

[文章编号] 1001-246X(2009)06-0857-08

摄动有限体积算法及其在两相流中应用

董贺飞, 张德良, 杨国伟

(中国科学院力学研究所 高温气体动力学重点实验室, 北京 100190)

[摘 要] 采用一种全新的摄动有限体积 (PFV) 算法和水平集 (Level Set) 技术对液液两相系统中液滴坠落进行数值模拟, 数值结果表明, PFV 新算法具有节点少、精度高, 效率高, 编程方便等优点, 能成功模拟液液两相流动, 为两相流动数值模拟提供了一种新的途径。

[关键词] 摄动有限体积; 两相流; 液滴坠落; 数值算法

[中图分类号] O35 [文献标识码] A

0 引言

随着计算机技术迅猛发展, 数值模拟已经成为研究流体力学中各种流动现象的重要手段, 它已和实验研究、理论分析一起构成研究流体运动规律的三大基本方法。自五六十年代以来, 人们就在不断的探索快速、准确和有效的计算方法和差分格式, 力求使这些算法精确可靠、避免非物理解及人为参数影响、简单易操作以及能适用于各种高低速流动。目前在计算流体力学中比较流行的高精度、高分辨率的算法有 TVD, ENO, WENO, NND 等, 它们在解间断处有很高的分辨率, 能有效地控制振荡; 另一类以紧致格式为代表的算法, 利用导数项有效地减少使用的节点数。近年来, 又有一些新型差分算法出现, 有代表性的算法有时空守恒的 CE/SE^[1] 方法、立方插值的 CIP^[2] 方法以及由玻尔兹曼方程的思想出发的 BGK^[3] 格式。这些算法各有其自身特点, 能很好地模拟复杂流动, 有力地推动了计算流体力学的发展。

摄动有限差分方法^[4] (PFD) 与 CE/SE, CIP 和 BGK 等算法一样, 是近年来提出的与过去流行的算法在思路上和构造形式上完全不同的一种新算法。PFD 方法的基本思想是利用数学中的摄动概念构造差分格式, 它扩充了差分离散的概念, 既离散微商项, 又离散非微商项 (包括微商系数和源项)。对微商项直接采用差分近似离散 (对流项一般采用迎风差分, 扩散项采用二阶中心差分), 对非微商项 (包括微商项的系数) 摄动展开成空间步长的幂级数, 并得到摄动展开后的修正方程, 通过消除它的截断误差项的系数来获得所需的摄动有限差分格式。在摄动展开后, 如果舍去摄动后的修正方程三次以后的幂 (含三次) 则得到二阶精度的 PFD 差分格式, 舍去摄动后修正微分方程四次以后幂则可得到三阶的 PFD 差分格式, 依次类推, 原则上可得到任意高阶的 PFD 差分格式。

摄动有限体积^[5,6] (PFV) 算法是由摄动有限差分算法发展而来的一种高精度算法。PFV 方法的基本思想和 PFD 方法一样, 把质量通量和源项以网格间距为小参数摄动展开成幂级数, 不同的是幂级数的系数是利用空间分裂技术, 并利用对流通量和扩散通量之间的关系得到 PFV 格式。

PFV 算法既不同于多节点的其它高精度差分算法, 也不同于三节点紧致格式算法。它节点少、精度高 (一般只需要三个节点, 而能得到很高精度)、形式简洁、计算效率高。

预测化工系统中液滴的喷发或坠落过程对各种化工过程应用都非常重要, 如液液萃取, 气体吸附等。要准确预测系统中液滴群的运动和传质过程, 最基本的出发点就是对单个液滴的流体力学行为的预测。同时, 对单个液滴流体力学行为的准确把握为我们提供了一个理解更为复杂的实际多相流系统的基础。液滴运动规律的研究越来越受到国内外的关注, 虽然理论方法和实验手段都取得了一定的进展, 但仍有其本身的局限

[收稿日期] 2008-07-16; [修回日期] 2008-12-10

[基金项目] 国家自然科学基金 (20490206) 资助项目

[作者简介] 董贺飞 (1981-), 男, 河北昌黎, 博士生, 从事计算流体力学方面的研究, 北京市海淀区北四环西路 15 号中科院力学所 LHD 100190。

性. 随着 CFD 的发展, 数值模拟成为探索液滴运动规律的重要手段. Rallison 和 Acrivos^[7] 首先将边界积分方法应用于液滴变形数值模拟, 该方法的主要优点是使用势函数将二维问题降为一维问题, 精度比较高, 但由于其数值稳定性较差, 只能用来模拟变形不大的液滴运动. 由 Hirt 和 Nichols^[8] 提出的 VOF 方法被广泛用于两相流的数值模拟中, 流体体积分数的引入大大简化了捕捉界面的计算, 然而由 VOF 只能得到控制单元中的流体体积分数, 要得到物质界面还需要进行界面重构, 不同的重构方法会有不同的效果. Osher 和 Sethian^[9] 提出的水平集 (Level set) 方法是目前处理、追踪物质界面效果较好的一种方法, 通过引入水平集函数的概念自动捕捉界面的拓扑变化, 在处理复杂结构变化方面优势明显.

本文采用 PFV 算法, 并结合 Level Set 方法, 对化工系统中液液两相系统问题进行数值模拟, 精确地捕捉两相流动中的界面信息. 并以典型的液滴的坠落过程为例, 得到了液滴的坠落过程中界面变形和分裂的全过程. 数值模拟和已发表论文结果十分吻合, 证实了采用摄动有限体积新算法数值模拟液液两相系统中液滴的坠落过程是成功的, 为两相流动的数值模拟提供了一种新途径.

1 摄动有限体积算法

PFV 算法是由 PFD 算法发展而来的一种全新的高精度算法. 通用变量的不可压流体力学方程组积分形式为

$$\oint_S \phi_u \cdot n ds = \int_V \phi \cdot \nabla \cdot n ds + \int_V q dv, \tag{1}$$

其中 ϕ 为输运变量, 它们是流动速度分量、质量、温度和能量等, ρ 为密度, u 为速度矢量, D 为扩散系数, q 为源项, S 和 V 分别为控制单元表面积和体积.

图 1 为摄动有限体积算法控制单元示意图, P 和 P_j 为控制单元的中心节点和某一表面, J 为控制单元表面数目, 其中 $j = 1, 2, \dots, J$. 对二维问题, 当 $J = 3$ 和 4 时, 分别表示控制单元为三角形单元和四边形单元.

假定控制单元中心节点 P 与相邻控制单元中心节点 P_j 的连线近似垂直于 ff 面, 并记 m_j 为通过 ff 面的质量通量. ϕ_p 表示 ϕ 在控制单元中心 P 点的值, ϕ_{p_j} 是相邻的控制单元中心 P_j 点的值, S_j 是 ff 的面积矢量, 它的指向从 P 到 P_j , d_j 为从 P 点到 P_j 点的矢量, δ_j 为距离因子, 表示 P_j 点到 ff 面的距离与 d_j 长度的比值, 对于均匀网格, $\delta_j = 1/2$.

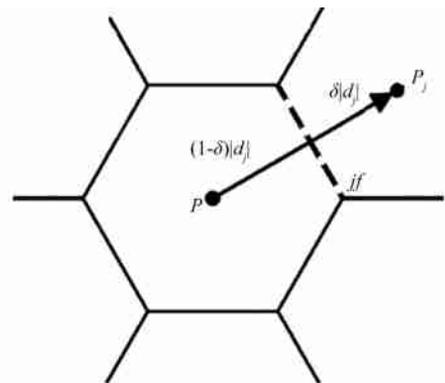


图 1 控制单元 ff 表面示意图

Fig. 1 Surface of control cell ff

为控制单元体积. 积分方程 (1) 的 $(N + 1)$ 阶迎风 PFV 格式如下:

$$\sum_{j=1}^J \frac{1}{G_j} \left\{ \left[\frac{1}{|d_j|^2} d_j \cdot S_j - \min(m_j G_j, 0) \right] \phi_p - \left[\frac{1}{|d_j|^2} d_j \cdot S_j + \max(m_j G_j, 0) \right] \phi_{p_j} \right\} + q_p = 0, \tag{2}$$

其中

$$G_j = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)!} \frac{d_j^n}{S_j^n} m_j^n [\text{sign}(m_j)]^n, \tag{3}$$

$$\text{sign}(m_j) = \begin{cases} +1, & m_j > 0, \\ -1, & m_j < 0. \end{cases} \tag{4}$$

迎风 PFV 格式无条件满足对流有界准则, 绝对稳定. 该格式具有很好的鲁棒性, 可以计算 Re 在 $10 \sim 10^4$ 之间的粘性不可压流动. 迎风 PFV 格式的另一个突出特性就是格式中不包含距离因子 (图 1), 即 P 点到 ff 面的距离与 P_j 点到 ff 面的距离相等 ($\delta_j = 1/2$) 和不相等 ($\delta_j \neq 1/2$) 都为同一个公式. 考虑到在非结构网格或者混合网格情况下, 往往不等于 $1/2$, 因此迎风 PFV 格式有很强的实用性.

2 算法验证

本文以含有奇点的顶盖驱动的方腔流动为例验证 PFV 算法. 方腔流动是不可压粘性流动的典型二维算例, 在正方形腔体上方有流体通过, 研究流体进入方腔后趋于稳定的流动. 其中左右和下边界为固壁, 上方流体的流速为 1.0. 本文求解不同 Reynolds 数下的方腔流动, 并与 Ghia^[10] 等的结果进行比较. Ghia 采用涡量 - 流函数方法结合多重网格方法计算不同 Reynolds 数的方腔流动, 给出了空腔中心线上的速度分布数据及流线图、等涡量图等数据. 该文的结果后来被广泛引用, 因此具有比较高的可信度.

本文以 6 阶迎风 PFV 格式分别计算了 Reynolds 数为 100 和 1 000 的情况, 不同 Reynolds 数稳态流场流线如图 2 和图 3 所示.

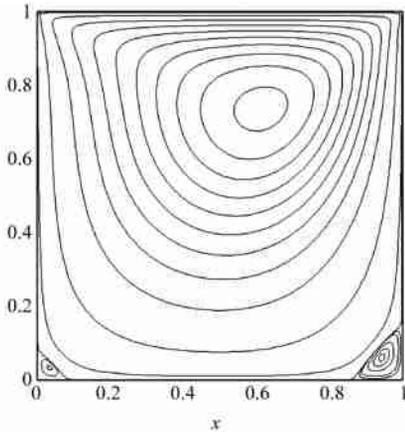


图 2 $Re = 100$ 时流线(100 ×100 网格)

Fig. 2 Streamline as $Re = 100$ (100 ×100 grid)

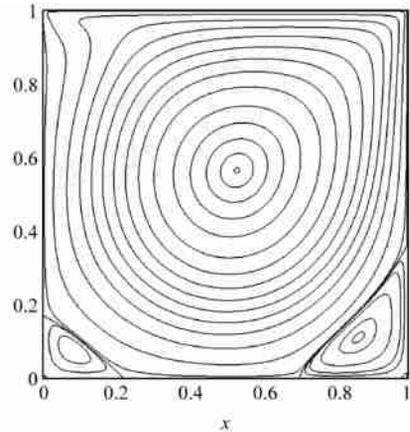


图 3 $Re = 1000$ 时流线(200 ×200 网格)

Fig. 3 Streamline as $Re = 1000$ (200 ×200 grid)

图 4 ~ 7 给出方腔垂直中心线上的水平流速分量和水平中心线上的垂流速分量的分布并与 Ghia 的结果进行比较. 从图中可以看出, 无论是 $Re = 100$ 还是 $Re = 1000$, PFV 结果都和 Ghia 的结果吻合的很好. 说明迎风 PFV 格式能够高精度模拟不可压缩粘性流动.

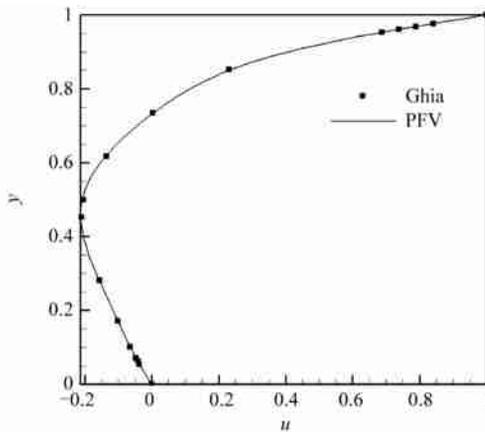


图 4 垂直中心线上的水平速度分布 ($Re = 100$)

Fig. 4 Horizontal velocity on vertical center line ($Re = 100$)

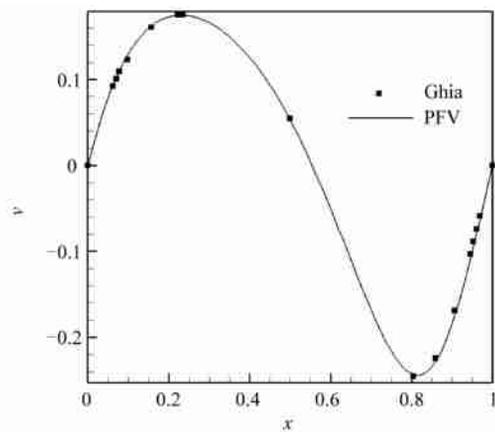


图 5 水平中心线上的垂直速度分布 ($Re = 100$)

Fig. 5 Vertical velocity on horizontal center line ($Re = 100$)

3 物理问题和控制方程

考虑浸在溶液中的单个液滴, 液滴与溶液互不相溶, 如图 8 所示. 液滴初始静止, 由于液滴密度大于外部溶液密度, 液滴将由静止开始坠落.

假设圆形液滴初始半径为 r , 方腔宽度为 $9r$ 、高为 $18r$. 重力加速度为 g , 作用在 y 轴负方向. 溶液的密度和粘性系数分别为 ρ_1 和 μ_1 , 液滴的密度和粘性系数分别为 ρ_2 和 μ_2 , 界面上表面张力系数为 σ . 方腔左、右

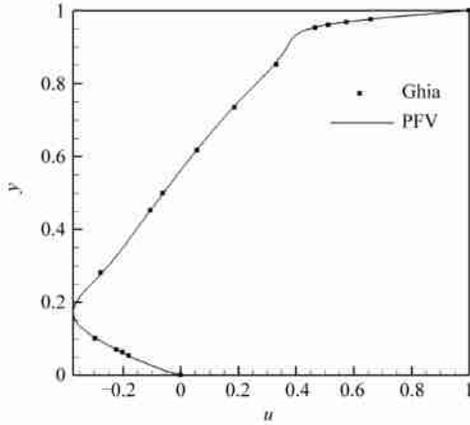


图 6 垂直中心线上的水平速度分布 ($Re = 1\ 000$)

Fig. 6 Horizontal velocity on vertical center line ($Re = 1\ 000$)

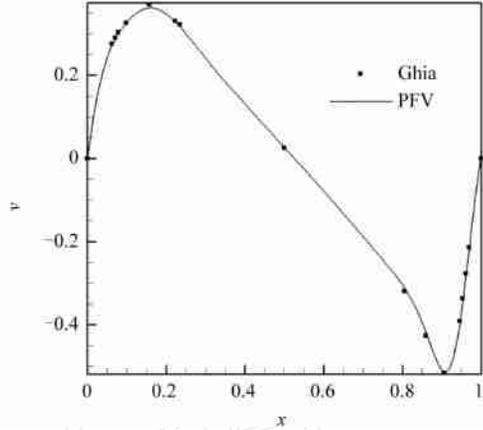


图 7 水平中心线上的垂直速度分布 ($Re = 1\ 000$)

Fig. 7 Vertical velocity on horizontal center line ($Re = 1\ 000$)

及底部是固体壁面,顶部开口,不考虑与固壁接触的表面张力。

液滴在重力作用下从静止开始坠落. 本文采用连续表面力模型^[11] (CSF) 结合 Level Set 方法计算表面张力. 液液不相溶的两相流动的无量纲、非定常、不可压流体力学方程组分别表示如下:

连续性方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

动量方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_i v_i)}{\partial y} = - \frac{1}{Re} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \right] - \frac{k(\cdot)(\cdot)}{We} \frac{\partial}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i v_i)}{\partial x} + \frac{\partial(v_i^2)}{\partial y} = - \frac{1}{Re} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{Re} \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} \right] - \frac{g}{Fr} - \frac{k(\cdot)(\cdot)}{We} \frac{\partial}{\partial y}, \tag{7}$$

其中 $i = 1, 2$ 分别代表溶液和液滴, u_i, v_i, ρ_i, μ_i 为溶液和液滴的速度、密度和粘度. 若取 $U = (gr)^{1/2}, L = r$ 和溶液的 ρ_1, μ_1 作为无量纲特征参数, 则系统的无量纲参数分别为 $Re = \frac{1}{\mu_1} (gr)^{1/2} r^{3/2}, Fr = 1, We = \frac{1}{\mu_1} gr^2, \rho = \frac{\rho_i}{\rho_1}$,

$\mu = \frac{\mu}{\mu_1}$. 方程 (6), (7) 中的最后一项 $\frac{k(\cdot)(\cdot)}{We} \frac{\partial}{\partial x}$ 和

$\frac{k(\cdot)(\cdot)}{We} \frac{\partial}{\partial y}$ 表示液液界面张力^[11], 其中的 δ 为处

理界面的 Level Set 函数, $k = \frac{\sigma}{r} \left[\frac{1}{| \nabla \phi |} \right]$ 为界面曲率,

$\delta(\cdot)$ 为 delta 函数, $\delta(\cdot)$ 只在界面处存在, 离开界面后 $\delta(\cdot) = 0$.

本文引入 Level Set 函数 ϕ 来追踪界面, 液滴和溶液界面上 $\phi = 0$, 液滴内部 $\phi < 0$, 液滴外部 $\phi > 0$.

追踪界面变化过程, 函数 ϕ 需满足方程

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0. \tag{8}$$

为了方便, 引入表面张力 CSF 模型, 为避免在界面处的数值振荡, 对界面附近的密度和粘性系数进行适当光滑. 定义 Heaviside 函数



图 8 液滴初始状态

Fig. 8 Initial position of a drop

$$H(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \eta < -\delta, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta + \delta}{2\delta} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi(\eta + \delta)}{2\delta}\right) \right), & \text{if } |\eta| < \delta, \\ 1, & \text{if } \eta > \delta, \end{cases} \quad (9)$$

其中 δ 为光滑带宽度,一般取 $\delta = 1 - 1.5 d$.

由此,密度和粘性系数光滑为

$$\bar{\rho}(\eta) = \rho_1 + (1 - \rho_1) H(\eta), \quad (10)$$

$$\bar{\mu}(\eta) = \mu_1 + (1 - \mu_1) H(\eta), \quad (11)$$

其中 $\rho_1 = \rho_2 / \rho_1$, $\mu_1 = \mu_2 / \mu_1$ 为液滴与溶液的密度比和粘性系数比.

Delta 函数可由 Heaviside 函数求得,得出,

$$\delta(\eta) = \frac{dH(\eta)}{d\eta} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos(\frac{\pi(\eta + \delta)}{2\delta})), & \text{if } |\eta| < \delta, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (12)$$

4 计算结果和分析

4.1 中心单液滴坠落过程

首先计算了液滴初始位置为 (4.5, 16.5) 的中心单液滴坠落过程. 液滴与溶液的参数为 $\rho_1 = 1.125$, $\mu_1 = 50$, $Re = 100$, $We = 50$. 计算在 90×180 均匀网格中完成.

液滴坠落过程中不同时刻的形状变化如图 9(a) 所示. 液滴从静止开始坠落,随着时间的增加,液滴变形越来越大,在接近底部时甚至发生断裂. 计算结果清晰地看到,随着液滴的下落,液滴逐渐被压扁. 当液滴底部到达 $y = 5$ 左右时,液滴左右两端开始向下弯折. 图 9(b) 为液滴坠落过程中接近底部时流场速度矢量图,可以清晰的看见液滴下降过程中激起的涡. 图 10 为文 [12] 给出的计算结果. 比较图 9 和图 10 可以看出,两者十分吻合,而且无论是界面追踪,还是数值结果,显示出本文算法有很高的计算精度,计算的细节更清晰. 如在相同网格(文 [12] 为 97×183) 情况下,文 [12] 的液滴在接近底部时液滴中部细到一定程度就立即发生了断裂,这种断裂势必造成质量损失和求解精度下降,而采用本文算法计算时,虽然到达该位置时液滴的中部连接非常细,但并没有立即断裂,继续下降一段后才断裂开来,说明本文算法的计算精度是很高的.

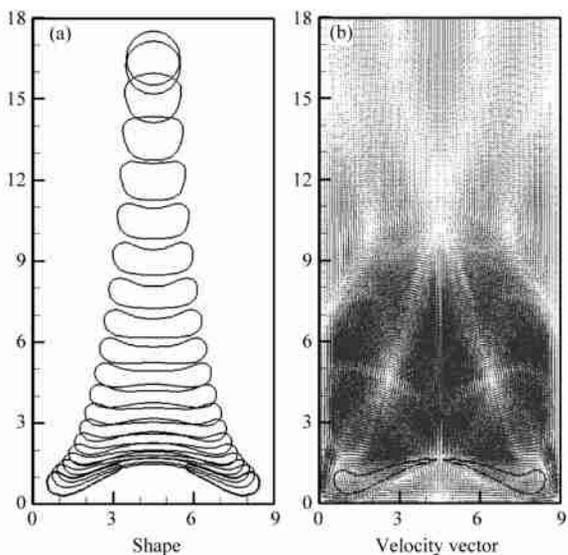


图 9 初始位置在 (4.5, 16.5) 的中心单液滴坠落过程
Fig. 9 A falling droplet in the center region with initial position (4.5, 16.5)

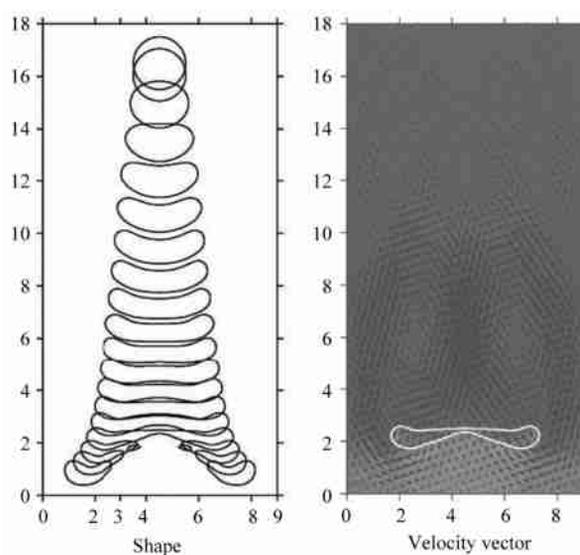


图 10 文 [12] 的计算结果
Fig. 10 Numerical result in Ref. [12]

4.2 表面张力对液滴的影响

韦伯数 ($We = \rho_1 g r^2 / \sigma$) 是表征惯性力与表面张力比值的无量纲参数, 直接体现了表面张力的相对大小. 为了说明韦伯数对液滴坠落过程影响, 本文计算了不同韦伯数时的液滴变形情况. 液滴初始位置仍为 (4.5, 16.5), $\rho = 1.125$, $\mu = 50$, $Re = 100$ 保持不变, 韦伯数分别为 $We = 200$ 和 $We = 20$.

液滴坠落过程中不同时刻的形状变化如图 11 所示. 可以看出, 韦伯数对液滴变形的影响很明显. 当 $We = 200$ 时, 液滴首先被压扁, 在坠落到 $y = 9$ 以下时, 液滴中部越来越细, 已被明显“拉长”, 坠落到 $y = 6$ 以下时, 液滴两端开始向下弯折并在大约 $y = 5$ 的地方发生断裂. 当 $We = 20$ 时, 液滴变形较小, 当坠落到大约 $y = 7$ 时, 液滴被压扁, 以后形状基本保持不变坠落于底部. 这也说明了表面张力越大液滴越容易保持形状稳定, 表面张力越小, 液滴形状越难保持, 越容易随着流动变形.

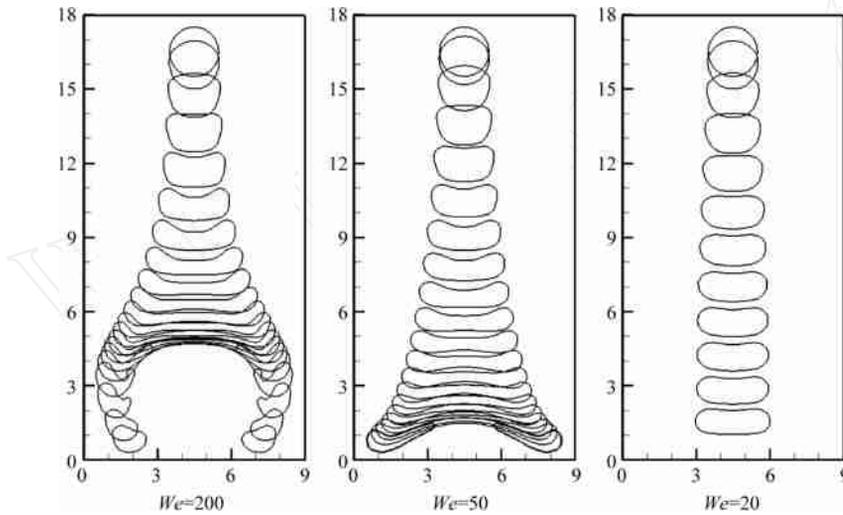


图 11 不同 We 条件下中心单液滴坠落过程中的变形

Fig. 11 Shapes of a falling droplet in center region with different We

4.3 双液滴坠落过程

首先计算对称双液滴同时坠落的情况, 液滴与溶液的参数为 $\rho = 1.125$, $\mu = 50$, $Re = 100$, $We = 50$. 两液滴初始位置为 (1.5, 16.5) 和 (7.5, 16.5).

液滴坠落过程中不同时刻的形状变化如图 12(a) 所示, 开始坠落时, 液滴在壁面阻力的作用下被推向中心, 相互靠近; 而液滴之间的相互作用又使两液滴相互分离. 于是液滴在壁面和滴间交替主导作用之下摆动坠落. 图 12(b) 为对称双液滴坠落过程中接近底部时流场中的流线图, 可以发现在坠落过程中激起的 5 个涡对.

双液滴对称分布只是一种特例, 大部分时候液滴会呈非对称分布, 因此本文改变右边液滴的位置, 重新计算了它们坠落的过程.

图 13(a) 为液滴初始位置分别为 (1.5, 16.5) 和 (7.5, 15.5) 的双液滴坠落过程; 图 13(b) 为液滴初始位置分别为 (1.5, 16.5) 和 (6.5, 16.5) 的双液滴坠落过程. 与对称双液滴坠落相比, 图 13(a) 中由于液滴水平位置 (x 坐标) 没有发生变化, 液滴仍将受到与对称液滴坠落类似的壁面和滴间作用力交替主导作用, 液滴摆动坠落, 同时, 由于右边液滴垂直位置 (y 坐标) 发生

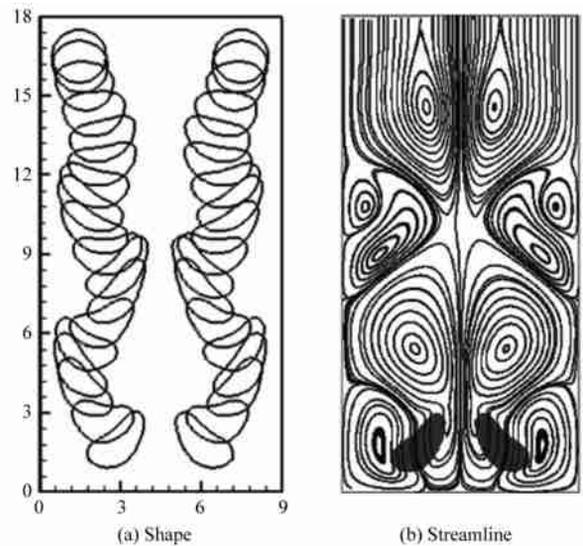


图 12 对称双液滴坠落过程

Fig. 12 Two symmetrical falling droplets

变化, 坠落过程不再对称, 由于双滴之间的相互作用, 下面的液滴会加速上面的液滴坠落, 上面的液滴则会减缓下面液滴的坠落; 图 13(b) 由于右边液滴的水平位置 (x 坐标) 向中心偏移, 作用在该液滴上的壁面作用力相对下降, 导致右边液滴的摆动振幅明显减小, 左边液滴位置不变, 仍保持摆动状态. 图 14 给出了两种情况下液滴坠落到接近底部时的流线图, 此时激起的涡已显得杂乱无章.

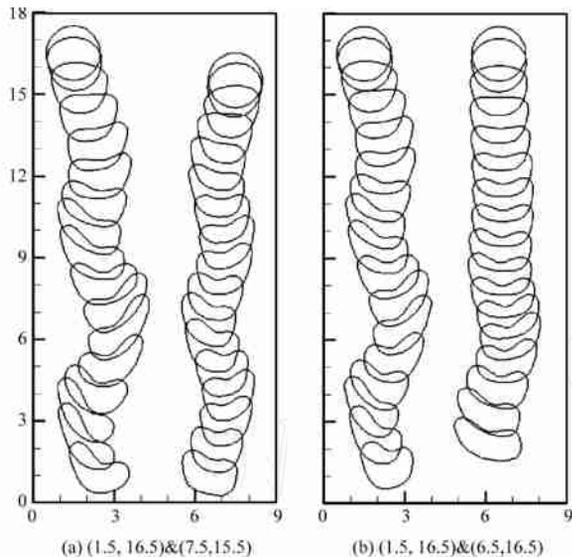


图 13 非对称双液滴坠落过程

Fig. 13 Two non-symmetrical falling droplets

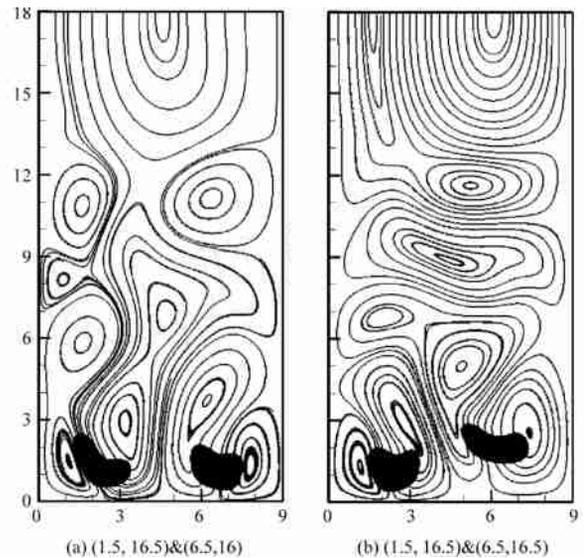


图 14 非对称双液滴坠落过程中的流线

Fig. 14 Streamlines of two non-symmetrical falling droplets

5 结论

本文采用了一种全新的摄动有限体积算法, 结合 Level Set 技术对化工系统的液液两相系统中液滴的坠落过程进行数值模拟, 精确地捕捉到了液滴的坠落过程中界面的变形和断裂过程. 数值结果和已发表论文的计算结果十分吻合, 显示出本文的算法有很高的计算精度, 计算的细节更清晰. 证实了采用摄动有限体积新算法数值模拟液液两相系统中液滴的坠落过程是成功的, 为两相流动的数值模拟提供了新的途径. 本文对不同参数对坠落过程的影响以及双液滴坠落过程也进行了计算和分析, 计算结果对化工系统物质传输过程有一定的指导意义.

[参 考 文 献]

- [1] Chang Sinchung. The method of space-time conservation element and solution element—a new approach for solving the Navier-Stokes and Euler equations[J]. J Comput Phys, 1995, **119**: 295 - 324.
- [2] Yabe T, Xiao F, Utsumi T. The constrained interpolation profile method for multiphase analysis[J]. J Comput Phys, 2001, **169**(2): 556 - 593.
- [3] Xu K, Martinelli L, Jameson A. Gas-kinetic finite volume methods, flux-vector splitting and artificial diffusion[J]. J Comput Phys, 1995, **120**: 48 - 65.
- [4] Gao Zhi. Advances in perturbation finite difference (PFD) method[J]. Advances In Mechanics, 2000, **30**(2): 200 - 215.
- [5] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积 (PFV) 方法及讨论[C]//第十一届全国计算流体力学会议论文集, 洛阳, 2002: 29 - 35.
- [6] Gao Zhi, Yang Guwei. Perturbation finite volume method for convective-diffusion integral equation[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, **20**(6): 580 - 590.
- [7] Rallison J M, Acrivos A. A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow[J]. J Fluid Mech, 1978, **89**: 191 - 200.
- [8] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. J Comput Phys, 1981, **39**: 201 - 225.

- [9] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. *J Comput Phys*, 1988, **79**: 12 - 49.
- [10] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method[J]. *J Comput Phys*, 1982, **48**(3) : 387 - 411.
- [11] Brackbill J U, Kothe D B, Zemach C. A continuum method for modeling surface tension[J]. *J Comput Phys*, 1992, **100**(2) : 335 - 354.
- [12] Ni Mingjiu, Komori S, Morley N B. Direct simulation of falling droplet in a closed channel[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, **49**: 366 - 376.

Perturbation Finite Volume Method and Application in Two-phase Flows

DONG Hefei, ZHANG Deliang, YANG Guowei
(LHD, Institute of Mechanics, Beijing 100190, China)

Abstract: Droplets in liquid-liquid two-phase flow are simulated by a perturbation finite volume (PFV) method and Level Set technique. Numerical results show that the PFV scheme has advantages in fewer nodes, high accuracy and efficiency. It facilitates programming. PFV scheme successfully simulates liquid-liquid two-phase flows.

Key words: perturbation finite volume; two-phase flow; falling droplet; numerical algorithm