

[文章编号] 1001-246X(2009)02-0211-10

高阶精度 CE/SE 算法及其应用

张德良¹, 王景焘², 王 刚²

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 北京大学工学院, 北京 100871)

[摘 要] 对时-空守恒元解元算法 (CE/SE) 的网格设置做较大改进, 提出一种新的六面体解元和元定义; 同时在解元中对物理量进行高阶 Taylor 展开, 给出一种在时间和空间上均具有高阶精度 CE/SE 算法. 在此基础上, 把新型的高阶精度 CE/SE 算法推广应用于高速流动捕捉激波间断、气相化学反应流动、计及固体动态效应的流体-弹性流动和非稳态多相不可压缩粘性流动中. 数值实践表明, 提出的新型网格结构上的高阶精度 CE/SE 算法具有算法简单、计算精度高、计算效率和计算效果好的优点, 并大大改进和拓展了 CE/SE 算法的应用范围.

[关键词] CE/SE 算法; 激波捕捉技术; 化学反应流动; 流体-弹性流动; 多相不可压缩粘性流动

[中图分类号] O381; O241.82

[文献标识码] A

0 引言

自从美国学者 Harten^[1] 在 1983 年提出高精度 TVD 算法以来, 计算流体力学中激波捕捉技术得到了空前的发展, 出现了不少 TVD 类型差分格式, 它们在具有双曲型性质的高速流动的基础研究和工程问题中得到广泛的应用^[2-7]. 大量的计算实践表明, 采用 TVD 类型的差分格式求解高速流动, 特别是捕捉流动中的激波间断是十分成功的, 计算精度和效果也是很好的. 一般说来, 除了湍流和一些特殊的流动以外, 特别是对工程问题的计算, 采用二阶精度的 TVD 类型差分格式基本上能够满足高速流动求解要求, 并能准确捕捉激波. 20 多年过去了, 目前国内外在激波捕捉技术方面仍然被 TVD 类型算法统治着, 因此自上世纪 90 年代以来, 国内外计算流体力学界的学者纷纷向 TVD 算法提出挑战, 期望尽快摆脱 TVD 算法思想的束缚, 提出和发展一些新概念、新思想和新算法. 经过不断努力, 近年来已经逐步出现了一些和 TVD 算法完全不同的, 新的高精度算法, 其中时-空守恒元解元方法算法 (Space-time Conservation Element and Solution Element Method, 简称 CE/SE 算法) 就是近年来兴起的一种全新的守恒型计算方法.

CE/SE 算法最早由 NASA Lewis 研究中心的 Chang^[8] 于 1995 年提出, 这种算法从根本上区别于传统的方法, 它将时间和空间统一起来同等对待. 利用守恒型积分方程, 通过定义解元和守恒元使得计算的局部和整体都严格满足守恒律; 多维问题不需要算子分裂或方向交替技术; 在高速流动中可以满意地求解具有间断的流场, 并有较高的分辨率. 计算实践表明, CE/SE 算法具有明显的优点, 有着十分广阔的发展前景和应用空间.

近年来, CE/SE 算法已经在高速流动中得到广泛应用, 并逐步向流体力学的各个分支学科进行推广和应用. 然而, CE/SE 算法自身还存在许多不足和需要改进之处, 特别是它的高阶精度理论至今没有建立起来. 目前广泛应用的 CE/SE 格式, 在解元中的物理量只是取 Taylor 展开的一阶精度, 如果按照 Chang 原始的网格单元的构造方法, 很难将 CE/SE 差分格式推广到更高阶精度, 因此如果能够构造出更高精度的 CE/SE 差分格式, 将能大大提高 CE/SE 算法的计算精度. 到目前为止, 我们发现 CE/SE 算法主要是在高速、单相和无化学反应的流动中得到广泛应用, 而在流体力学的其他领域还没有见到应用, 特别是非稳态多相不可压缩粘性流动.

为此, 我们在研究 Chang 原始的 CE/SE 算法的基础上, 首先对 CE/SE 算法网格单元构造方法做了较大改

[收稿日期] 2007-10-17; [修回日期] 2008-02-22

[基金项目] 国家自然科学基金(20490206)资助项目

[作者简介] 张德良(1939-), 男, 江苏无锡, 研究员, 从事流体力学、计算力学及爆炸力学方面的研究.

进,提出了一种新型的六面体单元网格结构 CE/SE 算法,由它来构造新的 CE/SE 算法,并把它推广应用于高速流动捕捉激波间断、气相化学反应流动^[9],然后在新型网格结构上提出了一种高阶精度 CE/SE 算法的差分格式,并将它推广应用于流体力学的各个领域,除高速流动捕捉激波间断外,还将其推广应用于气相化学反应流动、流体-弹性流动(计算固体动态效应)和非稳态多相不可压缩粘性流动.数值实践表明,本文提出的新型高阶精度 CE/SE 算法具有算法简单、计算精度高、计算效率和计算效果好的优点,并大大改进和拓展了 CE/SE 算法的应用范围.本文介绍新型高阶精度 CE/SE 算法,以及它在高速流动捕捉激波间断、气相化学反应流动、流体-弹性流动和非稳态多相不可压缩粘性流动中的应用,并给出了上述流动的若干计算实例,对高阶精度 CE/SE 算法的计算精度和效果进行检验.

1 二维二阶精度新型 CE/SE 算法

对于二维 CE/SE 算法,不同的解元和守恒元的定义可以导出不同的差分格式.最早 Chang^[8]的解元和守恒元的划分方案中,每个解元对应 3 个守恒元,虽然这种划分最符合时空守恒的思想,但是这种划分空间网格编号方向不互相垂直,且与 x 和 y 轴都不重合,给格式推导过程和向三维推广造成很大困难.为此,文[9-11]分别对二维格式构造方法进行了改造,提出六面体单元构造网格结构的方案,使得在每个解元上只设置一个守恒元,利用在不同时间半层上的相邻解元的公共交点上流动变量满足连续条件,导出流动物理量与它的空间偏导数之间的关系.对文[9]和文[11]提出的六面体单元中的解元和守恒元构造网格结构的方案进行了比较,发现前者在时间推进过程中并不需要在半层时间上提供任何空间边界条件,因此使用起来更方便.

二维守恒型 Euler 方程组为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E(U)}{\partial x} + \frac{\partial F(U)}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

对于二维问题,将所要求解的时间和空间区域统一划分成网格点集合.每个网格点用 (j, k, n) 来表示,即 $j = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots; k = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots; n = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$,其中 j 和 k 是空间网格编号, n 是时间方向网格编号.在二维情况下解元和守恒元为四边形网格,网格点在时间方向投影如图 1 所示,其中“ \circ ”和“ \bullet ”代表网格点在时间方向上相差 $t/2$ 的网格点.

为了求解空间每一个网格点 $P(j, k, n)$ 的值,设一个解元 $SE(P)$,如图 2 所示.相应的守恒元 $CE(P)$ 是六面体 $ACEGA C E G$,如图 3 所示.

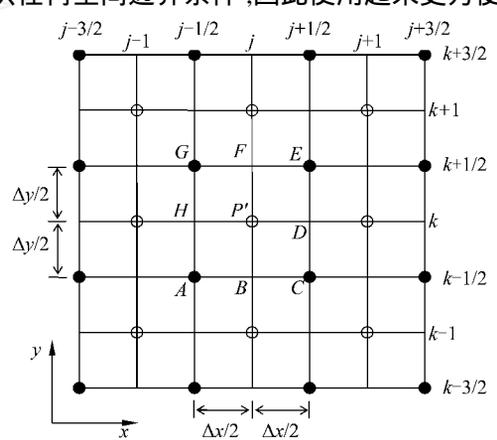


图 1 二维空间网格点在 xy 平面的投影
Fig. 1 2D grid point projection on xy plane

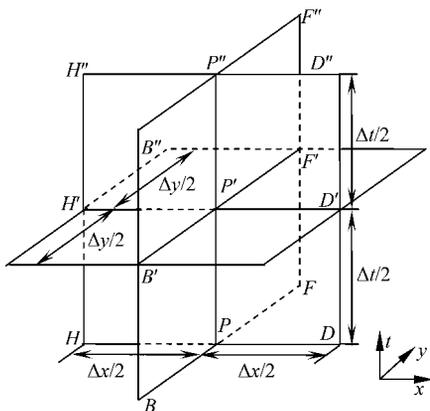


图 2 二维 CE/SE 算法解元 $SE(P)$
Fig. 2 Solution element $SE(P)$

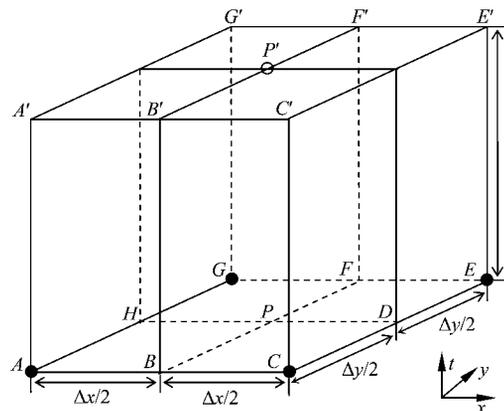


图 3 二维 CE/SE 算法守恒元 $CE(P)$
Fig. 3 Conservation element $CE(P)$

令 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t$ 为三维 Euclid 空间的坐标. 在 Euclid 空间中, 由散度定理, 可将方程组写成积分形式的方程组

$$H_m \cdot ds = 0, \quad (2)$$

其中 $S(V)$ 是求解区域的边界, $ds = d \cdot n$, d 是 $S(V)$ 上的微元表面积, n 是在 $S(V)$ 面上指向外侧的单位法向矢量, 矢量 $H_m = (E_m, F_m, U_m)$ 是空间流动物理量矢量, E_m, F_m, U_m 分别是矢量 E, F, U 的分量.

在任何一个解元中, 对解元网格基点 P 的物理量进行 Taylor 展开, 并取二阶精度, 则图 2 中距离 P 点 (x, y, t) 点的物理量可表示为

$$U_m(x, y, t)_P = (U_m)_P + (U_{mx})_P x + (U_{my})_P y + (U_{mt})_P t + \\ \frac{1}{2} (U_{mxx})_P (x)^2 + \frac{1}{2} (U_{myy})_P (y)^2 + \frac{1}{2} (U_{mtt})_P (t)^2 + \\ (U_{mxy})_P x y + (U_{mxt})_P x t + (U_{myt})_P y t, \quad (3)$$

$E_m(x, y, t)_P$ 和 $F_m(x, y, t)_P$ 可以同样表示. 这里 $(U_m)_P$ 是 P 的值 U_m ; $(U_{mx})_P$ 是 U_m 位于 P 点的 x 方向导数; $(U_{my})_P$ 是 y 方向导数; $(U_{mt})_P$ 是时间 t 方向导数, $(U_{mxx})_P, (U_{mxy})_P, (U_{mxt})_P, (U_{myy})_P, (U_{myt})_P$ 和 $(U_{mtt})_P$ 分别是 U_m 的 6 个二阶导数, 它们在解元中都是常数.

将式(3)代入式(1)可得到

$$(U_{mt})_P = - (E_{mx})_P - (F_{my})_P, \\ (U_{mxt})_P = - (E_{mxx})_P - (F_{mxy})_P, \\ (U_{myt})_P = - (E_{mxy})_P - (F_{myy})_P, \\ (U_{mtt})_P = - (E_{mxt})_P - (F_{myt})_P, \quad (4)$$

由上式可知, 在数值求解过程中, $(U_m)_P$ 对 t 的各阶导数 $(U_{mt})_P$ 可以通过 $(E_m)_P$ 和 $(F_m)_P$ 的空间导数求得, 而空间导数 $(E_m)_P$ 和 $(F_m)_P$ 又都是 $(U_m)_P$ 的函数, 因此, 我们只需要求解物理量 $(U_m)_P$ 和它的各阶空间导数 $(U_{mx})_P, (U_{my})_P, (U_{mxx})_P, (U_{mxy})_P$ 和 $(U_{myy})_P$ 就可以求解流动的所有物理量了.

设在守恒元 CE(P) 上必须满足积分型守恒律方程组(2), 由此得到守恒元每个表面上积分值为

$$(U_m)_P + \frac{x^2}{24} (U_{mxx})_P + \frac{y^2}{24} (U_{myy})_P = \frac{1}{4} \left(\bar{U} + \frac{t}{x} \bar{E} + \frac{t}{y} \bar{F} \right), \quad (5)$$

为方便起见, 定义如下函数:

$$\mathcal{U}_m(x, y, t)_P = (U_m)_P + (U_{mx})_P x + (U_{my})_P y + (U_{mt})_P t + \\ \frac{1}{6} (U_{mxx})_P (x)^2 + \frac{1}{6} (U_{myy})_P (y)^2 + (U_{mxy})_P x y, \\ \mathcal{E}_m(x, y, t)_P = (E_m)_P + (E_{mx})_P x + (E_{my})_P y + (E_{mt})_P t + \\ \frac{1}{6} (E_{myy})_P (y)^2 + \frac{1}{6} (E_{mtt})_P (t)^2 + (E_{myt})_P y t, \\ \mathcal{F}_m(x, y, t)_P = (F_m)_P + (F_{mx})_P x + (F_{my})_P y + (F_{mt})_P t + \\ \frac{1}{6} (F_{mxx})_P (x)^2 + \frac{1}{6} (F_{mtt})_P (t)^2 + (F_{mxt})_P x t, \quad (6)$$

这样式(5)中物理量 \bar{U}, \bar{E} 和 \bar{F} 可以写作

$$\bar{U} = \mathcal{U}_m \left[\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, 0 \right]_A + \mathcal{U}_m \left[-\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, 0 \right]_C + \mathcal{U}_m \left[-\frac{x}{4}, -\frac{y}{4}, 0 \right]_E + \mathcal{U}_m \left[\frac{x}{4}, -\frac{y}{4}, 0 \right]_G, \\ \bar{E} = \mathcal{E}_m \left[0, \frac{y}{4}, \frac{t}{4} \right]_A - \mathcal{E}_m \left[0, \frac{y}{4}, \frac{t}{4} \right]_C - \mathcal{E}_m \left[0, -\frac{y}{4}, \frac{t}{4} \right]_E + \mathcal{E}_m \left[0, -\frac{y}{4}, \frac{t}{4} \right]_G, \\ \bar{F} = \mathcal{F}_m \left[\frac{x}{4}, 0, \frac{t}{4} \right]_A + \mathcal{F}_m \left[-\frac{x}{4}, 0, \frac{t}{4} \right]_C - \mathcal{F}_m \left[-\frac{x}{4}, 0, \frac{t}{4} \right]_E - \mathcal{F}_m \left[\frac{x}{4}, 0, \frac{t}{4} \right]_G. \quad (7)$$

由式(5)可知, 为了求得 $(U_m)_P$ 值, 必须先求出当前时刻的 P 点的空间方向二阶导数 $(U_{mxx})_P$ 和 $(U_{myy})_P$ 值. 利用上一时刻的解元中一阶导数的估计值, 并对它们进行差分计算, 则有

$$(U_{mxx})_P = \frac{(U_{mx})_C - (U_{mx})_A + (U_{mx})_E - (U_{mx})_G}{2 \Delta x}, \quad (8)$$

$$(U_{mx})_P = (U_{mx}) + \frac{\Delta t}{2} (U_{mxt}),$$

$$(U_{myy})_P = \frac{(U_{my})_C - (U_{my})_A + (U_{my})_E - (U_{my})_G}{2 \Delta y}, \quad (9)$$

$$(U_{my})_P = (U_{my}) + \frac{\Delta t}{2} (U_{myt}).$$

同理可以求得二阶交叉导数. 对于物理量 U_m 而言, 由于在空间方向上导数可以交换次序, 故应该有 $(U_{mxy})_P = (U_{myx})_P$. 在实际计算中取二者的平均作为物理量 U_m 在 P 点的交叉导数.

根据式(5)和式(8), (9)求得 $(U_m)_P$ 值, 然后同一阶 CE/SE 算法差分格式一样, 在守恒元中 A, C, E 和 G 点在解元中交界点 A, C, E 和 G 处物理量满足连续条件下, 可以得到物理量 U_m 的 x, y 方向导数为

$$\begin{aligned} (U_{mx})_P^- &= -\frac{1}{\Delta x} \left[U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_A + U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_G - 2(U_m)_P \right], \\ (U_{mx})_P^+ &= +\frac{1}{\Delta x} \left[U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_C + U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_E - 2(U_m)_P \right], \\ (U_{my})_P^- &= -\frac{1}{\Delta y} \left[U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_A + U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_C - 2(U_m)_P \right], \\ (U_{my})_P^+ &= +\frac{1}{\Delta y} \left[U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_E + U_m \left\{ 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right\}_G - 2(U_m)_P \right], \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $(U_{mx})_P^-, (U_{mx})_P^+, (U_{my})_P^-, (U_{my})_P^+$ 是守恒元 CE(P) 中网格基点 P 点的 x, y 方向上导数的左右导数. 同一阶 CE/SE 算法一样, 在流场中存在间断的情况下, 为了避免震荡, 需要对它们作某种加权平均, 即物理量 U_m 的导数为

$$\begin{aligned} (U_{mx})_P &= W[(U_{mx})_P^-, (U_{mx})_P^+,], \\ (U_{my})_P &= W[(U_{my})_P^-, (U_{my})_P^+,], \end{aligned} \quad (11)$$

其中函数 W 表示为

$$W[x_-, x_+,] = \frac{|x_+| x_- + |x_-| x_+}{|x_+| + |x_-|}. \quad (12)$$

而二阶导数是对流场的耗散作用, 它不会使流场震荡, 故不需要做加权平均.

原则上, 我们可以采用类似的计算推导过程, 得到 CE/SE 算法的任意阶精度格式. 然而计算实践表明, 更高阶精度的 CE/SE 算法的差分格式十分繁复, 计算量明显增加, 计算时间成倍上升, 而计算精度和计算效果并没有明显提高和改善. 因此一般说来, 特别对于工程应用问题计算, 采用二阶 CE/SE 算法差分格式计算流动已经足够了.

2 新型 CE/SE 算法验证

2.1 一维 Sod 激波管

用隔膜将一根长为 2.0 管子从中间隔开, 隔膜两侧气体静止, 但气体参数不同

$$(p, u, \rho) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0), & 0 \leq x < 1.0, \\ (0.125, 0.0, 0.1), & 1.0 \leq x < 2.0, \end{cases} \quad (13)$$

在 $t=0$ 时刻, 隔膜被打开, 左侧的高压气体开始向右侧流动, 形成右行激波和左行定心膨胀波.

该问题的控制方程为一维 Euler 方程组. 初始条件如式(13), 激波管左右两侧均为自由输出边界. 网格点数为 201, 取 $CHL=0.6$, $\Delta t=1.0$, 计算时间是 0.4. 采用一阶和二阶精度 CE/SE 算法求解的速度分布如图 4 和图 5 所示. 从计算结果精度上看, 二阶精度格式比一阶精度格式要高些, 尤其是在膨胀波和激波波头处. 图 6 给出了速度分布局部对比, 图中画圈处可见在波头处一阶结果跳动比较明显, 二阶结果没有跳动, 更加接近精确解.

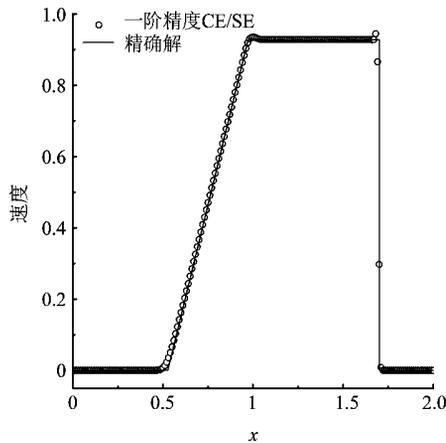


图 4 一阶 CE/SE 速度分布

Fig. 4 Velocity in first order CE/SE method

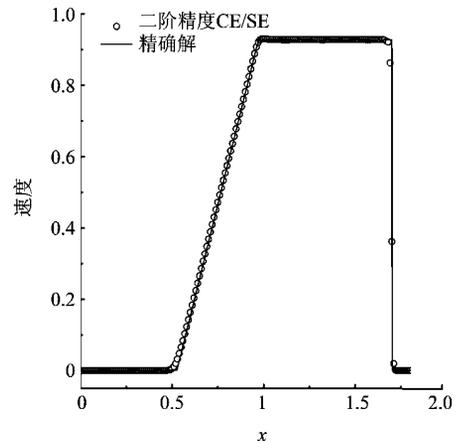


图 5 二阶 CE/SE 速度分布

Fig. 5 Velocity in second order CE/SE method

2.2 二维气体动力学问题

为了检验上面提出的六面体单元网格结构的 CE/SE 算法的计算精度和效果,我们对高速流动中的激波在楔面上反射问题进行计算. 当一个激波与一楔面相遇时,激波会在楔面上反射,这一过程称为激波反射. 实验和理论都证实存在四种类型激波反射^[8]: 正规反射 (RR)、单马赫反射 (SMR)、复杂马赫反射 (CMR)、双马赫反射 (DMR). 由新型二阶精度 CE/SE 算法得到的四种类型的激波反射见图 7. 计算结果和有关文献实验与数值结果比较表明,计算精度和效果是令人满意的.

为了进一步说明问题,我们对激波在具有多道隔墙坑道中传播过程进行了计算. 当激波通过坑道时,会和障碍物相互作用,产生激波反射、绕射和涡旋效应. 激波和涡旋相互作用形成复杂流场. 图 8 给出在马赫数为 3.0 的激波通过坑道,时间 0.8 的压力等值线及实验结果. 计算中网格数为 720×360 . 可见激波经过四个隔板之后压力明显减少,达到了消波的目的.

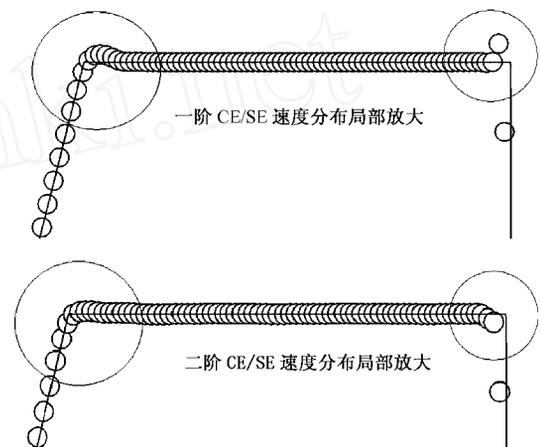


图 6 一阶和二阶 CE/SE 速度分布局部放大图比较

Fig. 6 Amplified local velocity distribution in first order and second order CE/SE methods

3 新型 CE/SE 算法在其他领域推广应用

3.1 气相化学反应流动

在上述研究基础上,我们把新型的 CE/SE 算法首先推广应用于具有化学反应的爆轰波传播与反射过程的数值模拟. 在实验中发现,爆轰波在传播过程中具有特殊的胞格结构,并且在楔面上反射前后,爆轰波的胞格大小和形状都有明显的变化,而且这种变化和楔角、初压有密切关系. 我们采用二阶段反应模型和基元反应模型对爆轰波传播与反射过程进行数值模拟. 图 9 和图 10 给出了爆轰波在直管道和楔面上反射时的胞格结构的数值结果和实验照片. 比较它们可以看出,胞格结构的尺寸大小和形状基本一致,数值计算结果能清晰地反映胞格结构的基本特征.

3.2 流体-弹塑性流动

Anderson 等人对长钨合金杆 (WHA) 侵彻高强度装甲钢进行了试验^[12],这是一个轴对称固体弹塑性流动问题.

首先建立了弹塑性流动模型,钨合金杆和装甲钢板均采用 Johnson-Cook 本构模型和 Mie-Grüneisen 状态

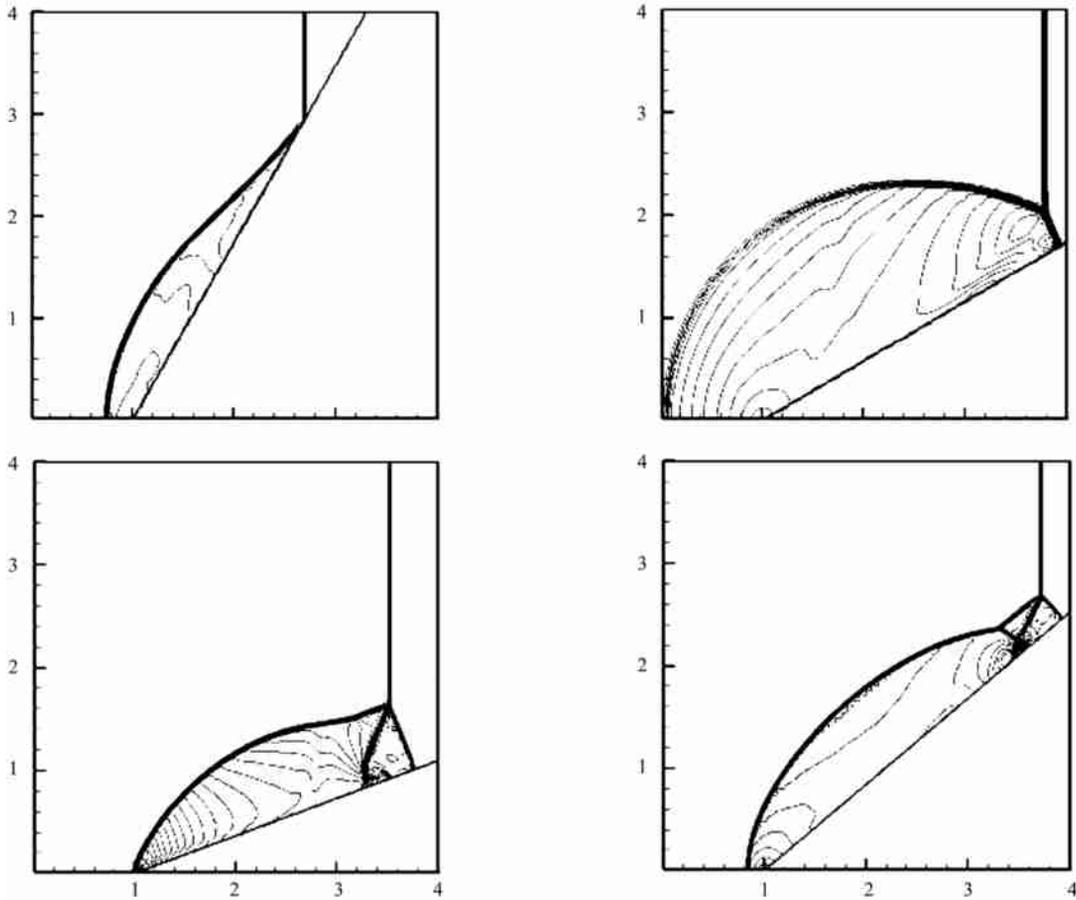


图 7 四种激波反射

Fig. 7 Four types of shock wave reflection

方程,结合杂交粒子水平集方法和合适的物质接触界面和自由界面边界条件,采用新型 CE/SE 算法对长钨合金杆侵彻装甲钢板试验进行了数值模拟.

图 11 是不同时刻长钨合金杆侵彻装甲钢板过程,图 12 和图 13 给出了钨合金杆头部和尾部的位置与速度的时间历史曲线,并与文[13]的结果进行了对比.文[14]曾经采用一阶精度的 CE/SE 方法对此算例进行过模拟,对比相应的结果可以看出,二阶算法的钨合金杆的尾部回流稍长并且尖一些,而钨合金杆的头部位置和速度两种算法结果基本一致.

3.3 非稳态不可压缩粘性流动

众所周知,不可压缩粘性流动控制方程组不是双曲型的,但是 CE/SE 算法一般只适用于具有双曲型性质的高速流动,为了克服方程组性质的麻烦,我们首先借助于人工压缩法对不可压缩粘性流动控制方程组进行预处理,使方程具有双曲型性质,然后给出了一种新的适用于 CE/SE 算法的物理时间处理方法,同时结合杂交粒子水平集方法,对在重力作用下管道中液滴坠落非稳态多相流动和变形进行数值模拟.图 14 和 15 是液滴坠落过程中变形和速度矢量分布.本文计算结果和文[15]的数值结果完全一致.

5 结论

本文首先对 CE/SE 算法的网格单元进行了改造,构造了守恒律方程组的二维二阶精度 CE/SE 算法差分格式.在此基础上,首先对 CE/SE 算法在高速流动捕捉激波间断进行验证,然后结合粒子水平集方法,把它推广应用于气相化学反应流动、流体-弹性体流动以及稳态和非稳态多相不可压缩粘性流动.数值实践表明,我们提出的新型高阶精度 CE/SE 算法能够成功地数值模拟各种复杂流体流动,甚至能计算固体动态效应,大大改进和拓展了 CE/SE 算法的应用范围,具有十分广阔的应用前景.本文改进的高精度 CE/SE 算法具有守恒性好、算法简单、计算精度高、计算效率和计算效果好的特点,原则上可以推广到任意阶精度和三维问题.

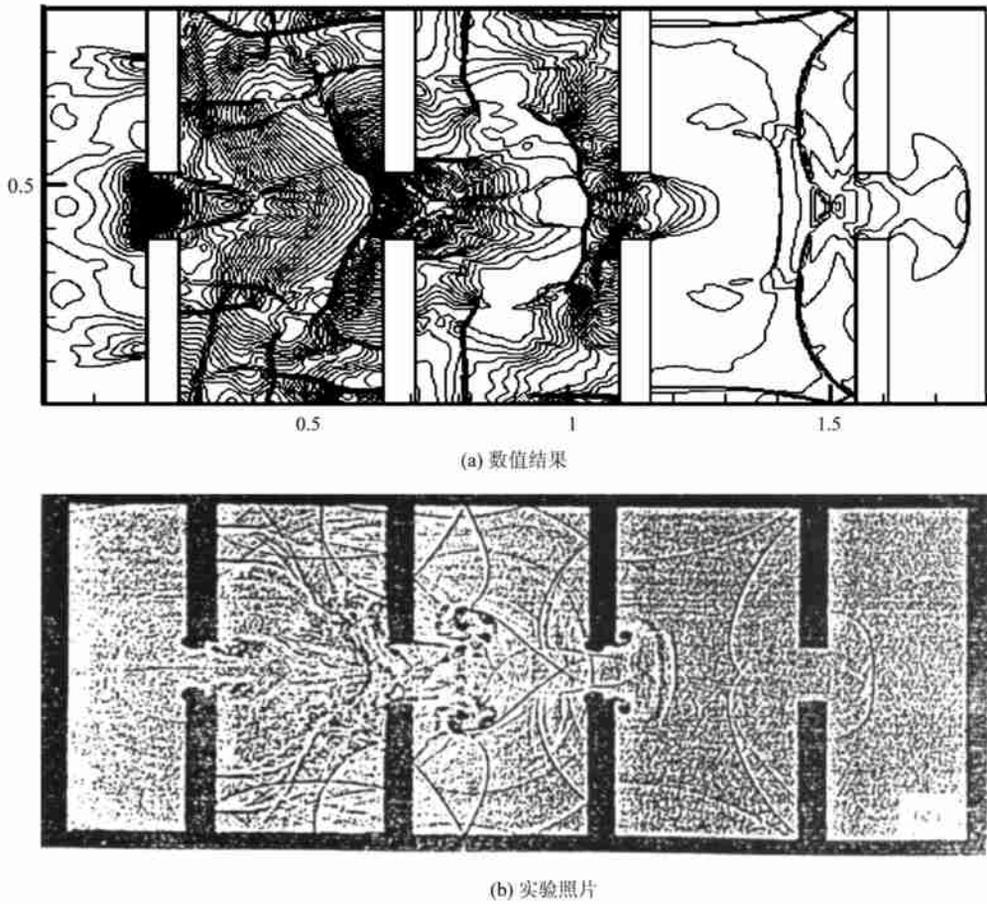


图 8 激波在具有多道隔墙坑道中传播过程

Fig. 8 Shock wave propagation in a tunnel with many obstacles

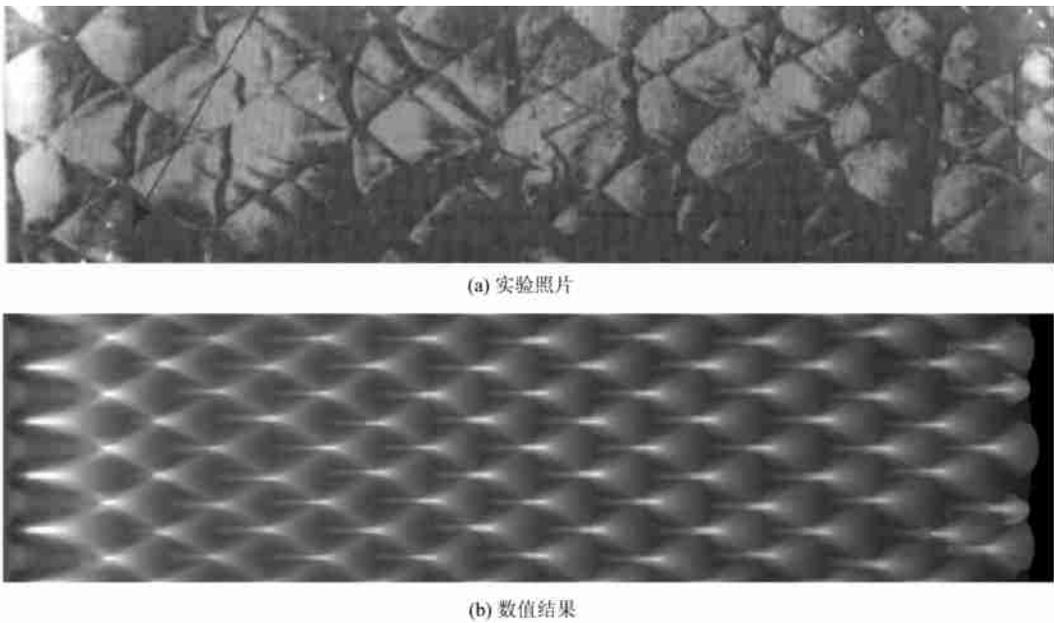
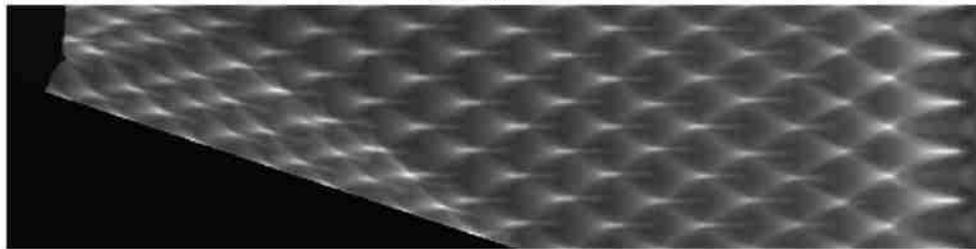


图 9 爆轰波在直通管中传播胞格结构

Fig. 9 Cellular structure in detonation wave propagation in a direct tube



(a) 实验照片



(b) 数值结果

图 10 爆轰波在楔面反射胞格结构

Fig. 10 Cellular structure formed in detonation wave reflection on an wedge

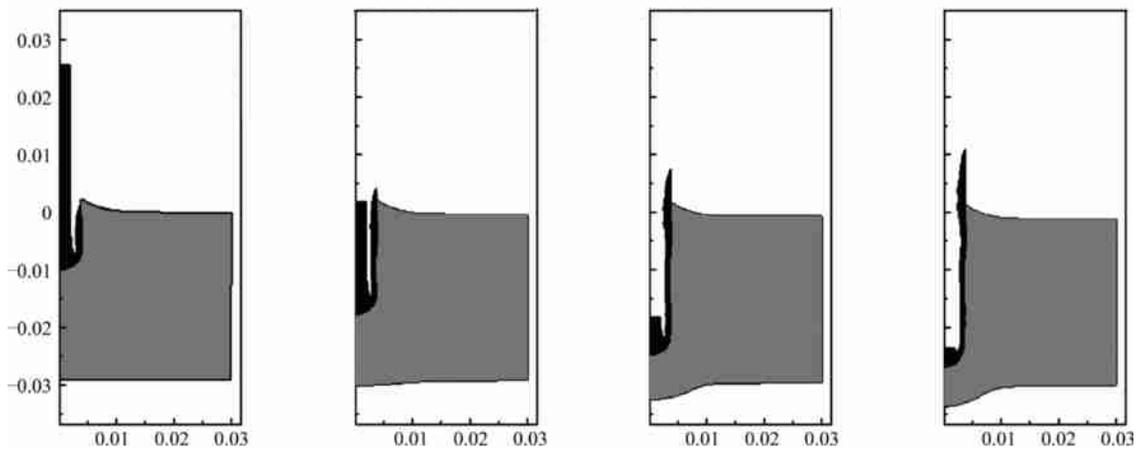


图 11 不同时刻长钨合金杆撞击装甲钢板过程数值结果

Fig. 11 Deformation of a WHA impacting on gray steel ($t = 20, 40, 60$ and $80 \mu\text{s}$)

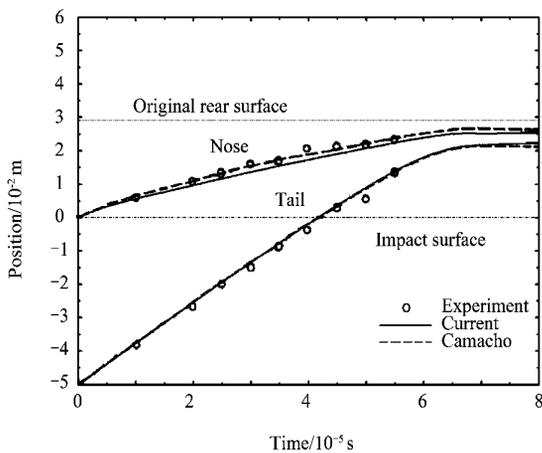


图 12 不同时刻钨合金杆头部和尾部位置

Fig. 12 Position of projectile nose and tail

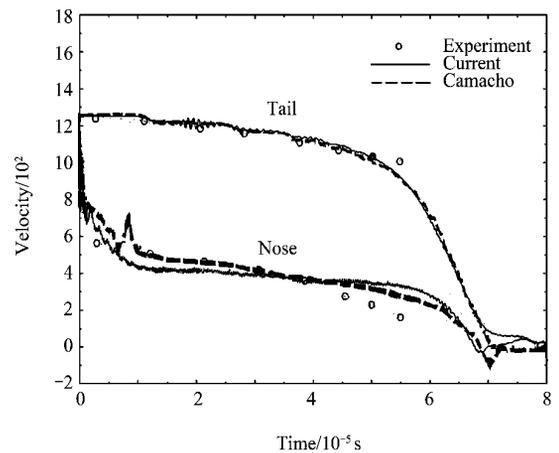


图 13 不同时刻钨合金杆头部和尾部速度

Fig. 13 Velocity of projectile nose and tail

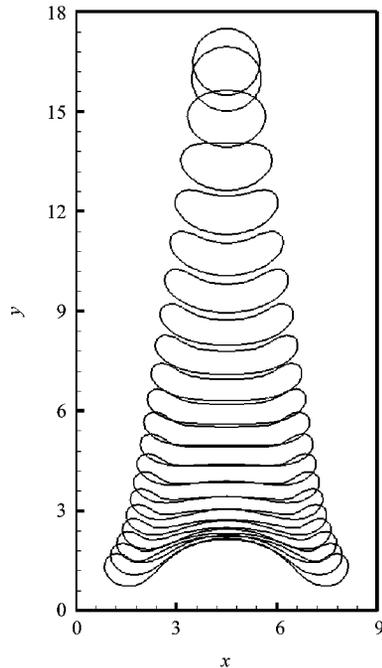


图 14 不同时刻液滴变形过程
Fig. 14 Deformation of a droplet

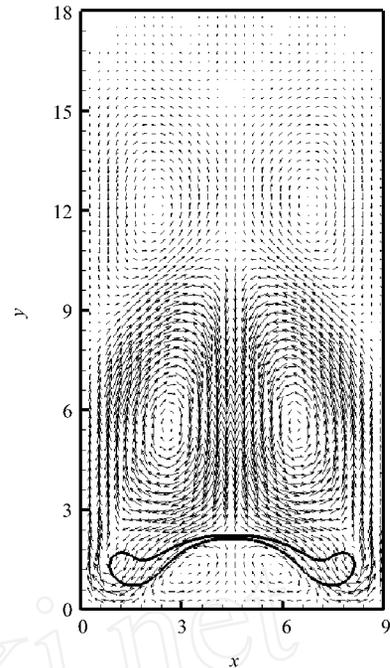


图 15 $t = 100$ 时刻速度矢量图
Fig. 15 Velocity vector distribution at $t = 100$

[参 考 文 献]

- [1] Harten A. High resolutions schemes for hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 1983, **49**: 357 - 393.
- [2] Sweby P K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation law[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1984, **21**(5): 995 - 1011.
- [3] Yee H C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications[J]. Journal of Computational Physics, 1987, **68**: 151 - 179.
- [4] Harten A, Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, I[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, **24**: 279 - 309.
- [5] Harten A. ENO schemes with subcell resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1989, **83**: 148 - 184.
- [6] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravathy R. Uniformly high order accurate essentially nonoscillatory schemes, III[J]. Journal of Computational Physics, 1987, **71**: 231 - 303.
- [7] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式[J]. 空气动力学学报, 1988, **6**(2): 143 - 165.
- [8] Chang S C. The Method of space-time conservation element and solution element - A new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 1995, **119**: 295 - 324.
- [9] 张德良, 谢巍, 郭长铭, 胡湘渝. 气相爆轰胞格结构和马赫反射数值模拟[J]. 爆炸与冲击, 2001, **21**(3): 161 - 167.
- [10] 刘海涛, 徐建中. 求解 Euler 方程的空间 - 时间守恒格式[J]. 工程热物理学报, 1997, **18**(3): 294 - 299.
- [11] Zhang Z C, Yu S T J, Chang S C. A space-time conservation element and solution element method for solving two- and three-dimensional unsteady Euler equations using quadrilateral and hexahedral meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2002, **175**: 168 - 199.
- [12] Anderson C E, Höhler V, Walker J D, Stip A J. Time-resolved penetration of long rods into steel targets[J]. International Journal of Impact Engineering, 1995, **16**: 1 - 18.
- [13] Camacho G T, Ortiz M. Adaptive Lagrangian modeling of ballistic penetration of metallic targets[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, **142**: 269 - 301.
- [14] Wang Jingtao, Zhang Deliang, Liu Kaixin. An Eulerian approach based on CE/SE method for 2D multimaterial elastic-plastic flow[J]. Chinese J Comput Phys, 2007, **24**(4): 395 - 401.
- [15] Ni M J, Komori S M, Neil B. Direct simulation of falling droplet in a closed channel[J]. International Journal of Heat and Mass

Transfer, 2006, 49: 366 - 376.

High-order CE/SE Method and Applications

ZHANG Deliang¹, WANGJingtao², WANG Gang²

(1. *Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*

2. *College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)*

Abstract: Space-time conservation element and solution element (CE/SE) method with second order accuracy is modified on hexahedral grids. High-order accuracy in space and time is obtained by expanding variables in SEs with high order. CE/SE method is used to capture shock waves in chemical reaction flows, elastic-plastic flows and unsteady multi-phase incompressible flows. Numerical results are compared with experimental and theoretical results of classical examples. It is indicated that the method is easy to implement, accurate and efficient. Application of high order CE/SE method is extended.

Key words: CE/SE method; shock wave capture; chemical reaction flow; elastic-plastic flow; multi-phase incompressible flow

www.cnki.net