

能量非局部模型和新的应变梯度理论

易大可 王自强¹⁾

(中国科学院力学研究所非线性国家重点实验室, 北京 100190)

摘要 提出一种新的基于能量非局部模型的应变梯度理论, 并应用此理论对多晶铜以及薄膜基底的微压痕硬度进行理论预测和数值分析. 首先, 提出了能量非局部模型, 并由此模型, 得出新应变梯度理论的本构关系; 其次, 由变分原理, 得出相应的有限元公式; 再次, 给出了微压痕硬度的有限元分析方法; 最后, 将该理论预测结果与经典理论预测结果以及实验结果进行了对比. 结果表明, 计算结果与实验结果相符; 而经典理论的预测结果远低于实验结果.

关键词 非局部理论, 应变梯度理论, 微纳米压痕实验, 薄膜基底, 有限元方法

中图分类号: O34 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)01-0060-07

引 言

大量实验表明, 微尺度下材料的强度比常规尺度下材料的强度有显著提高. 例如, 在不同金属材料的微纳米压痕实验中^[1~5], 当压痕深度由 $50\ \mu\text{m}$ 减小到 $1\ \mu\text{m}$, 金属材料的硬度增大 1~2 倍. 在碳化硅粒子增强的铝-镁基复合材料实验中^[6], 保持增强相粒子体积比为 15% 的情况下, 当增强相颗粒的直径从 $16\ \mu\text{m}$ 减小到 $7.5\ \mu\text{m}$, 复合材料的宏观强度有显著的提高. 在细铜丝扭转实验中^[7], 当细铜丝的直径从 $170\ \mu\text{m}$ 减小到 $12\ \mu\text{m}$, 无量纲剪切强度增大 2 倍. 在纯镍薄膜弯曲实验中^[8], 当薄膜厚度从 $50\ \mu\text{m}$ 减小到 $12.5\ \mu\text{m}$, 无量纲弯曲强度增大 3~4 倍. 经典理论由于其本构关系中不包含内禀尺度, 因而不能解释这种尺度效应.

为了解释上述实验现象, 人们提出许多应变梯度理论. Fleck 和 Hutchinson 从塑性剪切梯度造成几何必需位错, 从而引起材料硬化增加的观点出发, 在 Toupin^[9], Mindlin^[10] 理论框架下, 发展了考虑转动梯度影响的 CS 理论^[11] 以及既考虑转动梯度, 又考虑了拉伸应变梯度影响的 SG 理论^[12]. Fleck 和 Hutchinson 的理论能成功地预测细铜丝扭转、纯镍薄膜弯曲实验以及金属基复合材料实验中出现的尺度效应. Gao 等^[13] 在 Nix 和 Gao^[2] 的启示下, 发展了一种基于位错机制的应变梯度塑性理论, 简称 MSG 理论. 这种应变梯度塑性理论通过一个多尺

度、分层次的框架, 实现了宏观塑性理论和位错理论的联系. Chen 和 Wang^[14] 在 J2 形变理论增量形式的基础上, 给出了一种具体的硬化关系, 应变梯度仅作为内变量来影响材料的切向硬化模量. 随后 Chen 和 Wang^[15] 在一般偶应力理论框架下提出了一种新的转动梯度理论, 结合考虑拉伸应变梯度的增量硬化关系, 形成了一种完整的应变梯度理论.

应变梯度理论已经成功地用于分析微压痕实验. Begley 和 Hutchinson^[16] 采用 SG 理论对 Stelmashenko 等^[1], Ma 和 Clarke^[3] 以及 McElhaney 等^[5] 的实验进行了分析. 他们认为在微压痕分析中, 与内禀尺度 l_s (与拉伸梯度相关) 相比, 内禀尺度 l_{cs} (与旋转梯度相关) 是次要的; 在假定 $l_s = l_{cs}$ 相等条件下, 获得几种金属材料的微尺度参量在 $(0.22\sim 0.6)\ \mu\text{m}$ 之间. Huang^[17] 等利用 MSG 理论, 研究了 McElhaney 等^[5] 的实验, 得到了无量纲化的压痕硬度的平方与压入深度的倒数之间的线性关系. 陶彩军等^[18] 采用 Chen 和 Wang^[15] 的理论, 考虑压头曲率, 成功地对 Ma 和 Clarke^[3], McElhaney 等^[5] 以及李敏^[19] 的实验进行了理论预测.

本文建立了能量非局部的模型, 在此基础上得出了新的应变梯度理论, 应用此理论对多晶铜以及薄膜基底的微纳米压痕实验进行数值分析. 第 1 节, 建立了能量非局部的理论模型, 导出了新的应变梯度理论的本构关系; 第 2 节, 由变分原理, 给出了

2008-01-14 收到第 1 稿, 2008-06-27 收到修改稿.

1) E-mail: tcwang@imech.ac.cn

基于新的应变梯度理论的有限元公式；第 3 节，给出了微压痕有限元分析方法；第 4 节，将本文的理论预测结果与经典理论预测的计算结果以及实验结果进行了对比。

1 基于能量非局部模型的弹塑性应变梯度理论

1.1 经典非局部理论

经典连续介质力学认为，对于简单材料，材料体内一点的应力仅取决于该点的应变、变形历史以及温度^[20]。实际上，不管是天然材料还是人造材料，都不是简单材料，都有复杂的内部微结构。当材料的宏观特征尺度远大于材料的内禀尺度（内部微结构的特征尺度），经典连续介质力学足以描述材料的力学行为；否则，需要考虑周围各点应变及应变历史对该点应力的影响。

非局部理论分为强非局部理论和弱非局部理论^[21]。强非局部理论放弃了局部假定，认为材料中一点的应力是非局部量，取决于该点以及邻近点的应变。例如，在典型非局部弹性理论中，图 1 中点 a 的应力可写为

$$\sigma_{ij} = \int_{V_c} \alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) D \varepsilon_{ij}(\mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) dV(\boldsymbol{\xi}) \quad (1)$$

其中， D 是弹性刚度， $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi})$ 是衰减函数，常取为如下形式^[22]

$$\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) = c(1 - (\|\boldsymbol{\xi}'\|)^2/R^2) \quad (2)$$

其中， \mathbf{X} 和 $\boldsymbol{\xi}$ 是坐标向量， R 是相互作用半径，对

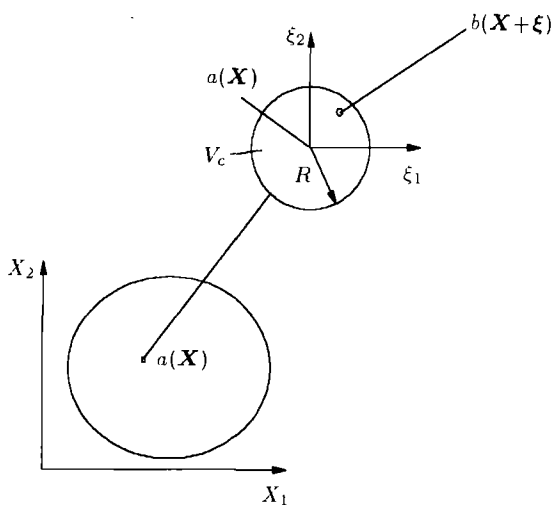


图 1 经典非局部模型

Fig.1 The classic non-local model

于一维、二维和三维问题， c 分别取 $15/(16R)$ ， $3/(\pi R^2)$ 和 $105/(32\pi R^3)$ 。

弱非局部理论则是在本构方程中引入某些状态变量的一阶或高阶梯度，弱非局部理论包括微极理论和梯度理论，例如，各种应变梯度理论。

1.2 能量非局部模型

如上节所述，在经典强非局部模型中，应力被当作非局部量。如果相互作用半径 R 很小，忽略应变的二次梯度，有

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{X}) + \varepsilon_{ij,k}(\mathbf{X})\xi_k \quad (3)$$

将式 (3) 和式 (2) 代入式 (1) 有

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{V_c} \alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) D \varepsilon_{ij}(\mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) dV_c = \\ & \int_{V_c} \alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) dV_c D \varepsilon_{ij}(\mathbf{X}) + \\ & \int_{V_c} \alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi}) \xi_k dV_c D \varepsilon_{ij,k}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (4)$$

对于均匀材料，衰减函数 $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X} + \boldsymbol{\xi})$ 关于局部坐标 $\boldsymbol{\xi}$ 对称 (如式 (2) 所示)，故式 (4) 右边第 2 项为零。这说明应变梯度 $\varepsilon_{ij,k}$ 对应力 σ_{ij} 没有贡献，因此由经典强非局部模型不能导出应变梯度理论。另外，由式 (1) 可知，经典强非局部模型仅仅导出应力本构方程，而不能导出高阶应力本构方程。

与经典强非局部模型不同，本文提出了以应变能密度为非局部量的新的非局部模型。考察图 2 所示的边长为 l_c 的立方体代表性体元，设想代表性体元内任意一点的应变能密度 \tilde{w} 是该点应变 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 以及弯扭张量 $\tilde{\chi}_{pj}$ 的函数。代表性体元的应变能密度 w 是非局部量，它是代表性体元内各点的应变能密度 \tilde{w} 的体平均

$$w = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \tilde{w}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) dV_c \quad (5)$$

其中 V_c 是代表性体元的体积， $\boldsymbol{\xi}$ 为局部坐标 (如图 2 所示)。

由于代表性体元尺度很小，忽略应变的二次梯度，有

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij,k} \xi_k \quad (6)$$

$$\tilde{\chi}_{pj} = \chi_{pj} = e_{pki} \varepsilon_{ij,k} \quad (7)$$

其中， $\varepsilon_{ij} = (\tilde{\varepsilon}_{ij})_{\xi=0}$ ， $\chi_{pj} = (\tilde{\chi}_{pj})_{\xi=0}$ 。

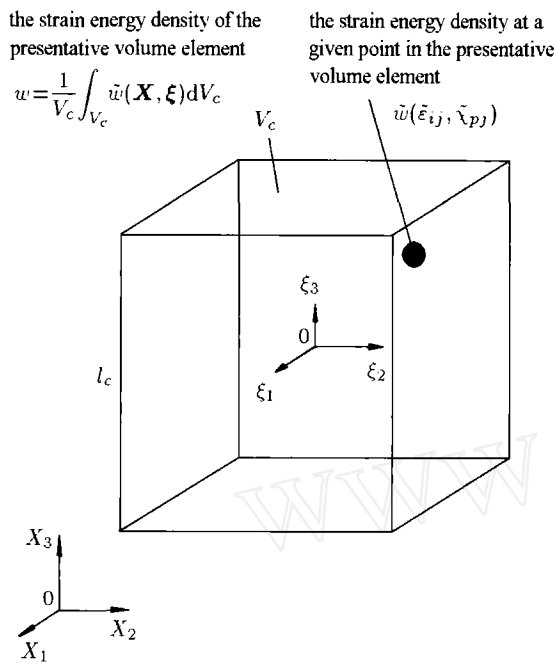


图2 代表性体元

Fig.2 The representative volume element

1.3 本构关系

参照 Fleck and Hutchinson^[11], 对于幂硬化材料, 体元内一点的应变能密度 \tilde{w} 可写成

$$\tilde{w} = \int_0^{\tilde{E}_e} \tilde{\Sigma}_e d\tilde{E}_e + \frac{1}{2} K \tilde{\varepsilon}_v^2 = \int_0^{\tilde{E}_e} \sigma_Y \left(\frac{\tilde{E}_e}{\varepsilon_Y} \right)^n d\tilde{E}_e + \frac{1}{2} K \tilde{\varepsilon}_v^2 = \frac{\sigma_Y \varepsilon_Y}{1+n} \left(\frac{\tilde{E}_e}{\varepsilon_Y} \right)^{1+n} + \frac{1}{2} K \tilde{\varepsilon}_v^2 \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_e^2 &= \frac{2}{3} \tilde{\varepsilon}'_{ij} \tilde{\varepsilon}'_{ij} + l_{cs}^2 \tilde{\chi}_e^2 \\ \tilde{\chi}_e^2 &= \frac{2}{3} \tilde{\chi}_{ij} \tilde{\chi}_{ij} \\ \tilde{\varepsilon}_v &= \tilde{\varepsilon}_x + \tilde{\varepsilon}_y + \tilde{\varepsilon}_z \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \tilde{\varepsilon}'_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{\tilde{\varepsilon}_v}{3} \quad (10)$$

$\tilde{\Sigma}_e$ 为广义等效应力, l_{cs} 是与旋转梯度相关的内禀尺度, σ_Y 为单轴屈服应力, ε_Y 为单轴屈服应变, n 为硬化指数.

由于代表体单元尺寸很小, 代表性体元内任意一点的应变能密度 \tilde{w} 可近似写为

$$\tilde{w} = w^0 + w^0_{,k} \xi_k + \frac{w^0_{,kl}}{2} \xi_k \xi_l \quad \text{on } V_c \quad (11)$$

其中

$$w^0 = (\tilde{w})_{\xi=0} = \frac{\sigma_Y \varepsilon_Y}{1+n} \left(\frac{E_e}{\varepsilon_Y} \right)^{1+n} + \frac{1}{2} K \varepsilon_v^2 \quad (12)$$

$$w^0_{,kl} = (\tilde{w}_{,kl})_{\xi=0} = \frac{2\sigma_Y}{3(\varepsilon_Y)^n} \left[\frac{2(n-1)(E_e)^{n-3} \varepsilon'_{mn} \varepsilon'_{mn,k} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij,l}}{3} + (E_e)^{n-1} \varepsilon'_{ij,l} \varepsilon'_{ij,k} \right] + K \varepsilon_{v,l} \varepsilon_{v,k} \quad (13)$$

将式 (11)、(12) 及 (13) 代入式 (5), 有

$$w = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \left(w^0 + w^0_{,k} \xi_k + \frac{w^0_{,kl}}{2} \xi_k \xi_l \right) dV_c = w^0 + A_k w^0_{,k} + B_{kl} w^0_{,kl} \quad (14)$$

其中

$$A_k = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \xi_k dV_c = 0 \quad (15)$$

$$B_{kl} = B \delta_{kl} = \frac{1}{2} \int_{V_c} \alpha(\xi) (\xi_1)^2 dV_c \delta_{kl} = \frac{l_c^2}{24} \delta_{kl} \quad (16)$$

由功共轭关系, 可得本构方程

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{2\sigma_Y}{3(\varepsilon_Y)^n} (E_e)^{n-1} \varepsilon'_{ij} + K \varepsilon_v \delta_{ij} + \frac{4\sigma_Y(n-1)B}{9(\varepsilon_Y)^n} \left[\frac{2(n-3)(E_e)^{n-5} \varepsilon'_{mn} \varepsilon'_{mn,k} \varepsilon'_{pq} \varepsilon'_{pq,k}}{3} + (E_e)^{n-3} \varepsilon'_{mn,k} \varepsilon'_{mn,k} \right] \varepsilon'_{ij} + \frac{8\sigma_Y(n-1)B}{9(\varepsilon_Y)^n} (E_e)^{n-3} \varepsilon'_{mn} \varepsilon'_{mn,k} \varepsilon'_{ij,k} \quad (17)$$

$$\tau_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ji,k}} \right) = \frac{4\sigma_Y B (E_e)^{n-1}}{3(\varepsilon_Y)^n} \varepsilon'_{ij,k} + \left(\frac{l_{cs}^2 \sigma_Y (E_e)^{n-1}}{3(\varepsilon_Y)^n} + \frac{4\sigma_Y B (n-1)(n-3) l_{cs}^2 (E_e)^{n-5} \varepsilon'_{mn} \varepsilon'_{mn,r} \varepsilon'_{st} \varepsilon'_{st,r}}{27(\varepsilon_Y)^n} + \frac{2\sigma_Y B (n-1)(E_e)^{n-3} l_{cs}^2 \varepsilon'_{ij,l} \varepsilon'_{ij,l}}{9(\varepsilon_Y)^n} \right) (\varepsilon_{pki} \chi_{pj} + \varepsilon_{pkj} \chi_{pi}) + \frac{8\sigma_Y B (n-1)(E_e)^{n-3} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \varepsilon'_{mn,k}}{9(\varepsilon_Y)^n} + 2BK \varepsilon_{v,k} \delta_{ij} \quad (18)$$

其中

$$B = \frac{l_c^2}{24} \quad (19)$$

弹性阶段, 本构方程可简化为

$$\sigma_{ij} = \frac{2\sigma_Y}{3\varepsilon_Y} \varepsilon'_{ij} + K\varepsilon_v \delta_{ij} \quad (20)$$

$$\tau_{ijk} = \frac{4\sigma_Y B}{3\varepsilon_Y} \varepsilon'_{ij,k} + \frac{l_{cs}^2 \sigma_Y}{3\varepsilon_Y} (e_{pri} \chi_{pj} + e_{prj} \chi_{pi}) + 2BK\varepsilon_{v,k} \delta_{ij} \quad (21)$$

2 应变梯度理论的有限元公式

根据最小势能原理以及变分原理，有

$$\int_V \delta w dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \tau_{ijk} \delta \varepsilon_{ij,k}) dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_S \bar{p}_i \delta u_i dS + \int_S \bar{r}_i D \delta u_i dS \quad (22)$$

其中， V 是体积， S 是表面， f_i 是单位体积力， u_i 是位移， $D(=n_m \partial_m)$ 是梯度算子在表面外法向上的投影， \bar{p}_i 是表面拽力， \bar{r}_i 是高阶表面拽力。

由式 (22)，可得

$$\bar{p}_i = (\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k} + (\bar{\partial}_p n_p) \tau_{ijk} n_k) n_j - \bar{\partial}_j \tau_{ijk} n_k \quad (23)$$

$$\bar{r}_i = n_j n_k \tau_{ijk} \quad (24)$$

其中， $\bar{\partial}_p(= (\delta_{ij} - n_i n_j) \partial_j)$ 是梯度算子在表面的切向分量。

如果高阶表面拽力为零，由式 (22) 可得弹塑性形变有限元求解方程

$$K_{ep}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (25)$$

其中， K_{ep} ， \mathbf{u} 和 \mathbf{P} 分别表示弹塑性刚度矩阵、位移向量和载荷向量。

3 微压痕硬度有限元分析

3.1 单元选择

对微纳米压痕实验进行数值分析，可用的单元主要有三角形 C_1 单元^[23~26]，9 节点或 16 节点单元^[27]，在本文采用 9 节点单元。

3.2 计算模型

如图 3 所示，被压材料是一圆柱体，接触半径 a 远小于圆柱体半径 R ，压头尖端的最终压下去量 δ 远小于圆柱体的高 L 。在被压材料底部 ($Z = 0$)，无 Z 方向的位移，切向表面拽力和高阶表面拽力为零；在侧面 $r = R$ 处，表面拽力和高阶表面拽力为零。

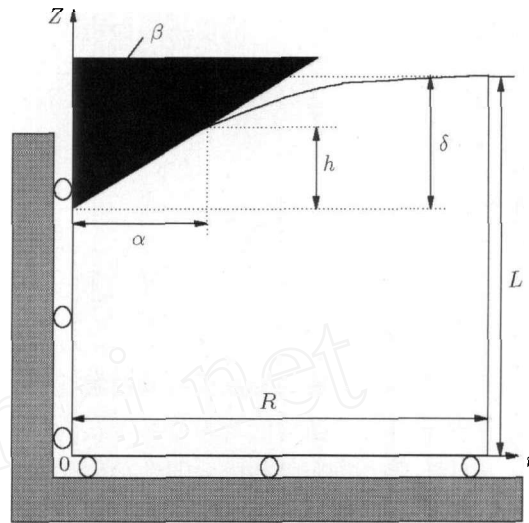


图 3 轴对称微压痕模型及边界条件

Fig.3 Geometry of axisymmetric micro-indentation model and boundary conditions

3.2.1 基本假定

为简化分析，计算模型采用以下假定：

- (1) 压痕实验是轴对称的；
- (2) 压头和基底之间无摩擦；
- (3) 在整个外表面高阶拽力为零。

3.2.2 边界条件

位移边界条件为：

$$(1) (u_r)_{r=0} = 0 \quad (26)$$

$$(2) (u_z)_{z=0} = 0 \quad (27)$$

- (3) 在被压材料的上表面

$$u_z(r) = \delta - \frac{r}{\tan \beta}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (28)$$

式中 β 为压头的半角， δ 为压痕深度。

在被压材料的上表面，面力边界条件为

$$\bar{p}_z = 0, \quad r > a \quad (29)$$

$$\bar{p}_r = 0, \quad r > 0 \quad (30)$$

$$\bar{r}_z = \bar{r}_r = 0, \quad r \geq 0 \quad (31)$$

3.3 压痕硬度的确定

接触半径 a 和压痕深度 δ 是非线性隐式关系，可由临界接触点 $r = a$ 处，表面拽力为零来确定

$$(\bar{p}_z)_{r=a} = 0 \quad (32)$$

计算中，先假定接触半径 a ，施加边界条件 (28)，然后不断迭代找到满足式 (32) 的压头尖端的最终压下去量 δ 。此时施加在压头上的力，即接触半径内 ($r \leq a$)

所有节点竖向反力之和, P 除以压痕面积得到压痕硬度

$$H = \frac{|P|}{\pi a^2} \quad (33)$$

4 数值结果与实验比较

这里将计算结果与 McElhane^y 等^[5] 和 Ranjana 等^[28] 实验结果进行比较.

4.1 与 McElhane^y 等的多晶铜实验曲线比较

计算中采用的多晶铜的材料参数^[29] 为: 剪切模量 $\mu = 42$ GPa, 泊松比为 0.3, 塑性功硬化指数为 $N = 0.3$, 参考应力 $\sigma_{ref} = 688$ MPa, 半锥角 $\beta = 72^\circ$.

Fleck 和 Hutchinson^[11] 建议, 对于铜, 与旋转梯度相关内禀尺度 l_{cs} 取值范围为 $2.6 \sim 5.1 \mu\text{m}$. 在这里我们取 $l_{cs} = 2.6 \mu\text{m}$.

多晶铜的单向拉伸应力应变关系如下

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon_x, & \varepsilon \leq \sigma_Y/E \\ \sigma_{ref}\varepsilon_x^{0.3}, & \varepsilon > \sigma_Y/E \end{cases} \quad (34)$$

当压痕深度远大于微米量级时, 通过有限元计算得到多晶铜平均硬度 $H = 810.26$ MPa. 这个结果与实验测得多晶铜硬度^[5] $H_0 = 834$ MPa 符合良好.

当压痕深度在零点几微米到几微米的范围内, 采用本理论预测的多晶铜微压痕硬度与 McElhane^y 等的实验结果符合良好 (如图 4 所示).

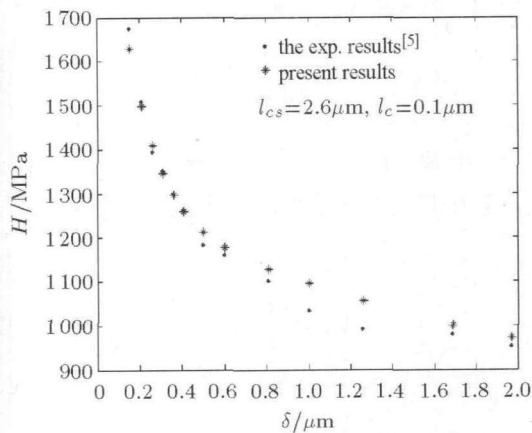


图 4 本文理论预测的多晶铜微压痕硬度与 McElhane^y 等的实验结果^[5] 的比较

Fig.4 Comparison of the present results with the experiment data of McElhane^y et al.^[5] between hardness H and indentation depth δ on polycrystalline copper

4.2 与 Ranjana 等的薄膜基底微压痕实验比较

在 Ranjana 等的实验中, 薄膜基底是通过在玻

璃上喷一层铝薄膜制成的 (如图 5 所示). 计算中, 假定玻璃不发生塑性变形, 采用的计算参数^[28] 为: 铝薄膜厚度 $t = 2 \mu\text{m}$, 铝的屈服应力 $\sigma_Y^{Al} = 129$ MPa, 铝的弹性模量 $E^{Al} = 70$ GPa, 铝的泊松比 $\nu^{Al} = 0.33$, 塑性功硬化指数为 $N = 0.05$, 玻璃的弹性模量 $E^{glass} = 73$ GPa, 玻璃的泊松比 $\nu^{glass} = 0.24$, 半锥角 $\beta = 72^\circ$. 对于铝薄膜, 由于缺乏实验结果, 无法定出与旋转梯度相关内禀尺度 l_{cs} . 在这里, 我们给出 $l_{cs} = 5l_c$ 和 $l_{cs} = 10l_c$ 时的计算结果.

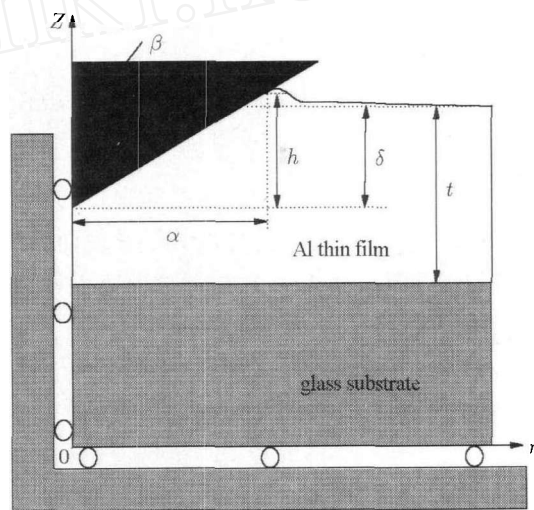


图 5 薄膜基底微压痕模型

Fig.5 A schematic diagram of the micro-indentation model of a soft film on a hard substrate

从图 6 可知:

(1) 当压入深度远小于薄膜厚度时, 基底的影响可以忽略, 通过实验点与经典理论计算结果的对比, 微压痕硬度显著增大, 且微压痕硬度随压入深度的减小而增大, 表现出强烈的尺度效应.

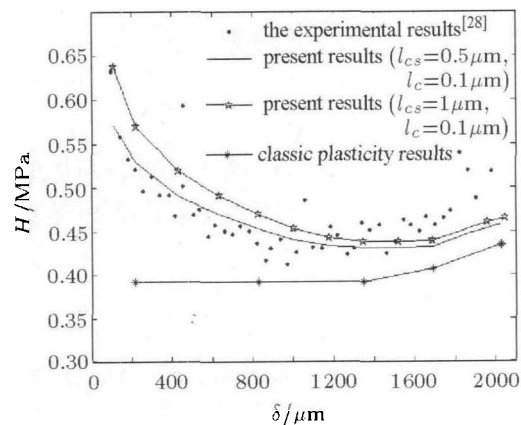


图 6 基底为玻璃, 铝薄膜厚为 $2 \mu\text{m}$ 时, 微压痕硬度与压头压入深度的关系

Fig.6 Micro-indentation hardness H versus the depth of indentation, δ , for a $2 \mu\text{m}$ Al film on a glass substrate

(2) 当压入深度与薄膜厚度可比时, 由于基底效应, 微压痕硬度随压入深度的增大而增大。

(3) 本文的理论计算结果与实验符合良好, 而经典理论结果明显偏小。

5 结 论

本文基于能量非局部模型, 导出一种新的应变梯度理论, 并给出了新理论的有限元公式。本文详细介绍了微压痕硬度有限元分析方法, 应用这一新理论对多晶铜以及薄膜基底的微纳米压痕实验进行有限元数值模拟。数值分析结果表明, 本理论能很好解释微纳米压痕实验中出现的尺度效应。经典理论预测的结果与本文理论预测的结果以及实验结果相比, 明显偏低。

参 考 文 献

- Stelmashenko NA, Walls MG, Brown LM, et al. Micro-indentations on W and Mo oriented single crystals-an SEM study. *Acta Metall Mater*, 1993, 41(10): 2855~2865
- Nix WD, Gao H. Indentation size effects in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46(3): 411~425
- Ma Q, Clarke DR. Size-dependent hardness of silver single crystals. *J Mater Res*, 1995, 10(4): 853~863
- Poole WJ, Ashby MF, Fleck NA. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals. *Scripta Mater*, 1996, 34 (40): 559~564
- McElhaney KW, Vlassak JJ, Nix WD. Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiments. *J Mater Res*, 1998, 13 (5): 1300~1306
- Lloyd DJ. Particle reinforced aluminum and magnesium matrix composites. *Int Mater Rev*, 1994 39(1): 1~23
- Fleck NA, Muller GM, Ashby MF, et al. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Mater*, 1994, 42 (2): 475~487
- Stölken JS, Evans AG. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater*, 1998, 46(14): 5109~5115
- Toupin R. Elastic materials with couple-stresses. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, 11: 385~414
- Mindlin RD. Microstructure in linear elasticity. *Arch Rational Mech Anal*, 1964, 16: 51~78
- Fleck NA, Hutchinson JW. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 49 (10): 1825~1857
- Fleck NA, Hutchinson JW. Strain gradient plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 1997, 33: 295~361
- Gao H, Huang Y, Nix WD, et al. Mechanism-based strain gradient plasticity, Part I: theory. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47(6): 1239~1263
- Chen SH, Wang TC. A new hardening law for strain gradient plasticity. *Acta Materialia*, 2000, 48 (16): 3997~4005
- Chen SH, Wang TC. A new deformation theory for strain gradient effects. *Int J Plasticity*, 2002, 18(8), 971~995
- Begley MR, Hutchinson JW. The mechanics of size-dependent indentation. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46 (10): 2049~2068
- Huang Y, Gao H, Nix WD, et al. Mechanism-based strain gradient plasticity, Part II: analysis. *J Mech Phys Solids*, 2000, 48(1): 99~128
- 陶彩军, 王自强, 陈少华. 考虑压头曲率和应变梯度的微压痕分析. *力学学报*, 2004, 36(6): 680~686(Tao Caijun, Wang Tzuchiang, Chen Shaohua. The influence of indenter tip radius to mico-indentation tests. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(6): 680~686 (in Chinese))
- 李敏, 梁乃刚, 张泰华等. 纳米压痕过程的有限元数值试验研究. *力学学报*, 2003, 35(3): 257~264 (Li Min, Liang Naigang, Zhang Taihua, et al. 3D finite element simulation of the nanoindentation process. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(3): 257~264(in Chinese))
- Noll W. A new mathematical theory of simple materials. *Arch Ration Mech Anal*, 1972, 48: 1~50
- Bazant ZP, Milan J. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *J Engineering Mechanics*, 2002, 128(11): 1119~1149
- Bazant ZP, Ozbolt J. Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *J Eng Mech*, 1990, 116 (11): 2485~2505
- Specht B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test. *Int J Numer Methods Eng*, 1998, 26: 705~717
- Zienkiewicz OC, Taylor RL. The Finite Element Method. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1989
- Shu JY, Fleck NA. Strain gradient crystal plasticity: size dependent deformation of bicrystals. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47(2): 297~324
- Xia ZC, Hutchinson JW. Crack tip fields in strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1996, 44(10): 1621~1648
- Wei Y, Hutchinson JW. Steady-state crack growth and work of fracture for solids characterized by strain gradient plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1997, 45(8): 1253~1273
- Ranjana S, Zhenyu X, Huang Y, et al. Indentation of a soft metal film on a hard substrate: strain gradient hardening effects. *J Mech Phys Solids*, 2001, 49(9): 1997~2014
- 邱信明. 基于细观机制的应变梯度塑性理论新发展及应用. [博士论文]. 北京: 清华大学, 2001 (Qiu Xinming. Development and applications of mechanism based strain gradient plasticity. [Ph D]. Beijing: Tsinghua University, 2001(in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

ENERGY NON-LOCAL MODEL AND NEW STRAIN GRADIENT THEORY

Yi Dake Wang Tzuchiang¹⁾

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract A new strain gradient theory based on energy non-local model is proposed in the paper, and applied to predict the micro-indentation hardness of polycrystalline copper and the thin film-substrate system. First, an energy non-local model is presented to derive the constitutive equation of a new strain gradient theory. Second, the finite element formula of the new strain gradient theory is obtained with the case of the prediction of micro-indentation hardness. It is found that the predicted results by the new strain gradient theory agree well with the experimental data, while the hardness values predicted by classic plasticity theory are remarkably lower than the experimental data.

Key words non-local theory, strain gradient theory, micro-indentation test, thin film-substrate system, finite element method

Received 14 January 2008, revised 27 June 2008.

1) E-mail: tcwang@imech.ac.cn