术语杂谈

说说“量纲”和“量纲一”

谈庆明 1)

(中国科学院力学研究所，北京 100190)

不久前，王振东给朱照宣写信说道：“我那本《诗情画意谈力学》在出版时，曾对‘无量纲数’一事与出版社有过讨论．”“我指出：某页某行，将‘无量纲化’、‘无量纲的’错为‘量纲一化’、‘量纲一的’．这已经是概念性错误了．”回函称：“根据现在的‘物理量和单位’的标准，凡是‘无量纲’的说法现在都改为‘量纲为 1’这种说法了，就是说无量纲的量并不是没有量纲，而是它的量纲是单位 1．这是现在法制推行的国家标准，遇到时必须要改．”

朱照宣先生收到信以后，很快就转给了我，并要我为《力学与实践》写篇短文，把量纲和单位等几个基本术语和概念说说清楚．

我查了上面提到的国家标准，其中的确清楚地说明了，把没有量纲的量的量纲说成是 1 的来由；并提出了“量纲一”的说法，且指出：10^{-6} 的缩写“ppm 不是量纲一的单位的专门名称”．后面一句话既绕嘴又含混．10^{-6} 是个纯数，既没有任何属性，更谈不上是单位，所以标准中的这种说法确实是“概念性错误”．

这里先简单回溯一下历史，大家公认傅立叶 (J.Fourier) 是量纲和量纲分析的开创者．他在 1822 年出版的“Theorie Analytique de la Chaleur(热的分析理论)”一书中，首次提出下述量纲齐次性的观点．他说：“每一个待定的量或常量具有属于它自己的量纲，而且同一个方程中的各项是不能比较的，如果它们的量纲的幂次是不相同的话．”他又说：“(这一齐次性的观点) 源自对量的原始诠释；因此，在几何学和力学中，这等价于希腊人未作证明留给我们的基础 (公理)．”

下面要从量纲的定义说起．量纲最简明的定义是量的属性，在物理中就是一个物理量的属性．讨论一个物理问题或工程问题，必然涉及到多个物理量，首先应该明确每个物理量的属性，只有在这个基础上，才能进一步分析问题，分析问题中各量之间的关系．

最简单的分析乃是比较量的大小．要注意，只有具有同样属性的量才能比较大小，而一个量自己是无所谓大小的．长度量只能和长度量比，长度量不能和面积量 (长度量的平方) 比；长度量和时间量也是不能比较的．在做比较的情况下，就引入了“单位”这个概念．在比较量纲相同的两个量 X_1 和 X_2 的大小时，可以把其中任意一个量作为单位，记作 U．那么就有两种可能，即：

(1) 取 X_2 作单位来度量 X_1，那么 U 就是 X_2，则有 $X_1 = x_1U = x_1X_2$，其中，x_1 乃是 X_1 与单位 X_2 相比的倍数，是个纯数．

(2) 取 X_1 作单位来度量 X_2，那么 U 就是 X_1，则有 $X_2 = x_2U = x_2X_1$，其中，x_2 乃是 X_2 与单位 X_1 相比的倍数，也是个纯数．显然，x_1 与 x_2 互为倒数．可以看出，倍数 x_1 与 x_2 都是纯数，而纯数是没有物理属性的．

如果我们讨论数学问题，那么大家知道数学是关于数和形的科学．这里的数均无任何属性，而这里的形，则是指几何形状，涉及长度、面积、体积诸量，它们的属性依次是长度、长度的平方以及长度的立方．我们规定将一个量 X 的量纲用方括号来表示，即 $[X]$．

讨论一个长方体，它有长 l_1、宽 l_2 和高 l_3；它有 6 个表面，上下、左右和前后 3 对表面积分别是 l_1l_2, l_2l_3 和 l_3l_1；它的体积是 $l_1l_2l_3$．谈到这些量的量纲，可以看出，长、宽和高都是长度量，其属性均为长度，或者说，它们的量纲就是长度，并用英文字 Length 的第一个大写字母 L 来表示，即可记为

$$[l_1] = \mathrm{L}, \quad [l_2] = \mathrm{L}, \quad [l_3] = \mathrm{L}$$

根据面积和体积的定义，显然表面积的量纲是长度的乘积，即长度的平方，而体积的量纲则是长度的立方，即可分别记为

$$[l_1l_2] = \mathrm{L}^2,\ [l_2l_3] = \mathrm{L}^2,\ [l_3l_1] = \mathrm{L}^2, \text{以及}\ [l_1l_2l_3] = \mathrm{L}^3$$

显然，长、宽、高和表面积以及体积之间，是不能互相比较的，它们的量纲虽然都和长度有关，但是相应的幂次是不相同的．

讨论一个运动学的问题，涉及到位移量 l 和时间量 t，以及速度量 v 和加速度量 a 等．这类问题与几何学问题相比，多了一类时间量，其属性是时间，并用英文字 Time 的第一个字母 T 来表示，可记时间量的量纲为

$$[t] = \mathrm{T}$$

按照速度和加速度的定义，速度量 v 和加速度量 a 的量纲可记为

$$[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \qquad [a] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}$$

讨论一个动力学的问题，涉及到加速度的原因，于是牛顿总结出著名的牛顿第二定律，即 $f = ma$．这一定律引入了力 f 和质量 m 这两个物理量．如果将它们的量纲分别记为

$$[f] = \mathrm{F}, \qquad [m] = \mathrm{M}$$

(下转第 103 页)

本文于 2008-11-28 收到．

1) 谈庆明，研究员，博士生导师．主要研究方向为爆炸力学，岩土力学，量纲分析学．E-mail: qmtan@hotmail.com

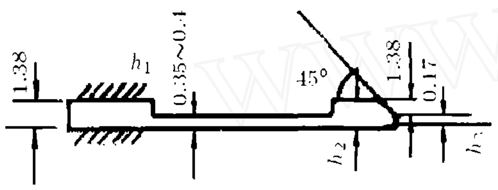
设 $\delta = \bar{\delta}\sin\omega t$，代入式 (9)，得特征方程

$$(\bar{\boldsymbol{K}} - \omega^2\bar{\boldsymbol{M}})\bar{\delta} = 0 \tag{10}$$

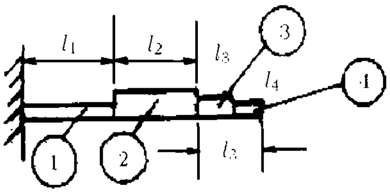
上式有非零解的条件为

$$\det(\bar{\boldsymbol{K}} - \omega^2\bar{\boldsymbol{M}}) = 0 \tag{11}$$

非连续载面音键的梁单元划分方法如图 9 所示. 用雅可比 (Jacobi) 方法，添加一个前处理程序，输入音键的形状、尺寸、材料等参数：$l_1 = 11.5\,\mathrm{mm}$，$l_2 = 4.67\,\mathrm{mm}$，$l_3 = (h_2 - h_3)/\tan\alpha$，$h_1 = 0.4\,\mathrm{mm}$，$h_2 = 1.38\,\mathrm{mm}$，$h_3 = 0.17\,\mathrm{mm}$，$\alpha = 45^\circ$，$\rho_1 = 7\,700\,\mathrm{kg/m^3}$，$E = 2\times10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$，按 SAP5 软件，就可以在计算机上运算，可得各个音键的各阶固有振动频率. 由此也可以看出有限元方法的通用性很强，可以计算一切复杂形状的音键的固有频率.



(a)

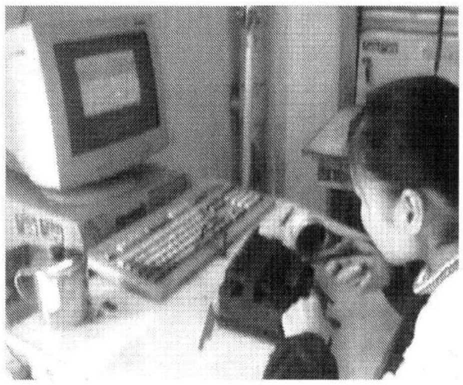


(b)

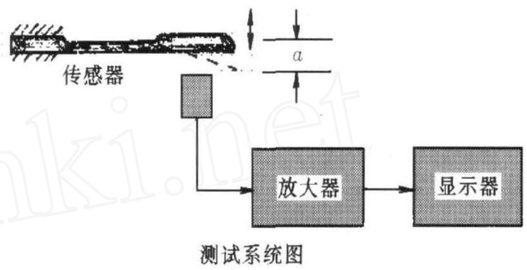
图 9　非连续载面音键的梁单元划分

6　八音琴振动测试与调谐

八音琴的每个音键的固有频率均需实测，然后选择灵敏点进行磨削，使它固有频率与对应的乐音频率相同才合格，见图 10.



(a)



(b)

图 10　八音琴的振动测试与调谐

7　结束语

上述研究说明八音琴与基础力学密切相关，也是多种力学在八音琴中的实践. 同样，也可以在另外许多产品，如：卫生洁具、玩具、各种车辆、各种飞机等，找到与基础力学密切相关的应用与实践. 力学的充分应用，可成为提高产品质量的重要途径.

参　考　文　献

1 竺韵德，庄表中等. 八音琴设计与音片的振动. 北京：新时代出版社，1996

2 竺韵德，庄表中. 八音琴音片的研究与制造. 中国机械工程，1995, 6(S1): 52~63

(上接第 107 页)

其中，F 和 M 分别是英文字 Force 和 Mass 的第一个字母，那么 F 和 M 这两个量纲不是相互独立的. 根据牛顿第二定律，它们可以相互表示，利用加速度 a 的量纲是 $\mathrm{L/T^2}$，可以分别表示为

$$[\mathrm{F}] = \mathrm{M}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2},\quad [\mathrm{M}] = \mathrm{F}\Big/\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}$$

在物理和工程问题中，免不了涉及一些纯数，包括刚才讲的倍数，还有用弧度表示的角度量 (实际上角度是用弧长和半径的比值来定义的)，还有自然数、实数、复数以及一些通用的常数 e 和 π 等等. 这些纯数都没有任何属性或没有量纲，为了区别于其他有属性或有量纲的量，那么在力学中怎么用符号来记它们的量纲呢？既然它们的属性与力学中最基本的量纲均无关系，便借用数学的语言，也按前面所用的幂次表示的方式，记为 $[\mathrm{e}] = \mathrm{L^0M^0T^0}$，$[\pi] = \mathrm{L^0M^0T^0}$，等等. 意思是说，e 和 π 等纯数的量纲与长度、质量和时间均无关系，干脆继续借用数学的语言，即任何一个幂次为零的数就是 1，将没有任何属性的量的量纲记为 1，例如：$[\mathrm{e}] = \mathrm{L^0M^0T^0} = 1$，$[\pi] = \mathrm{L^0M^0T^0} = 1$，等等. 并且把这些纯数称之为没有量纲的量，简称为无量纲量. 但是，这里要注意，将纯数的量纲记为 1 不等于说纯数的属性是 1，不能说它的量纲是一. 纯数没有属性，也可以说，纯数没有量纲，是无量纲的量.

至于说到的“无量纲化”，乃指：将一个包含有量纲的多个物理量之间的函数关系，转化为物理实质相同但是由无量纲量组成的函数关系. 这是分析问题中极为本质的一步. 这里就不详细说了.

综上所述，量纲乃是一个量的属性，没有任何属性的纯数被称为无量纲量，或简单地把它的量纲记为 1. 至于量纲和单位，它们完全是两个不同的概念，决不能说什么“… 量纲是单位 1”，量纲只是属性，论属性就谈不上单位.