

[文章编号] 1001-246X(2009)04-0517-10

一种含运动固壁超声速流动的 Descartes 网格算法

王 强¹, 胡湘渝², 姜宗林³

(1. 中国航天空气动力技术研究院, 北京 100074; 2. 慕尼黑工业大学 机械工程学院, 加兴 85748;
3. 中国科学院力学研究所 高温气体动力学重点实验室, 北京 100080)

[摘 要] 提出一种 Descartes 网格算法, 用于数值求解含任意复杂及运动固壁的超声速流动问题. 采用位标集函数确定和跟踪流-固界面. 引入虚网格技术处理流-固边界条件, 并沿法向和切向分别进行计算. 该算法简单、稳健, 可与高阶有限差分格式并用. 选取一组一维/二维静止或运动物体绕流算例, 验证其有效性.

[关键词] 流-固界面; Descartes 网格; 运动边界; 位标集; 激波

[中图分类号] V211.3 [文献标识码] A

0 引 言

快速网格生成是高速流动现象数值模拟的基础, 对包含复杂或运动边界的问题尤为如此. 通常有两种方法: 采用结构贴体网格和分区技术描述复杂物形, 并对运动边界情形, 只移动贴体网格, 进而经由重叠区与底层固定网格交换信息^[1]; 直接生成非结构网格, 以有限体积或有限元求解控制方程, 同步调整网格来适应运动边界^[2]. 不管怎样, 为复杂的多部件物形生成合适的网格都是件繁琐又困难的事情. 另一种选择是 Descartes 网格方法, 在底层 Descartes 网格上描绘出物形边界区域, 计算中对被边界切断的网格单元进行特殊处理. 尽管同分区法和非结构法相比, 当网格较粗时, 该方法被认为精度较低, 但它可直接生成规则网格, 易于进行自适应加密, 从而提高计算精度^[3,4].

运动边界处理是常见的难点问题之一^[5-8]. 虽然 Descartes 方法概念简单, 但其所面对的主要局限或挑战是流-固界面的处理, 常用的网格切割方法确定和跟踪流-固界面的过程十分复杂^[9]. 近些年, 位标集技术在成功用于可压缩多流体问题之后^[10], 又被引入含运动边界的流动, 成为一条隐式确定和跟踪流-固界面位置的简便途径^[11]. 为了给出计算流-固界面附近通量的边界条件, 有研究者还提出了求解被切网格单元的特殊有限体积方法. 由于界面和被切单元的形狀呈多种可能性, 使得将这些方法向高维或运动边界问题推广变得十分复杂和困难^[12]. Chung^[11]利用外推插值和无穿透流动关系式提出了一种方法, 但它似乎随时间推进不很稳定, 需根据试算和误差人为选取特定的时间步长, 也不清楚它可否用于高速乃至超声速流动. 另外, 前述这些方法未单独设置流-固界面的切向边界条件, 可能导致物体表面附近的切向速度被抹平, 形成数值边界层.

本文提出一个简单稳健的 Descartes 网格算法处理运动流-固界面. 为此, 采用一个位标集函数确定和跟踪界面, 隐式获得准确的求解单元中界面位置. 在固壁界面处, 不仅给出了法向边界条件, 还给出了切向边界条件来消除数值边界层的影响. 因该方法使用了虚网格和扩展技术, 所以可与任意高阶有限差分结合, 便于推广到多维.

1 基本原理

1.1 可压缩流动控制方程

假设流体无粘且可压缩, 满足二维 Euler 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

[收稿日期] 2008-11-13; [修回日期] 2009-01-17

[作者简介] 王强(1967-), 男, 安徽桐城, 研究员, 博士生导师, 理学博士, 从事流动稳定性理论及数值研究.

该方程组描述的是密度 ρ , 动量 (u, v) , 总能密度 $E = e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$ 守恒, e 为单位质量内能. 为封闭方程(1), 状态方程取为 $p = (\gamma - 1) e$, 用以获得理想气体压力 p , 其中比热比 γ 为常数 1.4. 若计及粘性影响, 控制方程(1)可用可压缩 Navier-Stokes 方程替换.

1.2 位标集方程

令界面 Γ 位于区域 Ω 中, 并将 Γ 与符号距离函数 $\phi(x, y)$ 关联, 即 $|\phi| = 1$, 这里 ϕ 称作位标集函数. 已知 ϕ 后, 可寻找 ϕ 的 0 位标集确定界面, 即 $\Gamma = \{x, y: \phi(x, y) = 0\}$. 此外, 界面运动等价于 ϕ 的更新. 取如下位标集方程更新所有位标集:

$$\phi_t + u \phi_x + v \phi_y = 0, \tag{2}$$

其中 u, v 分别为 x, y 方向位标集的速度分量. 利用位标集函数 ϕ , 可定义几个重要的界面概念, 如 Γ 的外部定义为 $\{x, y: \phi(x, y) > 0\}$, 内部为 $\{x, y: \phi(x, y) < 0\}$; Γ 的法向

$$N = \frac{\phi}{|\phi|};$$

曲率 κ 定义为

$$\kappa = -N \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right),$$

为保证界面的网格分辨率, 曲率需满足

$$|\kappa| \max(\Delta x, \Delta y) \ll 1,$$

这里, $\Delta x, \Delta y$ 是网格间距; 变量 q 沿 Γ 的线积分为

$$\int_{\Gamma} q(x, y) \delta(\phi) |\nabla \phi| dx dy, \tag{3}$$

这里, $\delta(\phi)$ 为一维 Dirac 函数; 变量 q 在 Ω 上的面积分为

$$\int_{\Omega} q(x, y) H(\phi) dx dy, \tag{4}$$

这里, $H(\phi)$ 为一维 Heaviside 函数, 且当 $\phi(x, y) < 0$ 时取 1, 当 $\phi(x, y) > 0$ 时取 0.

注意到 $\delta(\phi)$ 和 $H(\phi)$ 的特性可能使其不适于直接用来数值积分, 故采用一个光滑近似, 光滑后的 Dirac 函数为

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < -\frac{\epsilon}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right), & -\frac{\epsilon}{2} \leq \phi \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0, & \phi > \frac{\epsilon}{2}, \end{cases}$$

Heaviside 函数为

$$H(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < -\frac{\epsilon}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right), & -\frac{\epsilon}{2} \leq \phi \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 1, & \phi > \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

其中 ϵ 是小正数, 如网格间距. 关于其应用, 可参见文[13].

2 数值方法

2.1 确定和跟踪流 - 固界面

采用位标集函数确定和跟踪流 - 固界面, 将流体区设为界面外部, 有 $\phi > 0$; 将物体区设为界面内部, 有 $\phi < 0$. 这样, 所有 Descartes 网格节点被归为两组, 分属流体区和物体区.

位标集函数按照符号距离给出. 对于由线或圆组成的简单物形, 直接利用给定界面曲线的一个或多个距离函数即可, 然后由普通中心差分确定法向 N 和曲率 κ . 对于复杂物形, 流 - 固界面往往共边或共顶点, 难以直接找到位标集函数, 需要数值构造. 首先, 确定 Euler 节点是在物体外部 ($\phi > 0$) 还是内部 ($\phi < 0$),

这可借用许多点分类方法,如二维或三维射线相交法^[14].再找出距离该点最近的物面点,从而将最近距离取作 ϕ 的值,并令法向由该物面点指向 Euler 节点.事实上,法向总是取远离界面的方向.确定 Euler 节点处曲率的步骤为:先对物面上每个顶点的曲率进行赋值或计算,再利用前面找出的最近物面点,根据其与其相邻顶点之间的距离进行加权平均,近似定出该物面点的曲率,于是 Euler 节点处曲率可取作

$$= \phi / (1 - \phi).$$

对静止物体,确定出的位标集函数在整个计算过程中保持不变.对运动物体,可用物体的运动速度更新位标集函数来跟踪流-固界面的位置,且已有几个相应的高阶迎风算法^[15,16].因为仅需跟踪流-固界面,所以只对 0 位标集附近很窄范围内的节点求解方程(2)加以更新.为了节省计算时间,其余节点的位标集值由再初始化方法更新^[13].通常,物体的运动速度被预先给定为空间坐标 x, y 或时间 t 的函数.有时,它也可能由所谓的物体和流动之间的惯性耦合决定,如激波冲击、气动升力.因此,方程(3)和方程(4)可用来估算动力学参数.如流动压差对二维物体产生的作用力可由

$$F_{x,y} = - \int_{R^2} p_w(x,y) (\phi | \phi | N_{x,y} dx dy$$

积分算出,其中 $N_{x,y}$ 为位标集函数法向的 x, y 分量, p_w 为物体壁面压力,一般可用靠近界面的节点压力简单近似.更精确的计算壁面压力的方法是,在靠近界面的节点处设置物体的法向速度,解单侧 Riemann 问题.需要强调的是,对旋转物体,方程(2)的计算结果精度较低.本文的做法是直接计算物体边缘的位置,再在靠近流-固界面的很窄范围内重构位标集.

2.2 流-固边界条件

流-固界面将流体区和物体区分开,所以差分计算时,需特别注意差分基架被界面切断的情形.这些被切去节点上的值可由虚网格值填补.现将物体内部的节点取作虚网格,并按照流-固边界条件设定虚网格值,相应的实网格在流体中.这样,便可直接运用标准差分格式了.计算中,流-固界面是隐形的,时间步长由常规的 Courant-Friedrich-Lewy 条件获得,无需任何特别修正.

2.2.1 一维情形

设网格节点 j 和 $j+1$ 分别位于流体和物体中,节点 j 距离界面 x ($0 < x < 1$),其左侧节点具有真实值(图 1).根据运动活塞条件^[17],物体中节点上的虚网格值可由其位于流体中的反射点上的值和活塞速度 u_p 确定.即有

$$p_g = p_r, \quad \phi_g = \phi_r, \quad u_g = 2u_p - u_r.$$

这里,下标 g, r 分别指虚网格变量和反射点变量.因每个节点的位标集值表示它到流-固界面的距离,故节点 j 的位标集值为 x ,每个虚网格反射点的位标集值为 $-2\phi_g$,即 $x_r = x_g - 2\phi_g$.反射点变量可由其邻近节点内插给出.当虚网格 $j+1$ 的反射点位于节点 j 和流-固界面之间时,即 $-2\phi_{j+1} < x$,为保证稳定性,反射点变量直接由节点 j 等值外插得到.

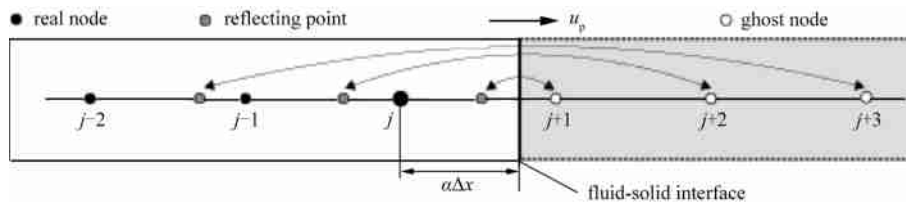


图 1 一维流-固边界条件

Fig. 1 Fluid-solid boundary conditions in one dimension

2.2.2 多维情形

对多维问题,为了设置流-固边界条件,需在物体一侧很窄范围内选取虚网格,且沿流-固界面的法向和切向都应给出边界条件.于是,将虚网格速度分别沿法向和切向分解成 u_{gn} 和 u_{gt} ,将运动流-固界面的速度也分解成 u_{pn} 和 u_{pt} .

设节点 G 是靠近流-固界面很窄范围内的任一虚网格(图 2),其位标集值 $\phi_g < 0$.法向为 $N_g =$

(N_{gx}, N_{gy}) , 曲率为 κ_g , 相应的曲率半径为 r_g . 可以看出, 虚网格 G 和反射点 R 都在同一条从曲率中心 O 发出, 与 0 位标集交于点 I 的射线上. 类似于一维情形, 虚网格值可由其反射点上的值和法向活塞速度获得, 因而首先必须确定反射点的位置. 如图 2 所示, 反射点 R 的位置记作

$$x_r = x_g - 2\phi_g N_{gx}, \quad y_r = y_g - 2\phi_g N_{gy}.$$

同样, 反射点上的值也由其邻近节点的真实值内插给出. 对于二阶边界条件, 可利用 4 个直接环绕的实节点线性内插. 当虚网格十分接近界面时, 如其位标集值 $\phi_g < 0.5$, 有可能找不够反射点的 4 个直接环绕的实节点. 本文采用扩展技术^[10], 沿法向由实节点等值外插给出虚网格的扩展值, 然后由环绕点值和扩展点值内插给出反射点上的值.

在法向, 用以确定节点 G 的运动活塞条件为

$$p_g = p_r, \quad \rho_g = \rho_r, \quad u_{gn} = 2u_{pn} - u_{rn}.$$

其中 u_{rn} 为反射点速度沿法向 N_g 分解的法向分量. 在切向, 只按照滑移或无滑移条件给出虚网格切向速度. 第二反射条件可消除界面附近的涡量, 故用它导出滑移边界条件. 节点 G 的虚网格切向速度 u_g 直接取为

$$u_g = \frac{1}{1 - 2\phi_g} u_r. \tag{5}$$

其中 u_r 为反射点速度沿切向分解的切向分量. 无滑移边界条件将界面上的流体切向速度限制为物体的切向速度. 此时, 节点 G 的

$$u_g = \frac{2}{1 - \phi_g} u_p - \frac{1}{1 - 2\phi_g} u_r. \tag{6}$$

式(5)和式(6)都考虑了物体表面的曲率. 由于本文仅在几个网格间距的很窄范围内设置边界条件, 所以若流-固界面位于一个分辨率较好的网格中, 满足 $|\phi_g| \ll 1$, 则可忽略曲率和旋转影响. 滑移和无滑移边界条件分别简化为

$$u_g = u_r, \quad u_g = 2u_p - u_r.$$

时间积分采用 TVD-Runge-Kutta 法^[18], 每个全时间步由几个子时间步组成. 在每个子时间步都计算流-固边界条件, 而在每个全时间步更新一次位标集函数.

由于边界条件被分别沿法向和切向设置, 且可采用标准有限差分格式, 所以上述过程对二维和三维问题均适用, 无需过多改动.

3 计算结果及分析

现以一组数值算例验证本文的算法. 所有算例都在固定的均匀分布 Descartes 网格上, 采用五阶 WENO-LF 有限差分格式^[19].

3.1 一维算例

对三种情形进行验证, 左侧理想气体初始压力为 2.4, 密度为 1.0, 与右侧静止或运动的物体边界相互作用. 整个计算区域的网格点数为 200, 物体区无网格点.

情形 A: 理想气体以初始速度 2.0 冲击 $x = 0.5$ 处的静止物体. 解析解显示存在一道从物体表面开始向左运动的激波. 图 3(a) 是 $t = 0.2$ 时刻的速度和密度曲线, 计算得到的激波与解析解十分吻合, 精确预测出了激波的强度和速度.

情形 B: 理想气体被始于 $x = 0.9$ 处的物体以速度 -2.0 压缩. 解析解也显示存在一道在物体前方向左

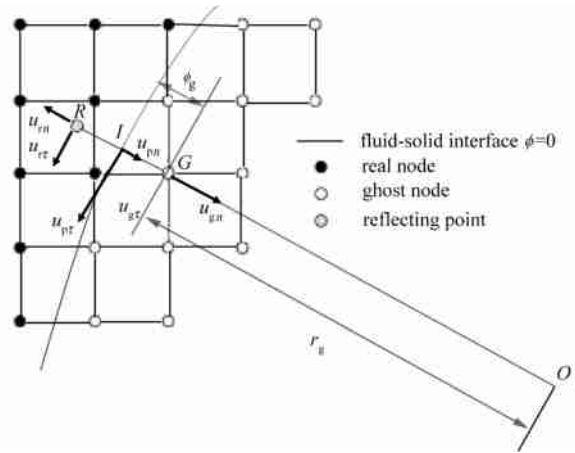


图 2 多维边界条件示意图
Fig. 2 Schematic diagram of multi-dimensional boundary conditions

运动的激波, 其强度和速度与情形 A 一样. 图 3 (b) 是 $t = 0.2$ 时刻物体运动到 $x = 0.5$ 处的速度和密度曲线, 数值解与精确解吻合较好, 耗散比情形 A 略高. 特别地, 利用等压修正 (isobaric fix) 技术, 运动活塞问题中常见的过冲或低冲效应 (over/under shoot effect) 被显著抑制.

情形 C: 理想气体受初始位于 $x = 0.394$ 的物体以速度 0.528 诱导膨胀. 该问题选自文 [17], 但对初始压力、密度、计算域长度进行了无量纲化, 置为 1. 解析解显示存在一道从流 - 固界面向左运动稀疏波. 图 3 (c) 是 $t = 0.2$ 时刻物体运动到 $x = 0.5$ 处的速度和密度曲线, 同精确解比较看出, 稀疏波被准确预测.

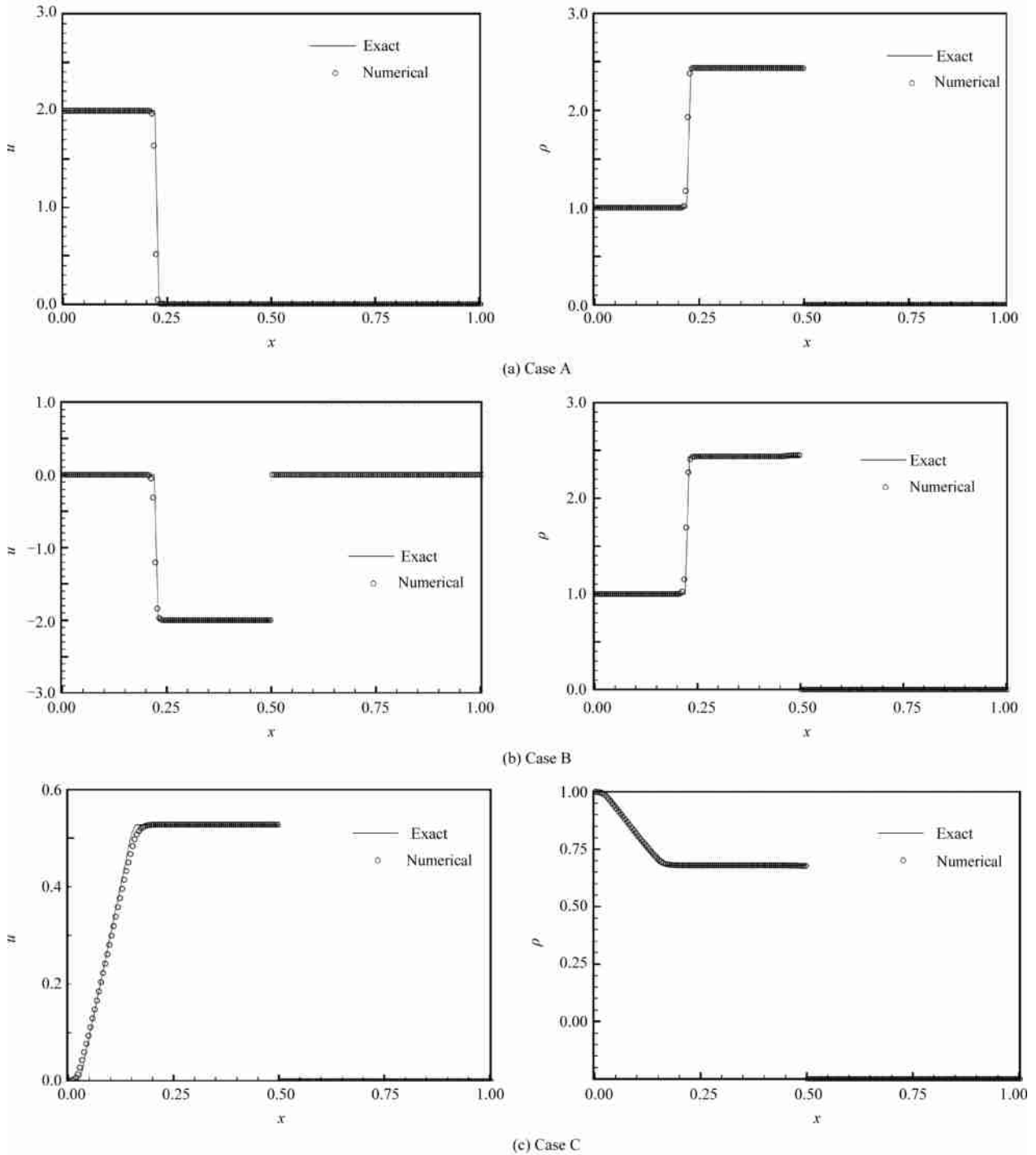


图 3 一维算例的速度和密度

Fig. 3 Velocity and density in one-dimensional examples

3.2 绕圆柱激波反射

数值模拟平面正激波以 Mach 数 $M_s = 2.81$ 绕圆柱反射问题. 该问题曾被 Quirk^[20]用以检验其 Descartes 方法处理静止复杂物形的能力, 并将特定瞬间的计算结果同文[21]的实验纹影照片加以对比, 后者在圆柱后表面附近, 揭示了强膨胀效应产生的单个类 Mach 结构. 初始数据为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & \text{激波前空气,} \\ (3.674, 2.42, 0, 9.045), & \text{激波后空气,} \end{cases}$$

$$\phi = -0.2 + \sqrt{(x-0.5)^2 + y^2}, \quad 0 < x < 1,$$

位标集函数 $\phi = 0$ 表示半径 0.2 的圆柱, $\phi > 0$ 表示空气. 在对称的 1.0×1.6 上半区域内取 600×400 个网格点. 上边界设固壁反射边界条件, 左右边界设 0 梯度出口边界条件.

图 4 是与文[20]中图 8 相同时刻的密度等值线, 正确预测出了流场主要特征, 如激波、接触间断、膨胀区. 此外, 还给出了伴随着间断的涡区. 同文[20]中图 8 对比显示, 图 4 清晰预测出了物面附近的间断, 完全消除了人为数值边界层问题. 正如 Quirk 所言^[20], 尽管其 AMR 过程中不断的网格自适应可产生耗散, 但数值边界层的出现主要在于未对切向流 - 固边界进行任何处理. 另一证据是 Yang 等^[3, 4]在一个固定的均匀分布 Descartes 网格上得到的结果, 未用 AMR 方法, 但用了与 Quirk 十分相似的流 - 固边界条件, 也出现了数值边界层.

3.3 绕双楔体激波反射

数值模拟平面正激波以 Mach 数 $M_s = 2.16$ 绕双楔体反射问题, 前后两个楔角分别为 20° 和 55° . 实验结果表明^[22], 激波先被第一个楔反射, 形成 Mach 结构; 随后该结构的 Mach 杆被第二个楔反射, 形成第二个 Mach 结构; 第二个 Mach 结构最终追上第一个 Mach 结构, 两个三叉点融合为一个. Quirk^[20]和 Itoh 等^[23]曾研究过该问题. 初始数据为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & \text{激波前空气,} \\ (2.9, 1.67, 0, 5.28), & \text{激波后空气,} \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} -0.342x + 0.94y + 0.058, & 0 < x < 0.712, \\ -0.82x + 0.574y - 0.471, & 0.172 < x < 1, \end{cases}$$

位标集函数 $\phi = 0$ 表示双楔体, $\phi > 0$ 表示空气. 边界条件同前一算例, 在对称的 1.0×0.8 上半区域内也取 600×400 个网格点.

图 5 是两个 Mach 结构融合之后某时刻的密度等值线, 对应于文[23]中图 6(a) 的实验全息干涉图. 数值结果如实地再现了干涉图的突出特征. 虽然部分等值线存在微小波动, 但不影响整体特征. 以交替被切的网格近似一条直的斜线, 便形成数值上粗糙的楔面, 它引入的不稳定可能导致了这些波动. 该现象类似于规则粗糙型表面的 Mach 反射实验结果^[22].

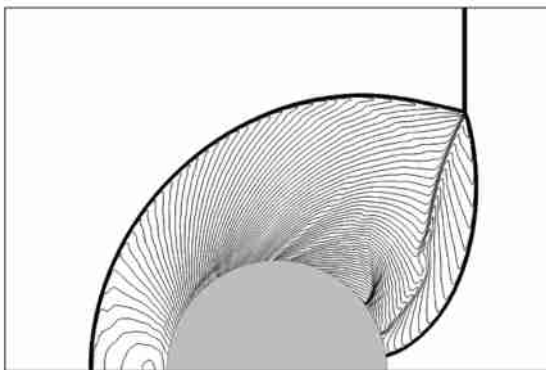


图 4 平面激波与圆柱相互作用密度等值线
Fig. 4 Density contours in interaction of a planar shock wave and a circular cylinder

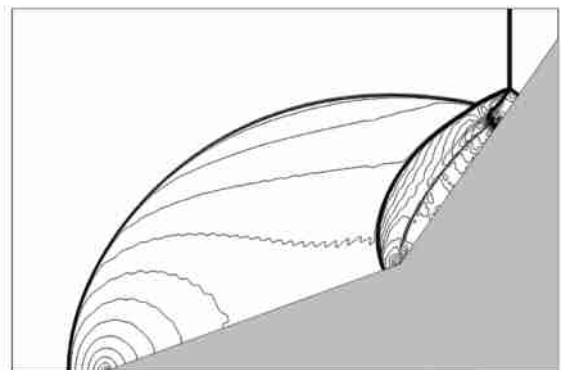


图 5 平面激波与双楔体相互作用密度等值线
Fig. 5 Density contours in interaction of a planar shock wave and a double wedge

3.4 过圆柱阵列激波传播

现计算一个物形更加复杂的问题:平面激波以 Mach 数 $M_s = 1.3$ 穿过圆柱阵列的传播过程. Lee^[24] 的实验结果显示,激波呈多重反射,形成非常复杂的激波结构.初始数据为

$$(\phi, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & \text{激波前空气,} \\ (1.516, 0.523, 0, 1.805), & \text{激波后空气.} \end{cases}$$

若 $0 < x < 0.2775, 0 < y < 0.30875$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.15)^2 + (y - 0.1775)^2};$$

若 $0 < x < 0.2775, 0.30875 < y < 0.44$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.15)^2 + (y - 0.44)^2};$$

若 $0.2775 < x < 0.5325, 0 < y < 0.1465$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.405)^2 + y^2};$$

若 $0.2775 < x < 0.5325, 0.1465 < y < 0.44$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.405)^2 + (y - 0.293)^2};$$

若 $0.5325 < x < 0.7875, 0 < y < 0.30875$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.66)^2 + (y - 0.1775)^2};$$

若 $0.5325 < x < 0.7875, 0.30875 < y < 0.44$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.66)^2 + (y - 0.44)^2};$$

若 $0.7875 < x < 1.05, 0 < y < 0.1465$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.915)^2 + y^2};$$

若 $0.7875 < x < 1.05, 0.1465 < y < 0.44$, 有

$$\phi = -0.085 + \sqrt{(x - 0.915)^2 + (y - 0.293)^2}.$$

位标集函数 $\phi = 0$ 表示半径 0.085 的圆柱, $\phi > 0$ 表示空气. 在对称的 1.0×0.88 下半区域内取 800×352 个网格点. 下边界设固壁反射边界条件, 左右边界设 0 梯度出口边界条件.

图 6 是与文[24]中图 4 相同时刻的整个区域密度等值线, 二者激波结构吻合较好. 计算发现, 激波绕圆柱衍射时出现大尺度涡结构, 但涡量场并不像实验那样充分发展. 这种差异不难预料, 因为本文求解的是 Euler 方程, 没有考虑气体的真实粘性效应, 无法如实地反映实验中 Kelvin-Helmholtz 不稳定的增长. 不管怎样, 数值结果仍提供了合理的定性描述, 如分散的小激波分布在下游, 并附着在小尺度涡上, 这些均已被实验清晰地揭示.

3.5 $M = 2$ 运动 15° 楔

该问题为含运动物体超声速流动算例, 选自文[4], 一个楔角为 15° 的楔以 Mach 数 $M = 2$ 在二维通道里运动. 初始数据为

$$\phi = \begin{cases} 1.4, & u = 0, & v = 0, & p = 1, & \text{空气;} \\ y - 0.509, & & & & 0 < x < 0.284, \\ 0.259x + 0.966y - 0.565, & & & & 0.284 < x < 1.25, \\ y - 0.25, & & & & 1.25 < x < 7.5, \end{cases}$$

位标集函数 $\phi = 0$ 表示楔和通道下壁面, $\phi > 0$ 表示通道里的空气. 上边界为反射固壁边界, 下部的壁面和楔面为运动流 - 固边界. 为了提高楔的外形分辨率, 本文取比文[4]密的网格, 即在 7.5×1.25 计算区域内均匀分布 600×100 个网格点.

图 7 是 $t = 1, 2, 3$ 三个不同时刻等密度线, 同文[4]十分吻合. 楔在压缩角形成一道斜激波, 在膨胀角形成一道膨胀波, 这些波被通道上下壁面多重反射, 且激波过膨胀波不断被弱化. 由于采用了较密的网格, 所得激波结构比文[4]更精细. 事实上, 当斜激波首次被通道上壁面反射时, 产生了一个很短的 Mach 杆, 这在文[4]的图 8 和图 9 中由于分辨率较低, 仅模糊地预示出来.

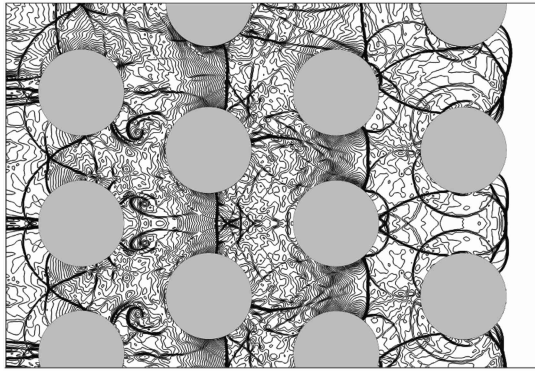


图 6 过圆柱阵列激波传播过程密度等值线
Fig. 6 Density contours of a shock wave propagating through a cylinder rod array

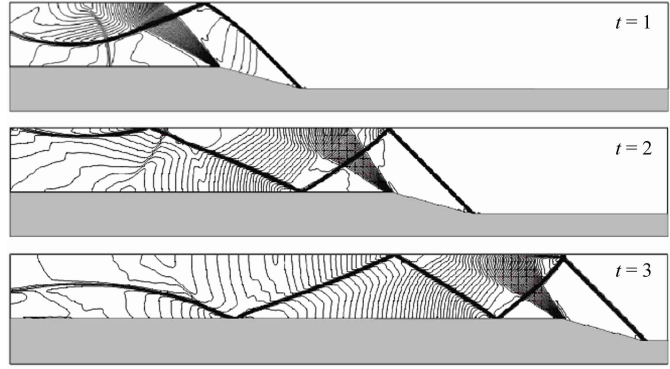


图 7 通道中沿下壁面运动的楔绕流场密度等值线
Fig. 7 Density contours of a flow in a channel with a wedge moving on lower wall

3.6 激波抬升圆柱

另一个含运动物体超声速流动算例选自文[9],即激波抬升圆柱问题,初始停留在一个二维通道下壁面上的一个刚性轻圆柱,被 $M_s = 3$ 平面正激波驱动和向上抬升. 该问题中,圆柱的运动源自激波反射,下壁面的存在使得激波相对圆柱形成非对称反射,从而下壁面附近的压力高于上表面附近的压力,引起抬升效应. 将初始状态无量纲化,压力、密度、计算域长度置为 1. 初始数据为

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & \text{激波前空气,} \\ (3.857, 2.629, 0, 10.333), & \text{激波后空气,} \end{cases}$$

$$\phi = -0.05 + \sqrt{(x - 0.15)^2 + (y - 0.05)^2}, \quad 0 < x < 1,$$

位标集函数 $\phi < 0$ 表示半径 0.05 且密度 7.6 的圆柱, $\phi > 0$ 表示通道里的空气. 上下边界为反射固壁边界,在左入口边界设激波后参数,在右边界设 0 梯度出口边界条件. 取 $x = y = 2.5 \times 10^{-3}$, 使圆柱的外形分辨率高于文[9], 在 1.0×0.15 区域内均匀分布 400×80 个网格点.

图 8 是三个不同时刻等密度线, 其中 $t = 0.019, 0.021, 0.023$ 分别对应于文[9]的 $t = 500, 750, 1000$ 时刻. 不同于文[9]的低分辨率, 图 8 给出了清晰的激波结构和间断, 以及激波绕过圆柱后形成的强涡形态, 该涡与圆柱下表面附近的强膨胀不稳定性相关. 尽管在抬升过程的早期阶段, 计算的圆柱轨迹与文[9]十分一致, 但与文[9]中图 5 相比, 本文得到的圆柱速度更快, 使其较早抵达上壁面.

因无相应实验, 本文采用提高分辨率测试方法进一步验证数值结果. 取 $x = y = 1 \times 10^{-3}$, 图 9 是与图 8 相同三个时刻的数值纹影照片. 不难看出, 激波前阵面、间断、涡、圆柱位置几乎与图 8 的粗网格结果完全一样, 显示了算法优异的收敛特性. 细网格结果揭示了膨胀涡更细致的演化形态, 还辨识出了许多其它涡. 随着激波不断与这些涡相互作用, 计算发现了与图 6 十分相似的附着在涡上的小激波类型.

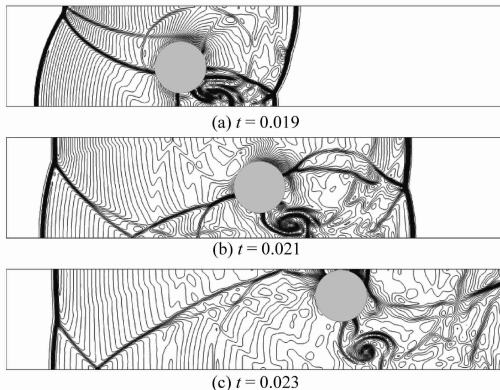


图 8 圆柱抬升过程三个时刻的密度等值线
Fig. 8 Density contours in a liftoff process

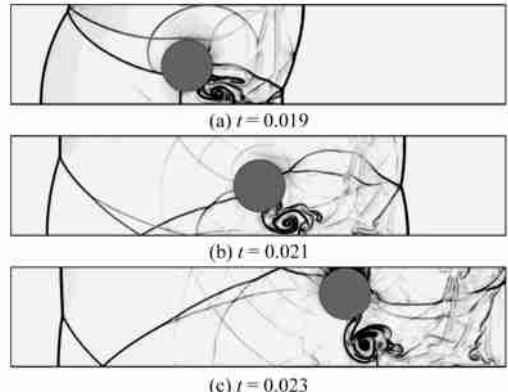


图 9 圆柱抬升过程数值纹影照片
Fig. 9 Schlieren photographs of the liftoff process

4 结 论

发展了一种含任意复杂及运动固壁超声速流动的 Descartes 网格算法. 该算法基于位标集函数、虚网格技术、标准有限差分格式, 使用简单、稳健, 易于向三维推广. 同时给出了法向和切向流 - 固边界条件, 从而可正确预测激波与物体相互作用, 并消除了切向数值边界层. 计算了一维/二维算例, 与解析解、实验或已有数值模拟进行了对比. 结果表明, 本文算法可给出正确和精确的结果, 提供良好的物形适应性. 此外, 简单而直接的流 - 固边界条件使得界面求解仅需在靠近界面很窄的网格范围内进行, 效率较高.

[参 考 文 献]

- [1] Benek J A, Donegan T L, Steger J L. Extended chimera grid embedding scheme with application to viscous flows [R]. AIAA Paper 87 - 1126, 1987.
- [2] Lohner R. The efficient simulation of strong unsteady flows by finite element method [R]. AIAA Paper 87 - 0555, 1987.
- [3] Yang G, Causon D M, Ingram D M, Saunders R, Batten P. A Cartesian cut cell method for compressible flows. Part A: static body problems [J]. Aeronautical Journal, 1997, **101**: 47 - 56.
- [4] Yang G, Causon D M, Ingram D M, Saunders R, Batten P. A Cartesian cut cell method for compressible flows. Part B: moving body problems [J]. Aeronautical Journal, 1997, **101**: 57 - 65.
- [5] Ma Tianbao, Hao Li, Ning Jianguo. Interface reconstruction algorithm in Eulerian multi-material hydrodynamic numerical method[J]. Chinese J Comput Phys, 2008, **25**(2): 133 - 138.
- [6] Wang Bing, Xu Houqian. Simulation of complex flows with large-scale moving boundaries[J]. Chinese J Comput Phys, 2008, **25**(4): 396 - 400.
- [7] Wang Yongjian, Zhao Ning, Mao Junfeng, et al. An arbitrary Lagrangian-Eulerian method with adaptive moving mesh[J]. Chinese J Comput Phys, 2007, **24**(3): 261 - 267.
- [8] Gong Xiangfei, Zhang Shudao, Jiang Song. Numerical simulation of fluid interfaces with the adaptive mesh refinement method, the ghost fluid method and the level set method[J]. Chinese J Comput Phys, 2006, **23**(4): 391 - 395.
- [9] Falcovit J, Alfandary G, Hanoch G. A two-dimensional conservation laws schemes for compressible flows with moving boundaries [J]. J Comput Phys, 1997, **138**(1): 83 - 102.
- [10] Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method) [J]. J Comput Phys, 1999, **152**: 457 - 492.
- [11] Chung M H. A level set approach for computing solutions to inviscid compressible flow with moving solid boundary using fixed Cartesian grids [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2001, **36**(4): 373 - 389.
- [12] Yang G, Causon D M, Ingram D M. Calculation of compressible flows about complex moving geometries using a three-dimensional Cartesian cut cell method [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2000, **33**: 1121 - 1151.
- [13] Sussman M, Fatemi E, Smereka P, Osher S. An improved level set method for incompressible two-phase flows [J]. Computer Fluids, 1998, **27**: 663 - 680.
- [14] Huang C W, Shih T Y. On the complexity of point-in-polygon algorithms [J]. Computers and Geosciences, 1997, **23**: 109 - 118.
- [15] Peng D, Merriman B, Osher S, Zhao H, Kang M. A PDE-based fast local level set method [J]. J Comput Phys, 1999, **155**: 410 - 438.
- [16] Sethian J A. Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts [J]. J Comput Phys, 2001, **169**: 503 - 555.
- [17] Fedkiw R, Marquina A, Merriman B. An isobaric fix for the overheating problem in multimaterial compressible flows [J]. J Comput Phys, 1999, **148**: 545 - 578.
- [18] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. J Comput Phys, 1988, **77**: 439 - 471.
- [19] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. J Comput Phys, 1996, **126**: 202 - 228.
- [20] Quirk J J. An alternative to unstructured grid for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two-dimensional bodies [J]. Computer Fluids, 1994, **23**: 125 - 142.
- [21] Bryson A E, Gross R W F. Diffraction of strong shocks by cones, cylinders, and spheres [J]. J Fluid Mech, 1961, **10**: 1 - 16.
- [22] Berr-Dor G. Shock Wave Reflection Phenomena [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

- [23] Itoh K, Takayama K, Berr-Dor G. Numerical simulation of the reflection of a planar shock wave over a double wedge [J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 1991, **13**: 1153 - 1170.
- [24] Lee J H S. Shock-vortex interaction: its role in compressible turbulence and detonation structure [C]. Takayama K, Jiang ZL, eds. *Proceedings of the Second International Workshop on Shock / Vortex Interaction*. Japan: Institute of Fluid Science, Tohoku University, 1997.

A Cartesian Mesh Algorithm for Supersonic Flows Around Arbitrary Moving Bodies

WANG Qiang¹, HU Xiangyu², JIANG Zonglin³

- (1. *China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China*;
2. *School of Mechanical Engineering, Technical University of Munich, 85748 Garching, Germany*;
3. *LHD, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract: A Cartesian mesh algorithm is developed for numerical solution of supersonic flows with arbitrarily complex and moving solid boundaries. The method defines and tracks fluid-solid interfaces with a level set function. Fluid-solid boundary condition is dealt with a ghost cell technique and is calculated separately in normal and tangential directions. The method proposed is simple, robust, and can work with high-order finite difference schemes. To validate the scheme, one- and two-dimensional numerical examples involving static or moving boundaries are included.

Key words: fluid-solid interface; Cartesian mesh; moving boundary; level set; shock wave