

# 配置环形线电极的单极机中的磁流体力学流动\*

胡文瑞†

中国科学院微重力重点实验室, 中国科学院力学研究所, 北京 100190

**摘要** 给出配置了环形线电极的单极机中的磁流体力学解析解. 由于问题是线性的, 求解可简化为基本解的叠加, 可利用单极机在两个区域中的基本解的衔接来求得解析解. 讨论了基本解的性质. 利用非完全电极可改善 Hartmann 边界层、增加装置中的质量流量. 应用基本解讨论了连续电极的单极机.

**关键词** 环形线电极, 单极机, 磁流体力学, 基本解

## 1 引言

对于单极机、磁流体发电、磁流体推进和磁流体分离机等应用领域, 环形管道中的磁流体力学流动具有重要意义. 此类设施在同位素分离, 特别是重元素同位素的分离上具有众多优点 [1~12]. 当 Hartmann 数很大时电流局限在 Hartmann 边界层内流动, 而且在克服黏性阻力中也消耗了大量动能. 因此有必要控制并改善电流分布以改善效率、增加流量.

单极机中的磁流体流动这个课题已有大量研究文献, 几乎所有的工作都基于某种近似或简化. 文献 [3, 13] 讨论了磁流体力学弱相互作用, 其中速度与磁场可以解耦. 文献 [14, 15] 分析了大 Hartmann 数的情形, 文献 [16] 则讨论了小 Hartmann 数的情形. 如果环体的长度远小于其半径 [3, 17, 18], 或远大于其半径 [19], 则边界的影响在某一个方向上可以忽略. 在给定周向磁场分布的假设下, 可求得单极机的解 [20, 21]. 文献 [22] 利用 Galerkin 方法求出了单极机的近似解. 近来, 胡 [14] 给出了非完全电极的单极机的解.

胡 [14] 的结果表明, 非完全电极增加了质量流量, 改善并控制了 Hartmann 边界层 (及二次流). 对于线性磁流体管道流也得到了类似的结果 [18]. 这两种情况下的解都用级数来表达, 而级数的收敛性很难证明. 我们将在本文中讨论单极机中的磁流体流动的一个特例, 其中电极的长度远小于环体的长度及其他尺度. 这时可准确求得问题的解析解.

\* 发表在钱伟长编, *The Advances of Applied Mathematics and Mechanics in China*. Beijing: China Academic Publishers, 1987. 65~87

† E-mail: wrhu@imech.ac.cn

## 2 模型和方程

考虑一个高度为  $2l$  的单极机, 其内径和外径分别为  $r_1$  和  $r_2$ . 有  $N$  对平行电极位于环体表面, 如图 1 所示.

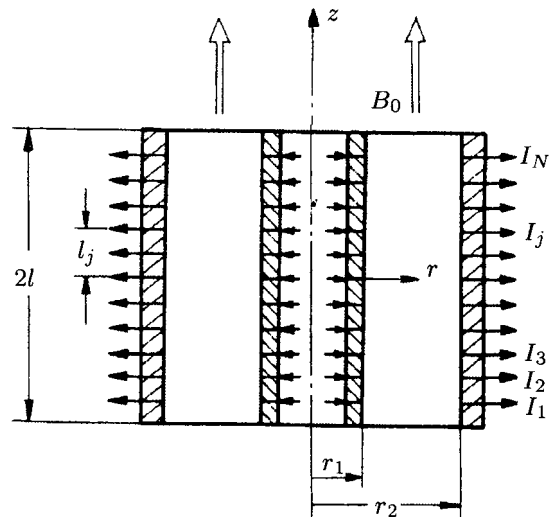


图 1 配置若干对平行电极的单极机示意图

采用柱坐标,  $z$  轴沿对称轴, 坐标原点为对称点. 第  $i$  对电极位于  $z = l_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 的位置, 其中流过的电流为  $I_i$ . 因此总电流为

$$I = \sum_{i=1}^N I_i \quad (1)$$

$z$  方向的边界可表为

$$l_c = -1, \quad l_{N+1} = 1$$

不失一般性，可将配置环形线电极的单极机的方程和边界条件表为 [9~11]

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\mu_0 \eta} \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} + \sigma \mu_0 B_0 \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$v_\theta(r_1, z) = v_\theta(r_2, z) = v_\theta(r, \pm l) = 0 \quad (4 \sim 6)$$

$$B_\theta(r, \pm l) = \mp \mu_0 l / 4\pi r \quad (7)$$

$$B_\theta(r_1, l_i < z < l_{i+1}) = \left( -\mu_0 \sum_{j=1}^i I_j + \mu_0 \sum_{j=i+1}^N I_j \right) / 4\pi r_1 \quad (8)$$

$$B_\theta(r_2, l_i < z < l_{i+1}) = \left( -\mu_0 \sum_{j=1}^i I_j + \mu_0 \sum_{j=i+1}^N I_j \right) / 4\pi r_2 \quad (9)$$

其中  $B_0$  是  $z$  方向外加均匀磁场， $\sigma$  和  $\eta$  是电流体的电导率和黏性系数， $\mu_0$  是真空中磁导率。我们采用一维模型，假设磁场在  $e_z$  方向均匀， $\mathbf{B} \simeq B_0 e_z$  (常数)。磁场边界条件要求磁场的周向分量在环体边界跃变  $N$  次，因为环体有  $N$  个环形线电极。

因为方程和边界条件都是线性的，解可叠加。因此边界条件 (4)~(9) 下的方程 (2), (3) 的求解就简化为求对应于位于  $z = l_i$  和  $r = r_1$  或  $r_2$  的单个电极的基本解，如图 2 所示。

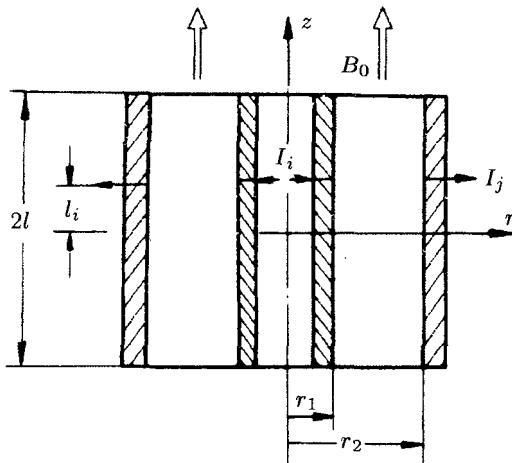


图 2 配置单对电极的单极机示意图

该基本问题的方程和边界条件可写为

$$\frac{\partial^2 v_\theta^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{v_\theta^{(i)}}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\mu_0 \eta} \frac{\partial B_\theta^{(i)}}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 B_\theta^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{B_\theta^{(i)}}{r^2} + \frac{\partial^2 B_\theta^{(i)}}{\partial z^2} + \sigma \mu_0 B_0 \frac{\partial v_\theta^{(i)}}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$v_\theta^{(i)}(r_1, z) = v_\theta^{(i)}(r_2, z) = v_\theta^{(i)}(r, \pm l) = 0 \quad (12)$$

$$B_\theta^{(i)}(r, l) = -\frac{\mu_0 I_i}{4\pi r}, \quad B_\theta^{(i)}(r, -l) = +\frac{\mu_0 I_i}{4\pi r} \quad (13)$$

$$B_\theta^{(i)}(r_1, l_i < z \leq l) = -\frac{\mu_0 I_i}{4\pi r_1} \quad (14)$$

$$B_\theta^{(i)}(r_1, -l \leq z < l_i) = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi r_1} \quad (15)$$

$$B_\theta^{(i)}(r_2, l_i < z \leq l) = -\frac{\mu_0 I_i}{4\pi r_2} \quad (16)$$

$$B_\theta^{(i)}(r_2, -l \leq z < l_i) = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi r_2} \quad (17)$$

其中上标“ $i$ ”表示第  $i$  个基本解。因此，可利用基本解的叠加求得式 (2)~(9) 的解，也即

$$v_\theta(r, z) = \sum_{i=1}^N v_\theta^{(i)}(r, z) \quad (18)$$

$$B_\theta(r, z) = \sum_{i=1}^N B_\theta^{(i)}(r, z) \quad (19)$$

于是问题归结为基本解的讨论。

### 3 基本解

引入下述无量纲量

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{r_2 - r_1}, \quad \zeta = \frac{z}{r_2 - r_1} \\ \lambda &= \frac{l_i}{r_2 - r_1}, \quad L = \frac{l}{r_2 - r_1} \\ V_\lambda(\xi, \zeta) &= v_\theta^{(i)}(r, z) / \frac{I}{4\pi(r_2 - r_1)\sqrt{\sigma\eta}} \\ B_\lambda(\xi, \zeta) &= B_\theta^{(i)}(r, z) / \frac{\mu_0 I}{4\pi(r_2 - r_1)} \\ M &= B_0(r_2 - r_1)\sqrt{\sigma/\eta} \\ R_1 &= \frac{r_1}{r_2 - r_1}, \quad R_2 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \end{aligned} \quad (20)$$

其中下标“ $\lambda$ ”相应于上标“ $i$ ”。将式 (20) 代入式 (10)~(17)，无量纲化的方程和边界条件可表为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, B) &= \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{V}{\xi^2} + \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + M \frac{\partial B}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathcal{L}(B, V) = 0 \tag{22}$$

$$V(R_1, \zeta) = 0 \tag{23}$$

$$V(R_2, \zeta) = 0 \tag{24}$$

$$V(\xi, \pm L) = 0 \tag{25}$$

$$B(R_1, \lambda < \zeta \leq L) = -\frac{1}{R_1} \tag{26}$$

$$B(R_2, \lambda < \zeta \leq L) = -\frac{1}{R_2}$$

$$B(R_1, -L \leq \zeta < \lambda) = \frac{1}{R_1} \tag{27}$$

$$B(R_2, -L \leq \zeta < \lambda) = \frac{1}{R_2}$$

$$B(\xi, \pm L) = \mp \frac{1}{\xi} \tag{28}$$

这说明问题已简化为给定边界条件的椭圆形方程的求解. 流动区域可分成两个区域, 也即

$$\text{区域 I: } R_1 \leq \xi \leq R_2, \lambda \leq \zeta \leq L \tag{29}$$

$$\text{区域 II: } R_1 \leq \xi \leq R_2, -L \leq \zeta \leq \lambda$$

分别在区域 I 和 II 求解, 然后将它们在  $\zeta = \lambda$  处衔接, 由此可求得整个单极机的解.

### 3.1 区域 I 中的解

根据式 (2)~(9), 区域 I 中的方程和边界条件可表为

$$\mathcal{L}(V_\lambda^I, B_\lambda^I) = 0 \tag{30}$$

$$\mathcal{L}(B_\lambda^I, V_\lambda^I) = 0 \tag{31}$$

$$V_\lambda^I(R_1, \zeta) = V_\lambda^I(R_2, \zeta) = V_\lambda^I(\xi, L) = 0 \tag{32}$$

$$B_\lambda^I(\xi, L) = -\frac{1}{\xi}, \quad B_\lambda^I(R_1, \zeta) = -\frac{1}{R_1}, \tag{33}$$

$$B_\lambda^I(R_2, \zeta) = -\frac{1}{R_2}$$

利用 Hankel 变换可得到式 (30)~(33) 的解为 [9]

$$V_\lambda^I(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n [C_{n1}^I (e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + C_{n2}^I (e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) \tag{34}$$

$$B_\lambda^I(\xi, \zeta) = -\frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n [-C_{n1}^I (e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + C_{n2}^I (e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) \tag{35}$$

其中定义

$$\varphi_n(\xi) = J_1(\gamma_n \xi) Y_1(\gamma_n R_1) - J_1(\gamma_n R_1) Y_1(\gamma_n \xi) \tag{36}$$

及

$$\alpha_{n1} = \frac{1}{2}(M + \beta_n), \alpha_{n2} = \frac{1}{2}(M - \beta_n), \tag{37}$$

$$\beta_n = \sqrt{M^2 + 4\gamma_n^2}$$

$$k_n = \frac{\pi^2}{2} \frac{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n R_2)}{J_1^2(\gamma_n R_1) - J_1^2(\gamma_n R_2)} \tag{38}$$

其特征根满足下述条件

$$\varphi(R_2) = 0 \tag{39}$$

系数  $C_{n1}^I$  和  $C_{n2}^I$  可由在  $\zeta = \lambda$  处的衔接条件来确定.

### 3.2 区域 II 中的解

类似地, 区域 II 中的方程和边界条件可表为

$$\mathcal{L}(V_\lambda^{II}, B_\lambda^{II}) = 0 \tag{40}$$

$$\mathcal{L}(B_\lambda^{II}, V_\lambda^{II}) = 0 \tag{41}$$

$$V_\lambda^{II}(R_1, \zeta) = V_\lambda^{II}(R_2, \zeta) = V_\lambda^{II}(\xi, -L) = 0 \tag{42}$$

$$B_\lambda^{II}(\xi, -L) = \frac{1}{\xi}, \quad B_\lambda^{II}(R_1, \zeta) = \frac{1}{R_1}, \tag{43}$$

$$B_\lambda^{II}(R_2, \zeta) = \frac{1}{R_2}$$

式 (40)~(43) 的解为

$$V_\lambda^{II}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n [C_{n1}^{II} (e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + C_{n2}^{II} (e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) \tag{44}$$

$$B_\lambda^{II}(\xi, \zeta) = \frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n [-C_{n1}^{II} (e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + C_{n2}^{II} (e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) \tag{45}$$

### 3.3 衔接条件

流场、磁场和电流在单极机中是连续的. 因此, 衔接条件为

$$V_\lambda^I(\xi, \lambda) = V_\lambda^{II}(\xi, \lambda) \tag{46}$$

$$B_\lambda^I(\xi, \lambda) = B_\lambda^{II}(\xi, \lambda) \tag{47}$$

$$\frac{\partial V_\lambda^I(\xi, \lambda)}{\partial \zeta} = \frac{\partial V_\lambda^{II}(\xi, \lambda)}{\partial \zeta} \tag{48}$$

$$\frac{\partial B_{\lambda}^I(\xi, \lambda)}{\partial \zeta} = \frac{\partial B_{\lambda}^{II}(\xi, \lambda)}{\partial \zeta} \quad (49)$$

于是, 有  $4n$  个条件 (46)~(49) 可用于确定  $4n$  个系数  $C_{n1}^I, C_{n2}^I, C_{n1}^{II}$  和  $C_{n2}^{II}$

$$C_{n1}^I = \frac{a_n}{s_n}(\alpha_{n1}e^{-\alpha_{n2}\lambda} - \alpha_{n2}e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda}) \quad (50)$$

$$C_{n2}^I = \frac{a_n}{s_n}(-\alpha_{n1}e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}L} + \alpha_{n2}e^{\alpha_{n1}\lambda}) \quad (51)$$

$$C_{n1}^{II} = \frac{a_n}{s_n}(\alpha_{n1}e^{-\alpha_{n2}\lambda} - \alpha_{n2}e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda}) \quad (52)$$

$$C_{n2}^{II} = \frac{a_n}{s_n}(-\alpha_{n1}e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\lambda} + \alpha_{n2}e^{\alpha_{n1}\lambda}) \quad (53)$$

其中系数  $a_n$  和  $s_n$  为

$$a_n = \frac{2 R_1 J_1(\gamma_n R_1) - R_2 J_1(\gamma_n R_2)}{\pi \gamma_n^2 R_1 R_2 J_1(\gamma_n R_2)}, \quad (54)$$

$$s_n = \beta_n(e^{\beta_n L} - e^{-\beta_n L})$$

$a_n$  是表达式  $\varphi_n(\xi)$  中  $1/\xi$  项的系数.

将式 (50)~(53) 代入式 (34) 和 (35), 或代入式 (44) 和 (45), 可以分别得到区域 I 和 II 中的基本解.

区域 I 的基本解为

$$V_{\lambda}^I(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{s_n} [(\alpha_{n1}e^{-\alpha_{n2}\lambda} - \alpha_{n2}e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda})(e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + (-\alpha_{n1}e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}\lambda} + \alpha_{n2}e^{\alpha_{n1}\lambda})(e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) \quad (55)$$

$$B_{\lambda}^I(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{s_n} [-(\alpha_{n1}e^{-\alpha_{n2}\lambda} - \alpha_{n2}e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda})(e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + (-\alpha_{n1}e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}\lambda} + \alpha_{n2}e^{\alpha_{n1}\lambda})(e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) - \frac{1}{\xi} \quad (56)$$

区域 II 中的基本解为

$$V_{\lambda}^{II}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{s_n} [(\alpha_{n1}e^{-\alpha_{n2}\lambda} - \alpha_{n2}e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda})(e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + (-\alpha_{n1}e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\lambda} + \alpha_{n2}e^{\alpha_{n1}\lambda})(e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) \quad (57)$$

$$B_{\lambda}^{II}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{s_n} [-(\alpha_{n1}e^{-\alpha_{n2}\lambda} - \alpha_{n2}e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda})(e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{-\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + (-\alpha_{n1}e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\lambda} + \alpha_{n2}e^{\alpha_{n1}\lambda})(e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{-\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta})] \varphi_n(\xi) + \frac{1}{\xi} \quad (58)$$

可以用下述单一公式来表达 I 和 II 两个区域中的基本解

$$V_{\lambda}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{1 - e^{-2\beta_n L}} \left\{ \frac{\alpha_{n1}}{\beta_n} [e^{-\alpha_{n1}(L-\zeta) + \alpha_{n2}(L-\lambda)} + e^{-\alpha_{n1}(L+\zeta) + \alpha_{n2}(L+\lambda)} - e^{-2\beta_n L - \alpha_{n2}|\zeta-\lambda|} - e^{\alpha_{n2}|\zeta-\lambda|}] + \frac{\alpha_{n2}}{\beta_n} [e^{-\alpha_{n1}(L-\lambda) + \alpha_{n2}(L-\zeta)} + e^{-\alpha_{n1}(L+\lambda) + \alpha_{n2}(L+\zeta)} - e^{-\alpha_{n1}|\zeta-\lambda|} - e^{-2\beta_n L + \alpha_{n1}|\zeta-\lambda|}] \right\} \varphi_n(\xi) \quad (59)$$

$$B_{\lambda}(\xi, \zeta) = -\frac{1}{\xi} \operatorname{sgn}(\zeta - \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{1 - e^{-2\beta_n L}} \left\{ \frac{\alpha_{n1}}{\beta_n} [-e^{-\alpha_{n1}(L-\zeta) + \alpha_{n2}(L-\lambda)} + e^{-\alpha_{n1}(L+\zeta) + \alpha_{n2}(L+\lambda)} + \operatorname{sgn}(\zeta - \lambda)e^{\alpha_{n2}|\zeta-\lambda|} - \operatorname{sgn}(\zeta - \lambda)e^{-2\beta_n L - \alpha_{n2}|\zeta-\lambda|}] + \frac{\alpha_{n2}}{\beta_n} [e^{-\alpha_{n1}(L-\lambda) + \alpha_{n2}(L-\zeta)} - e^{-\alpha_{n1}(L+\lambda) + \alpha_{n2}(L+\zeta)} - \operatorname{sgn}(\zeta - \lambda)e^{-\alpha_{n1}|\zeta-\lambda|} + \operatorname{sgn}(\zeta - \lambda)e^{-2\beta_n L + \alpha_{n1}|\zeta-\lambda|}] \right\} \varphi_n(\xi) \quad (60)$$

其中

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (61)$$

注意, 解 (59) 和 (60) 中的指数都是负指数, 而  $\alpha_{ni}/\beta_n$  是有限的, 因此解是收敛的. 其收敛性类似于下述级数的收敛性

$$\frac{1}{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n k_n \varphi_n(\xi)$$

配置单对线电极的单极机的质量流量可通过

流体速度的积分来求得, 也即

$$Q = \frac{I(r_2 - r_1)}{4\pi\sqrt{\sigma\eta}} \int_{R_1}^{R_2} \left[ \int_{-L}^{\lambda} V_{\lambda}^{II}(\xi, \zeta) d\zeta + \int_{\lambda}^L V_{\lambda}^I(\xi, \zeta) d\zeta \right] d\xi \quad (62)$$

将基本解 (55) 和 (57) 中的速度代入上式, 得到

$$\frac{Q}{I(r_2 - r_1)/\pi\sqrt{\sigma\eta}} = \left| \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 k_n \cdot \left[ -\frac{M}{\gamma_n^2} - \frac{1}{2\alpha_{n2}} \frac{1 - e^{-2\alpha_{n1}L}}{1 - e^{-2\beta_n L}} e^{\alpha_{n2}(L-\lambda)} (1 + e^{2\alpha_{n2}\lambda}) + \frac{1}{2\alpha_{n1}} \frac{e^{2\alpha_{n2}L} - 1}{1 - e^{-2\beta_n L}} e^{-\alpha_{n1}(L-\lambda)} (1 + e^{-2\alpha_{n1}\lambda}) \right] \right| \quad (63)$$

显然, 式 (63) 中级数的收敛性要好于式 (55) 和 (57) 中级数的收敛性. 表 1, 表 2 列出了由式 (63) 给出的质量流量的数值.

配置环形线电极的单极机的质量流量要大于整个环形表面都是电极的单极机的质量流量. 例如对于方形截面的单极机, 在大 Hartmann 数下质量流量能提高 6.6%, 在小 Hartmann 数下则提高 10%. 如果截面的高宽比更大的话, 质量流量的提

高更加明显. 因此, 我们认为改变电极的结构能提高单极机的质量流量.

利用速度分布和磁场分布 (59) 和 (60), 可给出电极之间的电位差为

$$\Delta\varphi = \frac{I}{4\pi(r_2 - r_1)\sigma} \left( \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial\beta}{\partial\zeta} d\zeta + M \int_{R_1}^{R_2} V d\zeta \right) \quad (64)$$

经过一些运算, 得到

$$\frac{\Delta\varphi}{I/2\pi\sigma(r_2 - r_1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 k_n}{\beta_n} \left[ -\gamma_n^2 e^{-\beta_n(L-\lambda)} \frac{1 - e^{-2\beta_n\lambda}}{1 - e^{-2\beta_n L}} - \left( \frac{M^2}{2} + \gamma_n^2 \right) \frac{1 + e^{-2\beta_n L}}{1 - e^{-2\beta_n L}} \right] \quad (65)$$

利用式 (65), 不难得到电位差及电路的其他常数.

表 1 在对称平面上配置单对线电极的环形管道的质量流量 ( $R_1 = 1, R_2 = 2, \lambda = 0$ )

$\lambda \backslash M$	0	1/6	1/4	1/3
0.1	0.001 30	0.001 25	0.001 19	0.001 11
1.0	0.012 94	0.012 41	0.011 80	0.011 08
10	0.088 81	0.086 53	0.083 76	0.080 11
30	0.127 70	0.126 22	0.124 35	0.121 65

表 2 方形截面基本解的质量流量 ( $R_1 = 1, R_2 = 2, L = 0.5$ )

$L \backslash M$	0.05	0.10	0.25	0.50	1.00	2.50	5.00	50.0
0.1	0.000 03	0.000 10	0.000 50	0.001 30	0.002 27	0.002 72	0.002 73	0.002 73
1.0	0.000 27	0.001 01	0.005 03	0.012 94	0.022 53	0.027 18	0.027 28	0.027 28
10	0.002 66	0.009 65	0.040 16	0.088 81	0.157 71	0.244 48	0.270 05	0.272 78
30	0.007 15	0.021 08	0.063 72	0.227 70	0.236 90	0.469 25	0.667 59	0.818 34

### 4 $L \rightarrow \infty$ 时单极机的性能

由于磁场的影响, 单极机中磁流体的流动性质要比一般环形管道流动的性质复杂得多, 电流“不愿意”穿过磁场流动, 特别是在大 Hartmann 数的情形下. 因此, 若电极只占环体的部分面积, 环体表面的电磁性质将有较大的改变. 这时电流和速度将扩展进入整个空间, 远不止电极范围. 这是此类不连续边界的典型反应 [23].

若  $\lambda = 0, L \rightarrow \infty$ , 方程 (59) 和 (60) 简化为

$$V_{\infty}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n k_n}{\beta_n} (\alpha_{n1} e^{\alpha_{n2}|\zeta|} + \alpha_{n2} e^{-\alpha_{n1}|\zeta|}) \varphi_n(\xi) \quad (66)$$

$$B_{\infty}(\xi, \zeta) = \left[ -\frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{\beta_n} (\alpha_{n1} e^{\alpha_{n2}|\zeta|} - \alpha_{n2} e^{-\alpha_{n1}|\zeta|}) \varphi_n(\xi) \right] \text{sgn}(\zeta) \quad (67)$$

其中下标  $\infty$  表示  $L \rightarrow \infty$ . 式 (66) 和 (67) 中的指数也都是负指数, 展现了衰减和扩展的特性. 通过量级估计, 典型的衰减长度  $d / (r_2 - r_1)$  可给出为

$$\frac{d}{(r_2 - r_1)} = \max \left\{ O\left(\frac{1}{\alpha_{n1}}\right), O\left(-\frac{1}{\alpha_{n2}}\right) \right\} \quad (68)$$

由于级数是收敛的, 存在着一个正数  $N$ , 使得  $n > N$  的求和值任意小. 于是, 对于足够大的  $M/2\gamma_n$ , 有

$$\alpha_{n1} = M + \frac{2\gamma_n^2}{M} + O\left(\frac{\gamma_n^4}{M^3}\right) \quad (69)$$

$$\alpha_{n2} = -\frac{2\gamma_n^2}{M} + O\left(\frac{\gamma_n^4}{M^3}\right) \quad (70)$$

因此，大 Hartmann 数下典型的扩展长度主要由  $\alpha_{n2}$  确定，其数量级为

$$\frac{d}{r_2 - r_1} = O\left(\frac{M}{2\gamma_n^2}\right) \quad (71)$$

或

$$\frac{d}{r_2 - r_1} = O\left(\frac{M}{2\gamma_1^2}\right) \quad (72)$$

如果取第 1 个指数系数 ( $n = 1$ )，式 (72) 的结果要比文献 [23] 的结果小，他的结果是

$$\left(\frac{d}{r_2 - r_1}\right) = O(M) \quad (73)$$

在小 Hartmann 数情形，如果

$$M < 2\gamma_n \quad (74)$$

有

$$\alpha_{n1} = \gamma_n + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{4\gamma_n} + O\left(\frac{M^4}{16\gamma_n^3}\right) \quad (75)$$

$$\alpha_{n2} = -\left(\gamma_n - \frac{M}{2} + \frac{M^2}{4\gamma_n}\right) + O\left(\frac{M^4}{16\gamma_n^3}\right) \quad (76)$$

这时式 (66) 或 (67) 两方程的右端项具有相同的数量级，于是，典型的扩展长度的量级可给出为

$$\left(\frac{d}{r_2 - r_1}\right) = O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right) \quad (77)$$

这意味着在小 Hartmann 数下也存在着扩展现象。该长度与  $M$  无关而正比于  $(r_2 - r_1)$ 。

图 3 和图 4 给出了环体表面  $\xi = 1.5$  处的速度分布和感应磁场，展示了扩展现象。

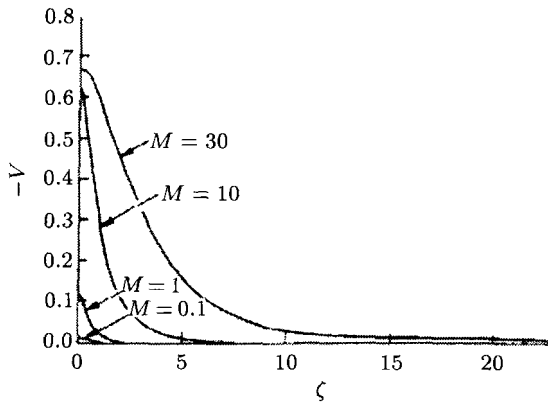


图 3 单极机中  $\xi = 1.5$  处的速度分布 ( $L \rightarrow \infty$ ,  $R_1 = 1, R_2 = 2$ )

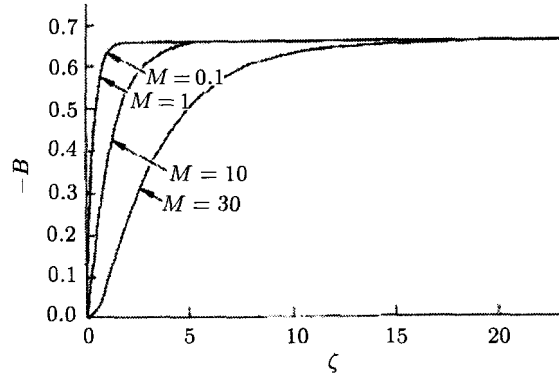


图 4 单极机中  $\xi = 1.5$  处的感应磁场分布 ( $L \rightarrow \infty$ ,  $R_1 = 1, R_2 = 2$ )

这点与式 (72) 和 (77) 的估计是一致的。由图 4 可见，当  $z$  大于扩展长度时感应磁场的梯度，以及电流，将下降并趋于零。图 5 给出了大 Hartmann 数下的速度分布。在对称面  $\zeta = 0$  附近，电极边界层很明显。当  $z$  增加时，由于黏性效应，速度峰值向  $\xi = 1.5$  平面移动而速度剖面变得更趋向于抛物线。一般说来，Hartmann 流具有类似的性质。

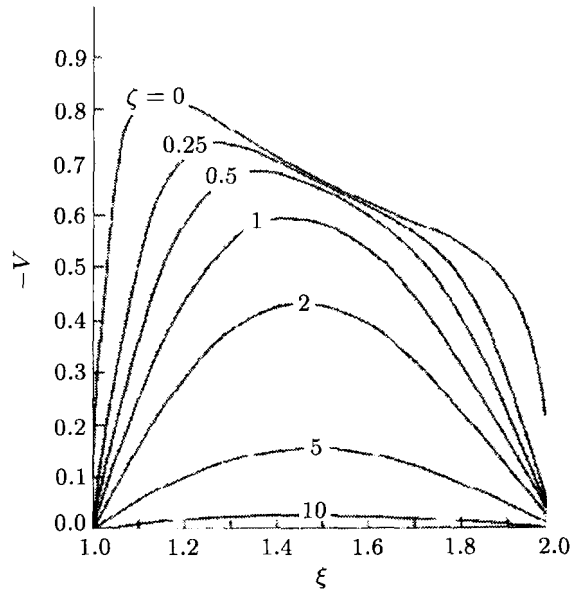


图 5 大 Hartmann 数时的速度分布 ( $\lambda = 0, L \rightarrow \infty$ ,  $R_1 = 1$  and  $R_2 = 2$ )

### 5 基本解的性质

根据式 (59) 和 (60)，一旦知道了  $\lambda$ ，就可以求得速度、磁场及其他参量。在下列参数下计算了基本解

$$M = 0.1, 1, 10, 30$$

$$L = 2.5, 0.5, 0.1$$

$$\lambda = 0, 1/3, 1/2, 2/3$$

计算中各个级数都计及了 100 多项。

典型算例是一对位于对称面的线电极, 相应于  $L = 0.5$  和  $\lambda = 0$ 。

与一般单极机相比, 其边界层结构明显有所改善, 如图 6 所示。Hartmann 边界层的厚度与  $r$  有关, 靠近电极时  $z$  方向的速度梯度很小。因此, Hartmann 边界层厚度在  $\xi = 1.5$  附近较小, 在其两端逐渐增加。原因是电流扩展到管道中央而不局限于薄层内。因此, 在环形线电极情形下, 电流分布以及流体的加速度, 相对来说不会集中于局部薄层之内。

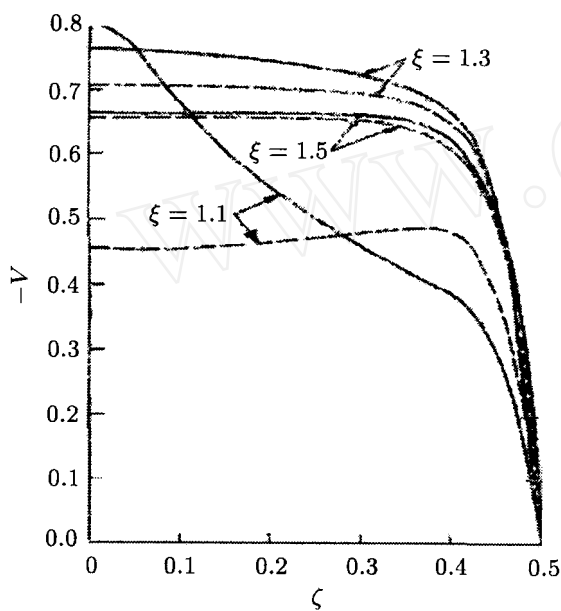


图 6 单极机中的速度分布 ( $L = 0.5$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ 。实线为线电极的结果, 虚线为完全电极的结果)

另一方面, 整个电流必须流经线电极, 因此电极附近的电流密度相对较大, 那里的流体能被加速到较高的速度。流体越靠近电极, 其速度也越高。对称面上的速度总是大于完全电极单极机中对称面上的速度。由于 Hartmann 边界层厚度变厚以及对称面上速度的增加, 单极机的性能得到改善。改善之一就是质量流量的增加, 后面的讨论还会涉及这点。

若 Hartmann 数不大, 例如  $M \leq 1$ , 感应磁场剖面与电流剖面都几乎不变。但速度与 Hartmann 数  $M$  成正比。小 Hartmann 数情形下, 典型扩展距离较小, 质量流量比完全电极单极机的质量流量要大。

还计算了不同结构下的一些基本解。(靠近电极的)  $\xi = 1.1$  处的速度分布示于图 7 中。明显可见速度在靠近电极处有一极值, 在其两端逐渐下降。图 8 给出了基本解在  $z$  方向的速度剖面, 各个  $\lambda$  值下都可清晰看到 Hartmann 边界层的特性。

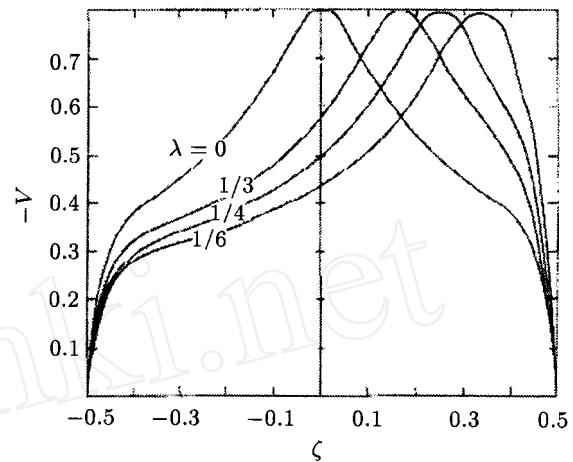


图 7 单极机中处的速度分布 ( $L = 0.5$ ,  $M = 30$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ )

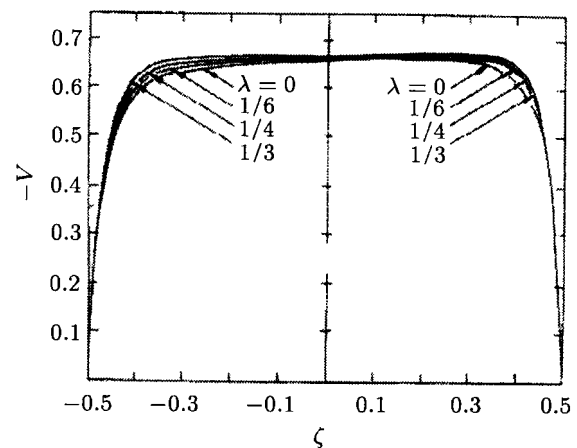


图 8 基本解的速度分布 ( $\xi = 1.5$ ,  $M = 30$ ,  $L = 0.5$ ,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ )

长宽比对速度分布的影响示于图 9 和图 10, 前者是大长宽比, 而后者是小长宽比。小长宽比时, 由于装置的长度小, 扩展效应较弱, 边界影响仍然明显。此时质量流量相对于完全电极情形的增加量较少, 如表 1 所示。大长宽比时, 扩展效应较强, 速度剖面得到改善, 速度和质量流量的增加很明显。如上所述, 在给定的几何结构下扩展距离与 Hartmann 数有关, 这点对于无限长环形管道具有典型意义。

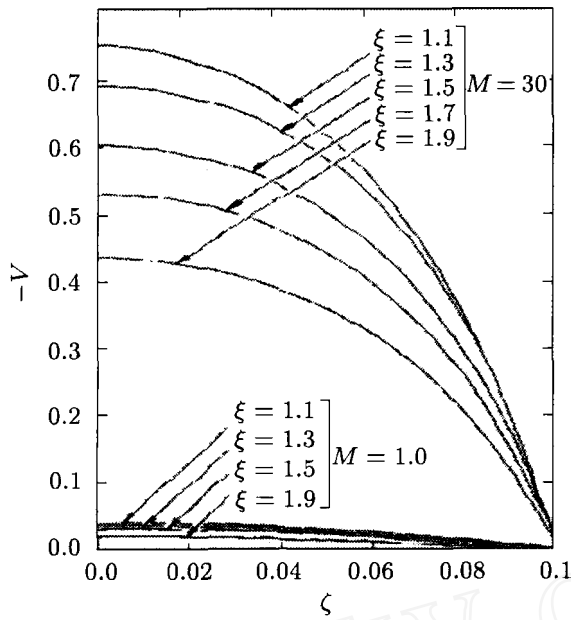


图 9 大长宽比时基本解的速度分布  $\lambda = 0$ ,  $L = 2.5, R_1 = 1, R_2 = 2$

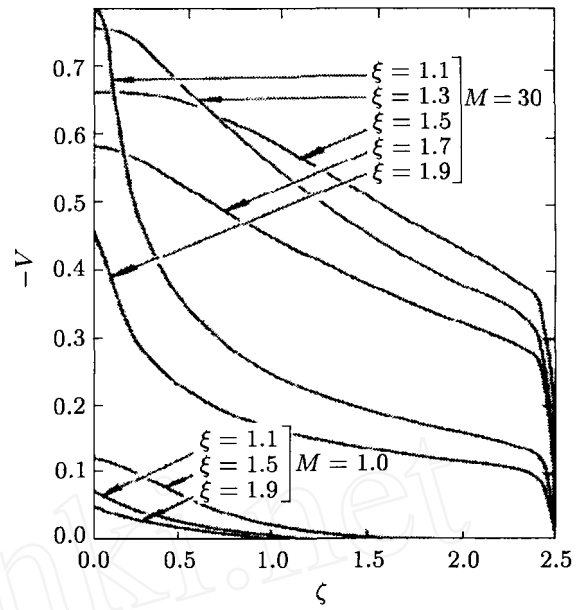


图 10 小长宽比时基本解的速度分布  $\lambda = 0$ ,  $L = 0.1, R_1 = 1, R_2 = 2$

因此, 当长宽比增加时, 质量流量的增加趋于某一极限值, 如表 1 所示. 另一方面, 在小 Hartmann 数时扩展距离正比于 Hartmann 数, 质量流量会有大的增加. 通过考虑单极机中的扩展过程, 解释质量流量的各种性质.

### 6 配置多对线电极的单极机

配置了多对线电极的单极机, 其解可通过满足条件 (1) 的基本解的叠加来得到. 然而, 电流分布将由于每对电极的外电路参数而有所调整. 这种单极机的性质类似于配置单对电极的单极机的性质.

可应用基本解来讨论配置了完全电极的单极机, 引入满足下列条件的分布函数  $\rho(\lambda)$

$$\int_{-L}^L \rho(\lambda) d\lambda = 1 \quad (78)$$

可得到单极机中的速度和感应磁场如下

$$V(\xi, \zeta) = \int_{-L}^L \rho(\lambda) V_\lambda(\xi, \zeta) d\lambda \quad (79)$$

$$B(\xi, \zeta) = \int_{-L}^L \rho(\lambda) B_\lambda(\xi, \zeta) d\lambda \quad (80)$$

因此, 解是在给定分布函数情况下得到的, 最简单的例子是电流的均匀分布. 这时电流的分布函数是

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2L} \quad (81)$$

将式 (81) 代入式 (79), 求得速度为

$$V(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n k_n}{\beta_n L (1 - e^{-2\beta_n L})} \left\{ \left[ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{n2}} \text{sh}(\alpha_{n1} L) - \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{n1}} e^{-\beta_n L} \text{sh}(\alpha_{n2} L) \right] \text{ch}(\alpha_{n1} \zeta) + \left[ -\frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{n2}} e^{-\beta_n L} \text{sh}(\alpha_{n1} L) + \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{n1}} \text{sh}(\alpha_{n2} L) \right] \text{ch}(\alpha_{n2} \zeta) \right\} \varphi_n(\xi) \quad (82)$$

类似地, 将式 (81) 代入式 (80), 可求得感应磁场. 文献 [21] 曾讨论过电流均匀分布的结果.

对于连续电极的单极机, 需要合适的电极边界条件, 也即在两个电极上分布函数必须是相同的. 若电极是良导体, 电极处的边界条件要求

$$\left. \frac{\partial \xi B(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=R_i} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (83)$$

此边界条件也能写为

$$\int_{-L}^L \rho(\lambda) B_\lambda(R_i, \zeta) d\lambda + R_i \int_{-L}^L \rho(\lambda) \cdot \frac{\partial B_\lambda(R_i, \zeta)}{\partial \xi} d\lambda = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (84)$$

这时, 分布函数由电极处的边界条件来确定. 这是另一种求解完全连续电极的单极机的方法 [9].



类似的想法还曾用于讨论线性管道中的磁流体力学流动。

**致 谢** 作者首先要感谢已故的郭永怀教授的指导, 是他的建议让作者进入了这个领域. 还要感谢 Y. X. Qin 教授和潘良儒教授的有益讨论. 感谢 W. R. Sears 教授阅读本文的初稿并给予评论.

### 参 考 文 献

- 1 胡文瑞. 磁流体力学离心机的基本原理及应用于分离同位素. 研究与学习, 1964, 4: 74
- 2 Gross R A, Kessey K O. Magnetohydrodynamic species separation in a gaseous nuclear rocket. *AIAA J*, 1964, 2: 295~301
- 3 Lewellen W S. In: Proc. Magnetohydrodynamically driven vortices. *Heat Transfer and Fluid Mech.*, 1960, 1
- 4 Bonnevier B. Diffusion due to ion-ion collisions in a multicomponent plasma. *Ark Fysik*, 1967, 33: 255~270
- 5 Bonnevier B. Experimental evidence of element and isotope separation in a rotating plasma. *Plasma Phys*, 1971, 13: 763~774
- 6 Okada O, et al. Separation of uranium isotope by plasma centrifuge. *J Nucl Sci Tech*, 1973, 10: 626~631
- 7 Kaneko O, et al. Mass separation experiment with a partially ionized rotating plasma. *Plasma Phys*, 1978, 20: 1167~1178
- 8 胡文瑞. 矩形截面直管的磁流体力学流动. *力学*, 1977, 13(4): 283~293
- 9 胡文瑞. 部分电极结构单极机的磁流体力学一维流动理论. *力学学报*, 1979, 15(1): 27~41
- 10 胡文瑞. 薄层放电的磁流体力学旋转流动分析. *力学学报*, 1979, 15(2): 189~192
- 11 胡文瑞. 电磁离心分离装置的三元流理论. *原子能科学技术*, 1979, 3: 238~247
- 12 胡文瑞. 电磁离心分离装置中霍耳电统的影响. *原子能科学与技术*, 1981, 5: 628
- 13 Gorlgiev G V. *J Theoretical Phys*, 1958, 28: 2046(in Russian)
- 14 Braginskii S E. Magnetohydrodynamics of weakly conducting fluids. *J Experimental and Theoretical Phys*, 1959, 37: 1417 (in Russian)
- 15 Baylis J A, Hunt J C R. MHD flow in an annular channel; theory and experiment. *J Fluid Mech*, 1971, 48: 423~428
- 16 Yargin V S. *J Theoretical Phys*, 1962, 32: 883
- 17 Chang C C, Lundgren T S. The flow of an electrically conducting fluid through a duct with transverse magnetic field. *Phys Fluid*, 1959, 2: 627~632
- 18 Alpher R A, Hurwitz H. Some Studies of Free-Surface Mercury Magnetohydrodynamics. *Rev Mod Phys*, 1960, 32: 758~769
- 19 Kessey K O. Rotating electrically conducting fluids in a long cylinder. *AIAA J*, 1964, 2: 864~871
- 20 Gorlgiev G V. *J Theoretical Phys*, 1961, 31: 271(in Russian)
- 21 Hsueh P C, Alma M. One-dimensional viscous magnetohydrodynamic flow in an annulus. *AIAA*, 1969. 69~725
- 22 Schwertzer S, Soler A I. One dimensional viscous magnetofluiddynamic flow in an annulus. *AIAA* 2004-11-03, 1969. 69~725
- 23 Moffatt J H K J. *Applied Mechanics. Proc. 11th Intern. Cong.* 1966

(中国科学院力学研究所 陈允明 译自

钱伟长编, *The Advances of Applied Mathematics and Mechanics in China*. Beijing: China Academic Publishers, 1987. 65~87)

## MHD FLOW IN A HOMOPOLAR DEVICE WITH ANNULAR WIRE ELECTRODES

HU Wenrui<sup>†</sup>

Key Laboratory of Microgravity Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

**Abstract** The magnetohydrodynamic flow in a homopolar device with annular linear electrodes is studied analytically. As the problem is linear, the solution may be reduced to the summation of elementary solutions obtained by matching the local solutions in two regions or the homopolar device. The flow features of the elementary solutions are discussed. The structure of incomplete electrodes can improve the Hartmann boundary layer and increase the mass flux of the homopolar. The elementary solutions are also applied to the discussion of a homopolar device with continuous electrodes.

**Keywords** homopolar device, annular linear electrode, magnetohydrodynamic flow, elementary solution

<sup>†</sup> E-mail: wrhu@imech.ac.cn

后记：我于 1958 年毕业于北京大学数学力学系流体力学专业。在毕业前，先是被划为右派的同学离开了学校，接着是政治条件审查合格的一批同学被分配到的国防部门。我接到通知，分配到中科院动力研究室，据说是参加吴仲华先生领导的冲压发动机研究。因为有海外关系等问题，不久就转到吴承康先生领导的燃烧组。1960 年吴先生带着我们搞磁流体力学直接发电，我开始接触磁流体力学。同年，动力室合并到力学所，政治条件合格的人大多充实到分部，从事国防研究，我被归纳到郭所长负责的磁流体力学室。1958 年分配到力学所的同班同学大都转到中科院的技校作老师，我转了一个圈到了力学所，并能跟着郭所长工作，实在是机会难得，暗下决心一定要珍惜。

六室的主任是郭所长，副主任是徐复先生。徐复先生的夫人是北大教过我数学分析的老师，我把徐复先生也当老师看待。室里还有潘良儒先生和郭所长的研究生康寿万先生等一批专家，如此优越的条件使我在学术上受益非浅。郭所长明智地中止了磁流体力学发电的工作，他认为普通流体的电导率太低，发电的效率低；如果受控热核反应成功，这种发电方式会有价值。郭所长叫我们认真读了几本书，然后给我出了第一个研究课题，就是磁流体力学管道流，也就是现在这篇文章。

磁流体力学管道流是 20 世纪 50 年代末和 60 年代初十分活跃的研究课题，国外电子计算机已经发展起来，计算这种题目并不太难。我用级数解求解这个问题，用手摇计算机算出具体解，用了不到一年时间完成了这个课题。应该说，这个解法有独到之处。但工作完成后郭所长也不说推荐发表，接着又给我出了第 2 个研究课题。以后，我发表了几篇磁流体管道流的文章，但这篇文章一直没有动。1981 年我去美国工作，郭所长在 Cornell 大学工作时航空研究院的 W.R. Sears 教授叫我去 Arizona 大学看他，当时郭芹也在 Tucson。我把这篇文章给他看，他认真地帮我一句句地修改了一遍，还送我一本他的论文集，里边有好几篇磁流体力学管道流的文章。后来，钱伟长先生要出一本英文的“应用数学和力学”的论文集，我就把这篇文章送到文集中正式发表。

这篇文章是我在郭所长指导下从事研究的习作，有太多的纪念意义。谨以此文纪念郭所长诞辰 100 周年，感谢他对我的关心和指导，教我如何做研究，这是我受用一生的瑰宝。