

# 中等 Reynolds 数平板绕流的动理论分析\*

樊菁<sup>†</sup> 吴晨曦 孙泉华 蒋建政

中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100190

**摘 要** 郭永怀先生 1953 年给出的中等 Reynolds 数下、不可压缩流体有限长平板绕流的解析解是边界层理论中的经典工作. 许多研究者对平板绕流阻力系数的郭永怀公式以及后续工作进行了评估, 评估的依据是 Janour<sup>[1]</sup> Schaaf 和 Sherman 的实验数据. 本文的动理论分析和计算表明: Schaaf 和 Sherman 在低亚声速条件下 ( $0.16 < M < 0.21$ ) 获得的实验数据, 当 Reynolds 数 ( $Re$ ) 介于 1 和 10 之间时, 由于稀薄气体效应显著 (所对应的 Knudsen 数约在 0.03 和 0.3 之间), 不宜作为不可压缩理论解的依据, 而其它满足不可压缩假设的实验数据都支持郭永怀解; 计及稀薄气体效应时, 低速或亚声速情况下平板绕流的阻力系数  $C_D = C_{D,c} \times C_{D,FM} / (C_{D,c} + C_{D,FM})$ , 其中  $C_{D,c}$  和  $C_{D,FM}$  分别为连续介质和自由分子流极限情况下的理论解; 平板绕流速度分布的郭永怀解, 与基于动理论的信息保存方法 (IP) 的数值解定性相符, 差别表现在稀薄气体效应显著的前缘; 与速度分布的 Blasius 解相比, 当  $Re < 100$  时, 郭永怀修正变得重要.

**关键词** 平板绕流, 郭永怀解, 稀薄气体效应, 动理论分析, IP 方法

## 1 引言

平板绕流是流体力学的基本问题, 郭永怀先生对这个问题进行了深入研究<sup>[1]</sup>. 1953~1957 年间, 他发表 7 篇文章, 研究了不同速度气流与平板的相互作用<sup>[2~8]</sup>.

这些工作解决了两个很重要但数学上很难的问题, 一是经典的 Blasius 解在平板前缘的奇性<sup>[2]</sup>, 另一个是高速可压缩气体平板绕流中的激波与边界层的相互作用<sup>[3~6]</sup> 以及高温气体效应<sup>[7,8]</sup>.

郭先生的解法是, 按照边界层理论, 把流场分为两个区域, 即远离平板的势流区和平板附近的边界层区, 再运用 Poincare 和 Lighthill 的小参数方法, 将两个区的解对接起来. 这种解法已成经典<sup>[9]</sup>, 钱学森先生称之为 PLK 方法<sup>[10]</sup>. 本文以不可压缩平板绕流为例, 回顾郭先生的工作.

## 2 平板绕流的阻力系数

郭先生 1953 年的工作<sup>[2]</sup>, 给出中等  $Re$  数有

限长平板的阻力系数

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} + \frac{\alpha}{Re} \quad (1)$$

其中来流  $Re = U_\infty L / \nu$ ,  $L$  为平板长度, 右端第 1 项与半无限长平板阻力系数的 Blasius 解相同, 修正项  $\alpha/Re$  ( $\alpha = 4.12$ ) 反映了平板前缘和后缘的贡献.

$Re$  数 1~100, 经典的 Oseen 理论和 Blasius 解都有局限, 客观上依赖高阶边界层理论. 平板绕流作为流体力学的基本问题, 阻力系数是实际最关心的数据,  $Re = 100$  时式 (1) 中的修正项就很重要, 随着  $Re$  数的降低,  $\alpha$  取值的影响更加显著.

正因为此, 式 (1) 的后续工作<sup>[11~17]</sup> 和述评不断<sup>[18~21]</sup>. Sherman<sup>[18]</sup> 认为  $\alpha$  值应为 Imai<sup>[11]</sup> 所得的前缘贡献 2.3 和 Van Dyke<sup>[12,13]</sup> 所得的后缘贡献 3 之和, 即  $\alpha = 5.3$ . White<sup>[20]</sup> 建议  $\alpha$  取郭永怀值和 Imai 值的中间值 3.2. Schlichting<sup>[21]</sup> 等在《边界层理论》中, 建议式 (1) 右端的修正项采用 Messiter<sup>[15]</sup> 所给的表达式  $2.67Re^{-7/8}$ .

收稿日期: 2009-04-09, 修回日期: 2009-04-17

\* 国家自然科学基金 (90205024, 10425211, 10621202) 资助项目

<sup>†</sup> E-mail: jfan@imech.ac.cn

评估上述理论预测的主要依据是 Janour<sup>[22]</sup> 低速实验数据与 Schaaf 和 Sherman<sup>[23]</sup> 低亚声速实验数据. 图 1 比较了不同的理论预测与 Janour 实验数据、Schaaf 和 Sherman 的低亚声速实验数据.  $10 < Re < 100$  时, 郭永怀解<sup>[2]</sup> 和 Messiter 的表达式与实验数据符合得最好;  $1 < Re < 10$  时, White 建议的  $\alpha = 3.2$  和 Messiter 的表达式与仅有的 Schaaf 和 Sherman 少量实验数据符合得比较好.

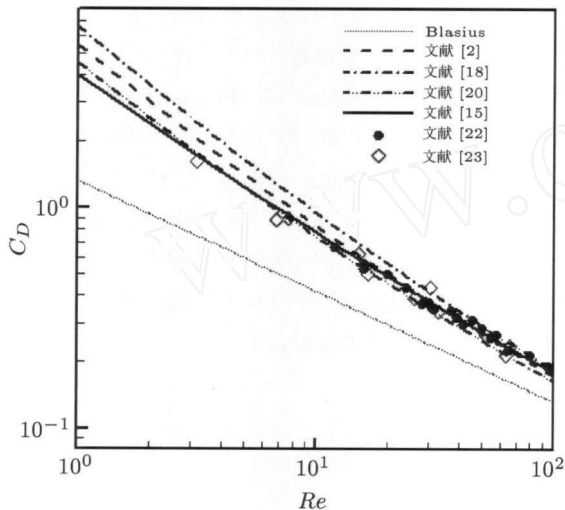


图 1 不可压缩平板绕流阻力系数比较

Janour 的实验<sup>[22]</sup>: Mach 数  $M \cong 0$ ,  $Re$  数介于  $10 \sim 10^3$ ; Schaaf 和 Sherman 的实验<sup>[23]</sup>:  $3 \leq Re \leq 500$ , 包括亚声速 ( $0.46 < M < 0.72$ ) 和低亚声速 ( $0.16 < M < 0.21$ ) 两组. 一般认为,  $M < 0.3$  的气体流动是近似不可压缩的, 但是在低  $Re$  数情况下, 因为 Knudsen 数

$$Kn = 1.26\sqrt{\gamma}M/Re \cong 1.5M/Re \quad (2)$$

$M = 0.2$ ,  $1 < Re < 10$  时, 由式 (2) 容易算出  $0.03 < Kn < 0.3$ , 这时稀薄气体效应显著, 可压缩性增强. 因此, Schaaf 和 Sherman<sup>[23]</sup> 的  $M \cong 0.2$ ,  $Re$  数  $1 \sim 10$  的实验数据, 并不适合作为评估不可压缩平板绕流阻力系数的标准, 文献 [20] 以此为依据来校核式 (1) 当然也是不妥的.

$M = 0.2$ ,  $10 < Re < 100$  时,  $0.003 < Kn < 0.03$ , 稀薄气体效应和可压缩性可以忽略, 这时 Schaaf 和 Sherman 的实验数据可以用来评估不可压缩平板绕流阻力系数, 它们与 Janour 的实验数据, 都支持郭永怀解 (1).

事实上, 对于稀薄气体, 阻力系数不仅与  $Re$

数有关, 还与  $M$  数有关. 对于高超声速驻点热流, 文献 [24] 将连续介质和自由分子流的理论解外推到过流领域, 获得了与实验和 DSMC 方法数值解相符的结果. 这里采用类似的形式估计适用于全部流动领域的平板阻力系数

$$\frac{C_D}{C_{D,FM}} = 1 - \frac{1}{1 + C_{D,c}/C_{D,FM}}$$

或

$$C_D = \frac{C_{D,c} \times C_{D,FM}}{C_{D,c} + C_{D,FM}} \quad (3)$$

当连续介质的阻力公式采用 Sherman<sup>[18]</sup> 建议的形式时, 式 (3) 与 Schaaf 和 Sherman 不同  $M$  数 ( $0.16 < M < 0.21$  和  $0.46 < M < 0.72$ ) 的实验数据<sup>[23]</sup>, 以及采用 DSMC 方法和 IP 方法的分子统计模拟结果 ( $0.2 < M < 0.8$ )<sup>[25]</sup> 相符之好, 令人惊讶 (图 2). Sherman 当年的综述文章<sup>[18]</sup>, 重点考虑的是稀薄气体效应, 这可能就是他为什么建议  $\alpha = 5.3$  的原因.

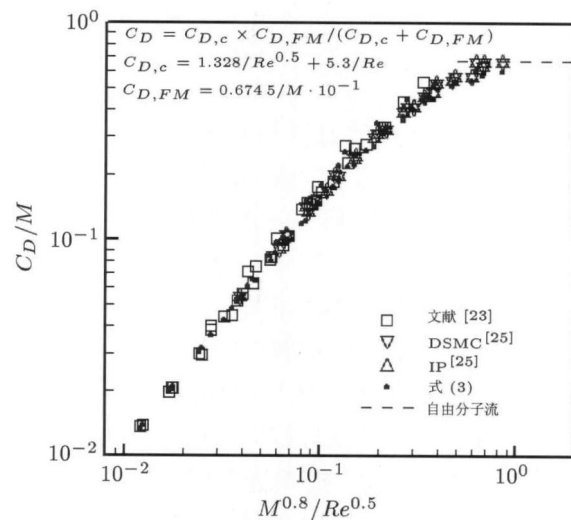


图 2 稀薄气体平板绕流阻力系数比较

### 3 平板绕流的速度分布

不可压缩流体有限平板绕流的速度分布的郭永怀解<sup>[2]</sup>,  $x$  和  $y$  方向分别为

$$\frac{U}{U_\infty} = f'(\tilde{\eta}) + \frac{g_2'(\tilde{\eta}) [\tilde{\eta} f'(\tilde{\eta}) - f(\tilde{\eta})]}{2Re\tilde{x} - \tilde{\eta} g_2'(\tilde{\eta})} \quad (4)$$

$$\frac{V}{U_\infty} = \frac{\sqrt{Re\tilde{x}} [\tilde{\eta} f'(\tilde{\eta}) - f(\tilde{\eta})]}{2Re\tilde{x} - \tilde{\eta} g_2'(\tilde{\eta})} \quad (5)$$

其中  $\tilde{x} = [x - g_2(\tilde{\eta})/Re]/L$ ,  $\tilde{y} = \sqrt{Rey}/L$ ,  $\tilde{\eta} = \tilde{y}/\sqrt{\tilde{x}}$

$$g_2'(\tilde{\eta}) \cong \begin{cases} -\frac{1}{2}\tilde{\eta} + \frac{A}{14 \times 4!}\tilde{\eta}^4 - \frac{7A^2}{30 \times 7!}\tilde{\eta}^7 \\ -\frac{2\tilde{\eta} - B}{4} - \frac{t \exp(-t^2/2)}{\sqrt{2}}, \tilde{\eta} \leq 3 \\ \left[ C_2 + C_3 \int_3^t \exp(t^2/4) dt \right] + \\ \sqrt{2}C_3 \exp(-t^2/4), \tilde{\eta} > 3 \end{cases} \quad (6)$$

这里  $t = (\tilde{\eta} - B)/\sqrt{2}$ ,  $A = 0.332$ ,  $B = 1.73$ ,  $C_2 = 1.264$ ,  $C_3 = 0.431$ .

$f(\tilde{\eta})$  与 Blasius 解满足相同的 3 阶非线性常微分方程和边界条件, 因此  $f(\tilde{\eta})$  及其导数可以直接采用 Howarth 的数值积分解, 详见文献 [26] 中的表 8.1.

如图 3 所示, 近似地有  $g_2'(\tilde{\eta}) \approx -0.5\tilde{\eta}$ , 代入式 (4) 和 (5), 化简整理得到

$$U/U_\infty = \frac{f'(\tilde{\eta}) - \tilde{\eta}[\tilde{\eta}f'(\tilde{\eta}) - f(\tilde{\eta})]}{(4Re_x + 2\tilde{\eta}^2)} \quad (7)$$

$$V/U_\infty = \frac{\sqrt{4Re_x + \tilde{\eta}^2}[\tilde{\eta}f'(\tilde{\eta}) - f(\tilde{\eta})]}{(4Re_x + 2\tilde{\eta}^2)} \quad (8)$$

其中  $\tilde{\eta} = \sqrt{Rey}/\sqrt{Lx^*}$ ,  $x^* = (x+r)/2$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $Re_x = U_\infty x/\nu$ .

图 4 比较了  $Re = 100$  时, 郭永怀解 (7) 和 (8) 与 IP 方法数值解在平板前缘和后缘的速度剖面

面. 两者的变化趋势大致相似, 主要差别表现在: (1) 前缘表面附近的  $x$  方向 (流向) 速度分布; (2) 后缘表面附近的  $y$  方向速度分布. 前者是因为 IP 方法考虑了气体流动的可压缩性和稀薄气体效应, 在平板表面有速度滑移, 由于前缘的局部  $Kn$  数大, 速度滑移现象尤为显著. 在后缘表面附近, IP 方法所得的  $y$  方向速度冲向平板, 具有典型的尾流特征, 郭永怀解未能反映这种特点, 这可能与假设的边界层外缘垂向速度分布在后缘附近的有效性有关.

图 5 将郭永怀解 (7) 和 (8) 与 Blasius 相似解进行了比较, 横坐标是熟悉的 Blasius 相似变量  $\eta = \sqrt{Re_x}y/x$ , 图 6 给出了它与  $\tilde{\eta}$  的关系. 郭永怀解与 Blasius 的解,  $Re_x = 1000$  时相符很好; 随着  $Re_x$  的减小, 两者差别增大 (例如, 边界层厚度的郭永怀解明显大于 Blasius 解),  $Re_x < 100$ , 郭永怀解对于 Blasius 解的修正变得重要.

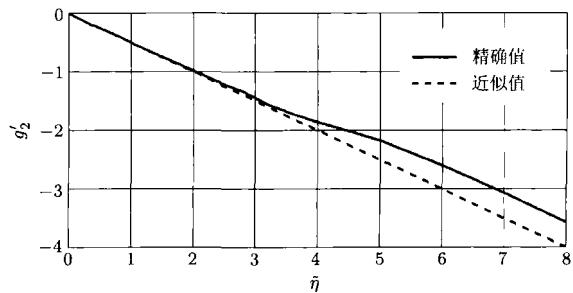


图 3  $g_2'(\tilde{\eta})$  的准确解式 (6) 与近似解  $g_2'(\tilde{\eta}) \approx -0.5\tilde{\eta}$  的比较

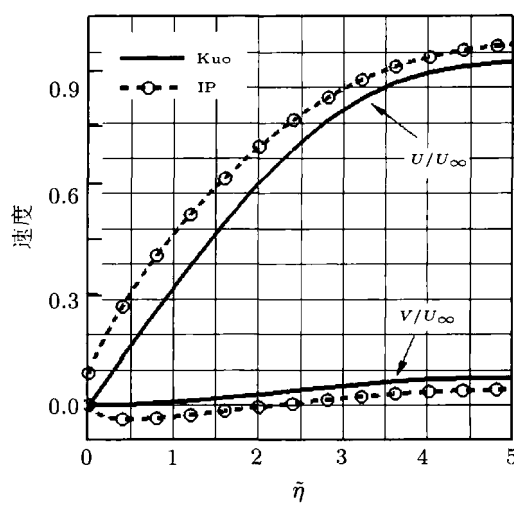
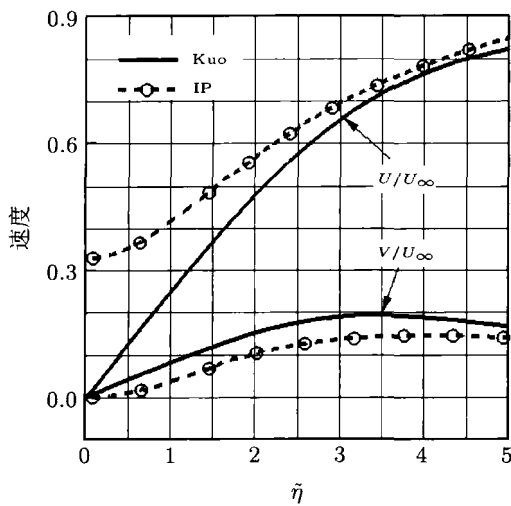


图 4  $Re = 100$  时, 郭永怀解 (7) 和 (8) 与 IP 方法数值解在平板前缘和后缘的速度剖面的比较

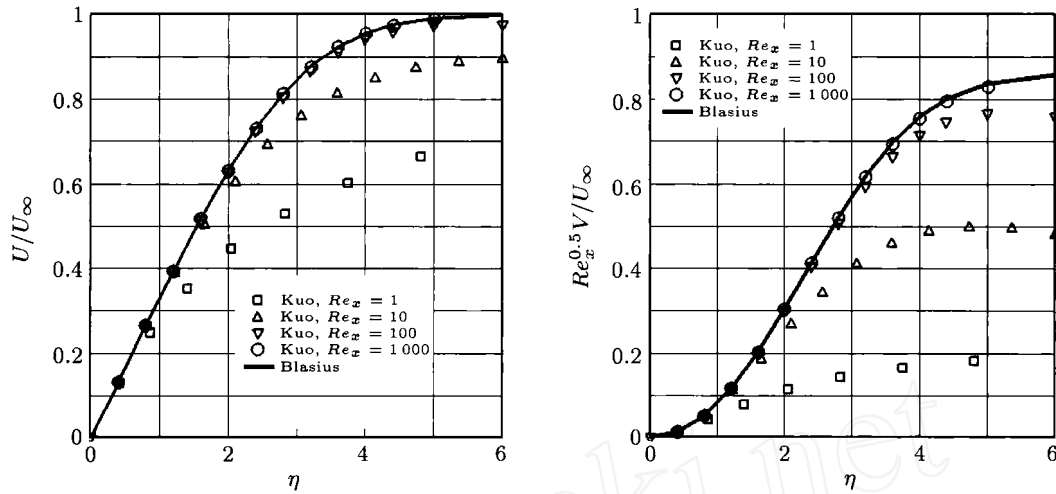


图5 不同  $Re_x$  下, 郭永怀速度分布 (7) 和 (8) 与 Blasius 相似解的比较

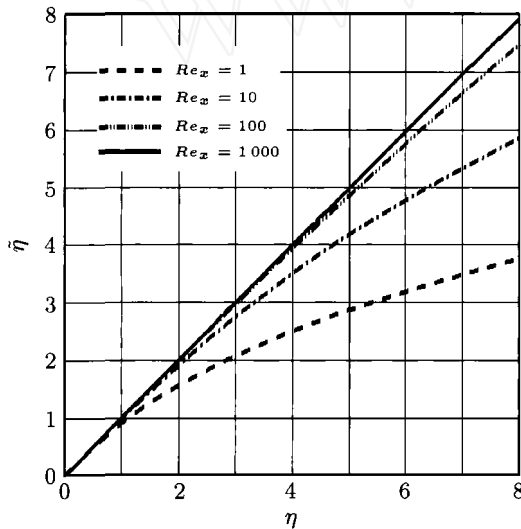


图6 郭永怀相似变量  $\tilde{\eta}$  与 Blasius 相似变量  $\eta$  之间的关系

致谢 作者与李家春先生进行了有益的讨论。

参考文献

- 1 郭永怀文集. 北京: 科学出版社, 1982
- 2 Kuo Y H. On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers. *J Math Phys*, 1953, 32: 83~101
- 3 Ritter A, Kuo Y H. Reflection of a weak shock wave from a boundary layer along a flat plate. I. Interaction of weak shock waves with laminar and turbulent boundary layers analyzed by moment-integral method. NACA-TN-2869, 1953
- 4 Kuo Y H. Reflection of a weak shock wave from a boundary layer along a flat plate. II. Interaction of oblique shock wave with laminar boundary layer analyzed by differential-equation method. NASA-TN-2869, 1953

- 5 Kuo Y H. Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds. *J Aero Sci*, 1956, 23: 125~136
- 6 Kuo Y H. Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds. *J Aero Sci*, 1956, 23: 977~978
- 7 Kuo Y H. The effects of Prandtl number on high-speed viscous flows over a flat plate. *J Aero Sci*, 1956, 23: 1058~1059
- 8 Kuo Y H. Dissociate effects in hypersonic viscous flows. *J Aero Sci*, 1957, 24: 345~350
- 9 李家春, 周显初. 数学物理中的渐近方法. 北京: 科学出版社, 1998
- 10 Tsien H S. The Poincare-Lighthill-Kuo method. *Adv Appl Mech*, 1955, 4: 281~349
- 11 Imai I. Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. *J Aero Sci*, 1956, 24: 155~156
- 12 Van Dyke M. Higher approximations in boundary layer theory. Part 1: General analysis. *J Fluid Mech*, 1962, 14: 161~177
- 13 Van Dyke M. Higher approximations in boundary layer theory. Part 1: Application to leading edges. *J Fluid Mech*, 1962, 14: 481~495
- 14 Dennis SCR, Dunwoody J. The steady flow of a viscous fluid past a flat plate. *J Fluid Mech*, 1966, 24: 577~595
- 15 Messiter A F. Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate. *AIAM J Appl Math*, 1970, 18: 241~257
- 16 Jobe C E, Burggraf O R. The numerical solution of the asymptotic equations of trailing edge flow. *Proc Roy Soc London A*, 1974, 340: 91~111
- 17 Chen H C, Patel V C. Laminar flow at the trailing edge of a flat plate. *AIAA J*, 1987, 25: 920~928
- 18 Sherman F S. Rarefied gas dynamics 3, In: Laurmann J A, ed. 1962. 228~259
- 19 Jones C W, Watson E J. Tow-dimensional boundary layers. In: Rosenhead L, ed. *Laminar Boundary Layers*. Clarendon Press, 1963
- 20 White F M. *Viscous Fluid Flow*. 2nd Edition. McGraw-Hill, 1991

- 21 Schlichting H, Gersten F S. *Boundary Layer Theory*. Springer, 2000
- 22 Janour Z. Resistance of a plate in parallel flow at low Reynolds number. NACA-TM-1316, 1953
- 23 Schaaf S A, Sherman F S. Skin friction in slip flow. *J Aero Sci*, 1954, 21: 85~90
- 24 樊菁, 蒋建政, 吴晨曦. 稀薄气体效应对高超声速驻点热流的影响. CSTAM-2008-0003, 2008
- 25 Sun Q, Boyd I D. Drag on a flat plate in low-Reynolds-number gas flows. *AIAA J*, 2004, 42: 1066~1072
- 26 周光炯, 严宗毅, 许世雄等. *流体力学* (第二版). 下册. 北京: 高等教育出版社, 2003

## KINETIC ANALYSIS OF THE FLOW PAST A FLAT PLATE AT MODERATE REYNOLDS NUMBERS\*

FAN Jing<sup>†</sup> WU Chenxi SUN Quanhua JIANG Jianzhen

Key Laboratory for High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100090, China

**Abstract** An analytical solution given by Y.H. Kuo in 1953 for the incompressible flow past a flat plate at moderate Reynolds numbers was a classical work of boundary layer theory. Many researchers, based on experimental data given respectively by Janour and Schaaf and Sherman, made an assessment of Kuo's formula and carried out follow-up studies for determining the drag coefficient around a flat plate. Kinetic analyses in the present paper show that the experimental data of Schaaf & Sherman in low subsonic situations ( $0.16 < M < 0.21$ ) is not suitable to serve as a standard to assess an incompressible theory when the Reynolds number ( $Re$ ) ranges from 1 to 10, because the corresponding Knudsen numbers under the experimental conditions are about between 0.03 and 0.3, indicating significant rarefied gas effects, while other experimental data satisfying the incompressible assumption support Kuo's formula. When rarefied gas effects are taken into account, the drag coefficient around a flat plate in low-speed or subsonic situations may be expressed as  $C_D = C_{D,c} \times C_{D,FM} / (C_{D,c} + C_{D,FM})$ , where  $C_{D,c}$  and  $C_{D,FM}$  are the theoretical solutions at continuum and free molecular limits, respectively. Kuo's solution for the velocity distribution past a flat plate is in qualitative agreement with the numerical results given by the information preservation (IP) method based on kinetic theory, with some difference occurring at the leading edge where rarefied gas effects become significant. Compared with Blasius solution to the velocity distribution, Kuo's correction becomes important when  $Re < 100$ .

**Keywords** flow past a flat plate, Kuo's solution, rarefied gas effects, kinetic analysis, IP method

后记: 郭永怀先生发展的奇异摄动理论中的变形坐标法, 即国际上公认的 PLK 方法, 不仅克服了平板前缘奇异性的困难, 给出了有限长度平板 Blasius 阻力公式的修正表达式, 而且描述了平板前缘附近的流动特性. 这项工作的目标是有重要应用背景的力学问题, 手段是新的、巧妙的数学方法, 结果对于理解气体绕流的前缘和后缘特性有普遍意义, 堪称应用力学的经典之作.

本文从动理论观点出发, 利用现代计算技术对这一问题做了进一步研究, 以纪念郭永怀先生诞辰 100 周年, 表达我们的敬意和怀念.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (90205024, 10425211, 10621202)

<sup>†</sup> E-mail: jfan@imech.ac.cn