,与实验结果吻合。采用本文模型得到的一系列 $A_{max}^*$ 值均落在实验结果域内,基于这些结果给出了预测圆柱结构VIV振幅峰值的拟合公式。

### 参 考 文 献:

- [1] SARPKEYA T. Vortex-induced oscillations[J]. ASME.J.Appl. 1979, (46): 241-258.
- [2] WILLIAMSON C H K, GOVARDHAN R. Vortex-induced vibrations[J]. Annu.Rev. Fluid Mech.2004, (36): 413-455.
- [3] 林黎明, 凌国灿, 宋芳. 展向具有谐波型扰动的方柱旋涡分离流数值研究[J]. 空气动力学学报, 2007, 25: 81-84.  
LIN Liming, LING Guocan, SONG Fang. Numerical studies on the vortex dynamics in the wake of a quare-section cylinder with the spanwise geometric disturbance. ATCA Aerodynamica Sinica, 2007, 25: 81-84.
- [4] 尹德操, 尤云祥, 魏岗. 两层黏性流体中直立圆柱体绕流的三维数值模拟[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2008, 23(1): 1-6.  
YIN De-cao, YOU Yun-xiang, WEI Gang. Three-dimensional numerical simulation of the viscous flow around a vertical circular cylinder in a two-layer fluid[J]. 2008, 23(1): 1-6.
- [5] 张伟, 陈诚, 孙德军. 低 Reynolds 数横向排列双圆柱绕流的 POD\_Galerkin 谱方法数值模拟[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2009, 24(1): 82-88.  
ZHANG Wei, CHEN Cheng, SUN De-jun. Numerical simulation of flow around two side-by-side circular

- cylinders at low Reynolds numbers by a POD-Galerkin spectral method[J]. Chinese Journal of hydrodynamics, 2009, 24(1): 82-88.
- [6] 姚熊亮, 方媛媛, 戴绍仕. 基于LES方法圆柱绕流三维数值模拟[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2007, 22(5): 564-572.  
YAO Xiong-liang, FANG Yuan-yuan, DAI Shao-Shi. Three-dimensional numerical simulation of the flow past a circular cylinder based on LES method[J]. Journal of hydrodynamics, SerA, 2007, 22(5): 564-572.
- [7] 贾小荷, 刘桦. 双圆柱扰流的大涡模拟[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2008, 23(6): 621-631.  
JIA Xiao-he, LIU Hua. Large eddy simulation of flow around two circular cylinders[J]. Chinese Journal of hydrodynamics, 2008, 23(6): 621-631.
- [8] HARTLEN, RONALD T. Currie. Lift-oscillator model of vortex-induced vibration[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1970, (96): 577-591.
- [9] IWAN W D. The vortex induced oscillation of elastic structure elements[J]. Journal of Engineering for Industry, 1975, (97): 1378-1382.
- [10] KRENK S, NIELSEN S R K. Energy balanced double oscillator model for vortex-induced vibrations[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, (125): 263-271.
- [11] FACCHINETTI M L, LANGRE E DE, BIOLLEY F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations[J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, (18): 123-140.
- [12] VIOLETTE R, LANGRE E DE, SZYDLOWSKI J. Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: comparison with DNS and experiments[J]. Computers and Structures, 2007, 85: 1134-1141.
- [13] GOVARDHAN R, WILLIAMSON C H K. Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, (420): 85-130.
- [14] KHALAK A, WILLIAMSON CH K. Motion forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping[J]. Journal of Fluids and Structures, 1999, (13): 813-851.
- [15] WANG X Q, .SO R M C, CHAN K T. A non-linear fluid force model for vortex-induced vibration of an elastic cylinder[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, (260): 287-305.
- [16] SKOP R A, LUO G. An inverse-direct method for predicting the vortex-induced vibrations of cylinders in uniform and nonuniform flows[J]. Journal of Fluids and Structures, 2001, (15): 867-888