

固有频率法评估损伤的阈值研究

王 哲¹⁾ 丁 桦²⁾

(中国科学院力学研究所工程科学部, 北京 100190)

摘要 通过分析损伤可测性的影响因素, 对固有频率法判断损伤阈值的估算方法进行了研究, 并以悬臂梁模型为例, 应用该方法研究了悬臂梁的损伤阈值. 数值及理论计算的结果表明: 在已知频率测量精度及方法偏差时, 该方法可以判别固有频率法损伤识别的阈值, 在早期损伤阶段, 该方法判别的阈值与数值模拟结果吻合良好.

关键词 传递矩阵, 固有频率, 悬臂梁, 损伤识别

中图分类号: O324 文献标识码: A 文章编号: 1000-0879(2009)02-050-005

ESTIMATING THRESHOLDS OF DAMAGES BASED ON NATURAL FREQUENCY METHOD

WANG Zhe¹⁾ DING Hua²⁾

(Division of Engineering Sciences, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract The damage thresholds obtained by natural frequency method can be used as a criterion to justify the usefulness of practical engineering structure. The natural frequency method consists of analyzing the influential factors of the damage, and a cantilever beam model is taken as an example. Both numerical and theoretical results indicate that, if the frequency measurement error is known, this method can be used to estimate the thresholds, during the early period of damage. The thresholds obtained by this method agree with the numerical results very well.

Key words transfer matrix, natural frequency, cantilever beam, damage identification

引 言

随着现代科学技术的发展, 建筑、桥梁、海洋平台、空天飞行器等正向着结构大型化复杂化的方向发展. 大型结构关键部件的损伤若没有被及时发现, 很快就可能导致整个结构的破坏, 因此对损伤的预报就显得尤为重要^[1,2].

从 20 世纪 70 年代至今, 已有很多损伤识别的方法诞生, 大体可将损伤识别技术分为两类——局部损伤识别技术和全局损伤识别技术^[1~4]. 基于固有频率进行损伤识别的方法属于全局损伤识别的范畴, 该方法有着所需检测设备简单、固有频率测量

的可靠性高等优点. 前人已经对该方法的研究做出了很多的工作, Cawley 等^[5]给出了利用固有频率判断损伤位置的方法. 但是, 在大型结构的早期损伤识别中, 结构的固有频率变化很小, 频率测量及损伤估算方法的偏差相对较大, 导致损伤早期阶段用固有频率判断损伤程度时, 结果的可靠性差, 损伤评估的结果不可用. 另外, 损伤对频率的影响与损伤位置相关, 因此, 不同位置不同大小的损伤很可能导致相同的固有频率改变量, 使得实际应用中该方法往往只能告知损伤的发生而不能给出损伤的位置. 对于一个给定的结构, 损伤达到多大程度时可以用固有频率法进行损伤检测, 或者当检测值大

2008-01-07 收到第 1 稿, 2008-02-28 收到修改稿.

1) 王哲, 1983 年生, 男, 硕士研究生, 从事结构动力学研究. E-mail: zhe-wang02@mails.tsinghua.edu.cn

2) 丁桦, 1960 年生, 男, 教授, 博士, 从事结构动力学、岩土力学、损伤力学等研究. E-mail: hding@imech.ac.cn

于多少时, 结果的可靠性能达到待要求, 这方面的研究还不充分. 本文研究了固有频率法进行损伤识别的阈值估计方法. 阈值的研究可以为该方法的使用条件提供依据.

1 损伤可测性影响因素分析

在损伤的早期识别中, 影响识别精度的主要因素是固有频率测量的误差以及估算方法的偏差. 激励方式、数据处理的方法以及一些其他因素都可以导致测量固有频率的误差出现. 估算方法偏差的主导因素是: 参照模型与实际结构存在差异, 对应于相同的频率改变量, 模型与实际结构的损伤程度存在偏差; 另外, 由模型得到的频率改变量——损伤程度关系曲线或公式也会造成一定偏差. 综上, 可以将估算方法的偏差统一成: 参照模型得到的损伤值与实际结构真实损伤值之间的差值. 实际结构中可以根据工程经验估算其大致量级, 并可以通过改善模型、提高拟合精度等方式减小估算方法的偏差.

结构的损伤发生在不同位置时, 相同程度的损伤会导致不同大小的频率改变量, 因此, 损伤结构固有频率的大小与损伤的位置 l 相关. 假设损伤导致结构的改变是轴对称的, 并且可以用等效杨氏模量来衡量损伤的程度, 则固有频率的大小与损伤部位的等效杨氏模量 E^* 相关, 同时也与损伤区域的长度 l^* 相关. 固定损伤区域的长度和损伤的位置, 那么固有频率仅与损伤区域的等效杨氏模量 E^* 相关, 即 $\omega(E^*)$, 在未出现损伤时的等效杨氏模量 E_0 处泰勒展开得

$$\omega(E^*) = \omega(E_0) + \frac{\partial \omega}{\partial E^*}(E^* - E_0) + o$$

即

$$\frac{\delta E^*}{E_0} = \frac{\delta \omega}{E_0 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + o \quad (1)$$

其中 $\delta \omega$ 为固有频率改变量, δE^* 为损伤部位等效杨氏模量改变量, $\frac{\delta E^*}{E_0}$ 表示损伤的程度.

若频率改变量 $\delta \omega$ 的误差为 $\delta \tilde{\omega}$, 则实际得到的频率变化值为 $\delta \omega_p = \delta \omega + \delta \tilde{\omega}$, 令实际得到的损伤程度为

$$\delta \tilde{E}^*/E_0 = \delta E^*/E_0 + \delta \tilde{E}^*/E_0$$

代入式 (1) 并加入方法导致的误差 $\Delta E(\delta \omega_p)/E_0$, 可得

$$\frac{\delta \tilde{E}^*}{E_0} = \frac{\delta \tilde{\omega}}{E_0 \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + \frac{\Delta E(\delta \omega_p)}{E_0}$$

在实际应用中, 误差主要有两种形式方式来描述——相对误差和绝对误差. 下面对上述两种情况来分别讨论:

(1) 若要求待测结构损伤评估的相对误差不超过 k 值, 即

$$\frac{\delta \tilde{E}^*}{E_0} = \frac{\delta \tilde{\omega}}{E_0 \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + \frac{\Delta E(\delta \omega_p)}{E_0} < k \cdot \frac{\delta E^*}{E_0}$$

$$\frac{\delta E^*}{E_0} > \frac{\delta \tilde{\omega}}{k \cdot E_0 \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + \frac{\Delta E(\delta \omega_p)}{k \cdot E_0}$$

即损伤程度满足此条件时, 固有频率法进行损伤识别的数值有价值; 此时, $\frac{\delta \tilde{\omega}}{k \cdot E_0 \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + \frac{\Delta E(\delta \omega_p)}{k \cdot E_0}$ 的

值即为待求阈值.

(2) 若要求待测结构损伤评估的绝对误差 $\delta \tilde{E}^*/E_0$ 不超过 m 值, 即 $m > \frac{\delta \tilde{\omega}}{E_0 \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + \frac{\Delta E(\delta \omega_p)}{E_0}$

时, 固有频率法的评估结果有意义. 此时, $\frac{\delta \tilde{\omega}}{E_0 \frac{\partial \omega}{\partial E^*}} + \frac{\Delta E(\delta \omega_p)}{E_0}$ 的值即为待求阈值.

2 实例计算

2.1 实例模型与参照模型

本文所述模型为悬臂梁模型 (如图 1 所示), 该悬臂梁长 10 m, 截面为 0.3 m × 0.3 m. 图中 O 为原点, l_1 为损伤区域长度, l_2, l_3 为健康部位长度; E_1, E_2, E_3 对应 3 段的杨氏模量 (或等效杨氏模量). 损伤区域等效杨氏模量为 E^* , 于是 $E_2 = E^*$. E_1, E_3 为非损伤区域, 其值等于 E . 有限元模拟与理论计算均采用钢的材料参数: 杨氏模量 $E = 2 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 密度 $\rho = 7800$ kg/m³. 损伤用等效杨氏模量来模拟, 并假设损伤前后材料的质量不变, 截面不变, 仅损伤区域的等效杨氏模量改变.

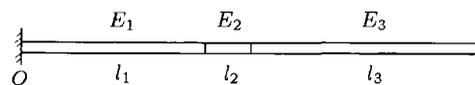


图 1 悬臂梁模型图

实验中, 用有限元来模拟计算有误差的固有频率值; 用传递矩阵法求解参照模型所需的理论解. 传递矩阵法求解时, 为方便计算, 从固定端到自由端模型被均匀划分为 10 个单元, 编号为 1~10, 用于模拟损伤出现在不同的位置, 且损伤区域长度固定.

令左边界条件为 B_0 , l_1, l_2, l_3 处的边界条件分别为 B_1, B_2, B_3 .

由文献 [5,6], 梁弯曲振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

该方程的解为

$$Y(x) = L_1 \cdot A(x) + L_2 \cdot B(x) + L_3 \cdot C(x) + L_4 \cdot D(x) \quad (2)$$

其中 L_1, L_2, L_3, L_4 为 4 个待定参数

$$A(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}kx + \cos kx)$$

$$B(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}kx + \sin kx)$$

$$C(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}kx - \cos kx)$$

$$D(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}kx - \sin kx)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EJ}}$$

转角振幅值、弯矩振幅值、剪力振幅值分别为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{dY(x)}{dx} \\ \frac{M_x}{EJ} &= \frac{d^2Y(x)}{dx^2} \\ \frac{Q_x}{EJ} &= \frac{d^3Y(x)}{dx^3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

左边界

$$B_0 = \left[y_0 \quad \varphi_0 \quad \frac{M_0}{EJ} \quad \frac{Q_0}{EJ} \right]^T = [y_0 \quad \varphi_0 \quad \bar{M}_0 \quad \bar{Q}_0]^T$$

将左边界 B_0 代入式 (2), (3) 可得

$$B_x = K_x \cdot T_x \cdot K_x^{-1} \cdot B_0 = H_x(E_x, x) \cdot B_0$$

其中

$$B_x = [y_x \quad \varphi_x \quad \bar{M}_x \quad \bar{Q}_x]^T$$

$$K_x = \operatorname{diag}(1, k, k^2, k^3)$$

$$T_x = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x \\ D_x & A_x & B_x & C_x \\ C_x & D_x & A_x & B_x \\ B_x & C_x & D_x & A_x \end{bmatrix}$$

将 $H_x(E_x, x)$ 作为以 E_x, x 为参数的传递矩阵, 于是得到左边界到右边界的传递方程

$$B_3 = H_3(E_3, l_3) \cdot H_2(E_2, l_2) \cdot H_1(E_1, l_1) \cdot B_0 \quad (4)$$

左边界位移和转角为 0, 右边界弯矩和剪力为 0, 由于振动时左边界的弯矩和剪力、右边界的位移和转角不为 0, 所以由式 (4) 的非零解存在条件即可得到带损伤悬臂梁的固有频率理论解。

2.2 结果分析

由文献 [2,4], 任意两阶固有频率改变量之比 $\delta\omega_i/\delta\omega_j$ 仅仅是损伤位置的函数, 与损伤的程度无关, 此特点可以用于判别损伤的位置. 由于不同的损伤位置和程度可能导致相同的固有频率改变值, 因此首先要确定损伤的位置才能对损伤程度进行评估. 理论求解时, 固定损伤单元所在位置, 改变损伤程度的大小, 得到对应不同损伤程度的各阶次固有频率, 进而获得固有频率改变量之比 $\delta\omega_i/\delta\omega_j$. 由于计算误差、模态振型改变等因素的存在, 实际得到的固有频率改变量之比并不是常数, 而是在一定范围内波动. 表 1 为理论解和数值解前 8 个单元前两阶固有频率之比的范围, 由于第 9 第 10 单元损伤对固有频率改变的影响很小, 计算相对误差很大, 不能精确给出它们的固有频率值, 因此没有统计. 对比数据可以发现, 尽管一些有限元模型的数据超出了理论解的频率比值范围, 但是依然可以根据其数值上所靠近的理论解来判断损伤所在单元, 因此, 理论解的数据可以作为判断有限元模型损伤位置的依据, 第 9 和第 10 单元可以通过高阶频率改变量的比值来确定. 实际工程结构损伤的早期阶段, 测量误差对位置判断的影响还有待进一步的研究.

表 1 前两阶频率比值范围

单元	一、二阶频率改变量之比	
	理论解	数值解
1	0.2329~0.3200	0.2324~0.3206
2	0.9782~1.0650	0.9558~1.0500
3	2.1086~2.3621	1.8641~2.2875
4	0.1995~0.2286	0.2000~0.2282
5	0.05819~0.07562	0.05882~0.07628
6	0.02596~0.03453	0.02540~0.03491
7	0.01424~0.01746	0.01304~0.01770
8	0.008571~0.009804	0.008333~0.009732

损伤位置确定之后, 可以用对应于不同损伤的固有频率值画出某一阶固有频率改变量 $\delta\omega$ 与损伤单元等效杨氏模量改变量 δE^* 的关系曲线, 进而拟合得到 $\delta\omega - \delta E^*$ 的公式. 本文采用四阶的公式来拟合.

$$\delta\omega = a + b \cdot \delta E^* + c \cdot (\delta E^*)^2 + d \cdot (\delta E^*)^3 + e \cdot (\delta E^*)^4$$

由于 $\delta E^* = 0$ 时 $\delta\omega = 0$, 因此理论上 a 值应该等于 0. 但是在实际求解的过程中由于计算和拟合误差的存在, 导致拟合得到的 a 值并不为 0. 拟合公式用于估算有限元模型的损伤程度, 因此在用拟合公式估算有限元模型的损伤程度时不需要强制 a 值等于 0. 有限元得到的频率值与理论解得到的频率值存在偏差, 不妨假设该偏差为实际工程中的测量误差, 该偏差与拟合的偏差 (即模拟方法上的偏差) 相比, 后者可以忽略不计. 将有限元模型求得的频率变化值代入拟合得到的公式, 得到用理论解拟合公式估算的损伤程度值, 再求该值与实际损伤值的误差大小, 得到误差与损伤大小的关系 (图 2, 图 3, 图 4 为固有频率法估算损伤的误差与损伤程度的关系曲线、图 5 为第三阶频率数值解相对于理论解的误差). 由于在实际工况中很难获得整体结构的高阶响应, 因此本文只对低阶频率进行研究.

由图 2~ 图 4 可以看出, 即使损伤的位置相同、损伤的程度相同, 不同阶次的固有频率估算损伤的误差大小也不同. 通过对比损伤所在位置与振动模

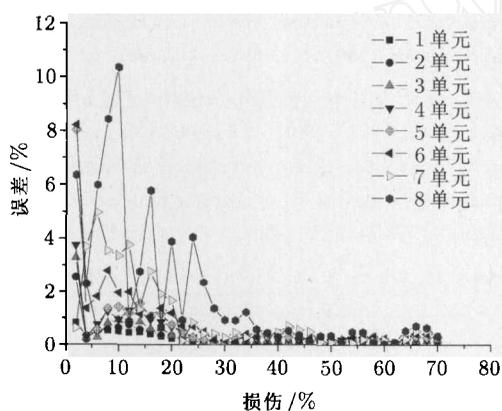


图 2 第 1 阶频率估算损伤的误差 - 损伤关系曲线

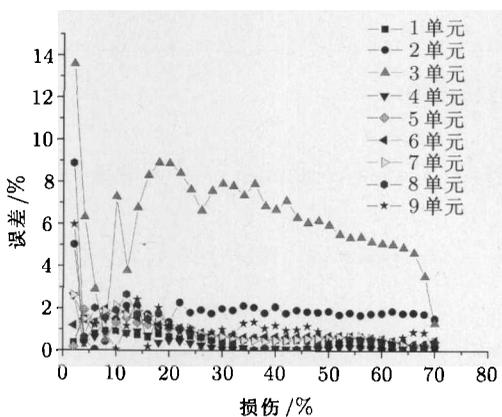


图 3 第 2 阶频率估算损伤的误差 - 损伤关系曲线

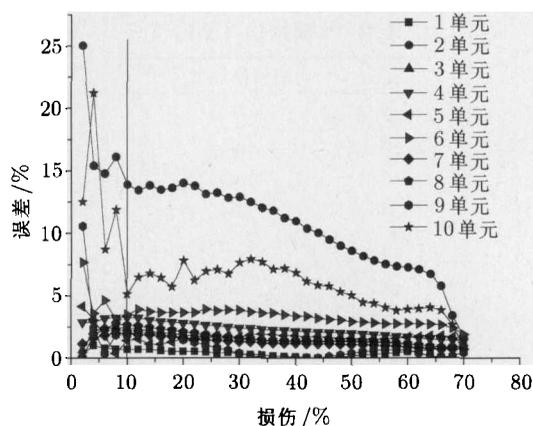


图 4 第 3 阶频率法估算损伤的误差 - 损伤关系曲线

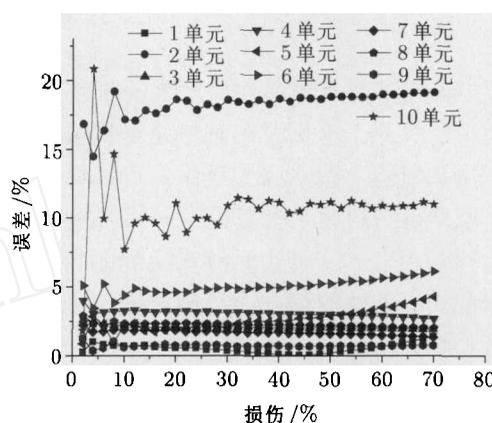


图 5 第 3 阶频率数值解相对理论解的偏差

态的关系, 可以发现, 在振动过程中应变变化相对大的区域出现损伤时, 损伤对频率变化的影响也更大. 若限定损伤估算误差不超过 5%, 综合前 3 阶频率, 只有第 10 单元的损伤估算误差大于限定值, 其他单元都可以用固有频率法估算损伤程度, 用条件

$$\frac{\delta E^*}{E_0} > \frac{\delta\omega}{k \cdot E_0} \frac{\partial \omega}{\partial E^*} + \frac{\Delta E(\delta\omega_p)}{k \cdot E_0}$$

判断损伤初始阶段的可测条件 (以第 3 阶频率为例, 表 2), 若限定初始阶段损伤不超过 10%, 损伤估算误差不超过 5% 时, 第 2 和第 10 单元的可测损伤程度大于 10%, 为早期不可测的位置, 其他单元损伤早期可测阈值在表 2 中给出, 并与图 5 基本对应. (若给定绝对误差值, 可以采取类似的方法判断)

同时可以得到以下结论: 固有频率法估算损伤程度时, 估算的误差仅在损伤初期时 (小于 10%) 较大, 并且估算误差不一定单调. 由图 4, 图 5 对比可

表2 早期损伤可测阈值

单元	可测损伤程度 (%)
1	1.43
2	34.33
3	4.40
4	6.51
5	4.42
6	8.75
7	3.77
8	4.63
9	1.62
10	22.95

以看出,在误差大于10%时,频率变化的相对偏差值大于估算误差相对值。

3 结论

本文研究了固有频率法检测单一损伤的误差与损伤大小的关系,给出了求解特定结构损伤可测阈值的方法和流程。在实际工程中,可以将有限元或者其他模型得到的频率改变量——等效杨氏模量公式作为判断用公式,将实际测量得到的频率变化量代入该公式,方法的偏差由经验给出,综合以上因素即可判断损伤可测的阈值。

由于损伤对固有频率的影响与损伤所在位置相关,悬臂梁模型自由端附近的单元损伤对低阶频率的影响非常小,理论解与有限元解的求解误差都很大,因此用固有频率法估算自由端及其附近位置的损伤误差较大,或不能估算其误差。若要对自由端及其附近单元的损伤进行研究,则需要计算稍高阶次的固有频率。对于相同的单元(远离自由端),用不同阶次的固有频率进行判别时,其判断误差不同,实际应用中可以用估算误差小的阶次来判断特定单元的损伤。

参 考 文 献

- 1 郑栋梁,李中付,华宏星. 结构早期损伤识别技术的现状和发展趋势. 振动与冲击, 2002, 21(2): 1~6,10 (Zheng Dongliang, Li Zhongfu, Hua Hongxing. Present status and development of the technology in the identification of the earlier damage in structures. *Journal of Vibration and Shock*, 2002, 21(2): 1~6,10(in Chinese))
- 2 王术新,姜哲. 基于结构振动损伤识别技术的研究现状及进展. 振动与冲击, 2004, 23(4): 99~103 (Wang Shuxin, Jiang Zhe. Present developing situation and research advances in the field of structural damage detection. *Journal of Vibration and Shock*, 2004, 23(4): 99~103(in Chinese))
- 3 Mannur JS, et al. Experimental damage detection on a wing panel using vibration deflection shapes. *Structural Health Monitoring*, 2003, 2(3): 243~256
- 4 郭惠勇,李正良,罗乐. 基于频率响应和统计理论的结构损伤识别研究. 振动与冲击, 2007, 26(11): 25~40,181 (Guo Huiyong, Li Zhengliang, Luo Le. Structural damage identification method on frequency responses and statistical theory. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(11): 25~40,181 (in Chinese))
- 5 孙焕纯,曲乃泗,林家浩. 计算结构动力学. 北京: 高等教育出版社, 1989. 95~106 (Lin Jiahao, Qu Naisi, Lin Jiahao. *Computational Structural Mechanics*. Beijing: Higher Education Press, 1989. 95~106 (in Chinese))
- 6 刘玉秋,聂武,温保华. 用迁移矩阵法求解武器命中后的舰船船体应力. 中国造船, 2001, 42(1): 33~38 (Liu Yuqiu, Nie Wu, Wen Baohua. Stress calculation of warship structure damaged by weapons using transfer matrix method. *Shipbuilding of China*, 2001, 42(1): 33~38(in Chinese))
- 7 Cawley P, Adams RD. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Journal of Strain Analysis*, 1979, 14(2): 49~57
- 8 Masato A. Structural damage detection by natural frequencies. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1996. 1064~1069

(责任编辑:曾珂)

为加大力学科普宣传,拓展科普形式,中国力学学会网站(<http://www.cstam.org.cn>)“力学科普与教育”专栏新增科普视频栏目,欢迎大家浏览。

“力学科普与教育”专栏目前已开通的栏目有:书刊评介;科普视频集锦;国内力学名家;国外力学名家;科普文章。

若您有好的力学科普素材,欢迎与我们联系(E-mail: office@cstam.org.cn)。