

# 双翼振动的预处理数值方法和性能研究 (一)

王涛<sup>1</sup>, 刘鹏飞<sup>2</sup>, 杨国伟<sup>3</sup>

<sup>1</sup>康迪斯创科技股份有限公司, 北京, 100080

<sup>2</sup>加拿大科学院海洋技术研究所, 加拿大纽芬兰, 120932

<sup>3</sup>中国科学院力学研究所, 北京 100080

**文 摘:** 本文在多块耦合隐式求解方法的基础上, 引入了预处理计算方法, 使方程的各个特征值之间互相平衡, 降低了方程系统的刚性, 提高了数值方法的适应能力, 通过 5m/s 圆柱绕流的计算结果与试验数据验证, 得到了数值结果误差小于 5% 的工程允许范围。

**关键词:** NS 方程, 预处理方法, 数值模拟。

## Preconditioning Numerical Method and Performance Investigation of Plunging Dual-Foils (1)

Tao Wang<sup>1</sup>, Liu Pengfei<sup>2</sup>, Guowei Yang<sup>3</sup>

<sup>1</sup>CDSTR Tec. Co. Ltd., Beijing, 100080

<sup>2</sup>Institute for Ocean Technology, National Research Council Canada, NL, A1B 3T5

<sup>3</sup>Institute of Mechanics, Chinese academy of science, Beijing 100080

**Abstract:** A preconditioning method is introduced to the NS solver based on the dual-time iteration for unsteady compressible flows. This method balances the eigenvalues of NS equations, reduces the stiffness of compressible NS solver for low-speed flow, and increases the capabilities of the solver for low speed flow. By comparing the numerical results for the flow around cylinder at 5m/s with the experiment data, a good agreement was obtained with a discrepancy of about 5%.

**Keywords:** NS equations, preconditioning method, CFD.

### 引 言

利用可压的非定常多块网格隐式耦合求解程序研究低速流场问题, 必须引入预处理方法, 而在时间相关方程中, 由于马赫数和雷诺数的影响, 系统表现了很强的刚性。对于 Euler 方程 (当  $Re = \infty$ ), 刚性的程度取决于条件数 (Characteristic Condition Number, 定义为最大和最小特征速度的比值), 在  $M \rightarrow 0$  或者  $M \rightarrow 1$  时, 条件数由于最小特征速度很小而变成无穷大, 这就使得任何时间步进方法的收敛性大大降低。另外, 低马赫数时标准的离散方法不能保证精度。在 NS 方程中, 粘性耗散尺度迭加到波传播时间尺度, 产生了更强的刚性。

预处理方法处理方程的目的在于平衡方程内在的时间尺度, 通过改变时间导数, 使得用数值方法来求解方程时能更有效、更精确。最一般的预处理方法通过在方程的时间导数前乘一个正定的矩阵, 从而改变了时间相关法的瞬态时间特性, 但是并不是影响方程的定常解, 至少, 这一结论在偏微分方程基础上的分析是成立的。

本文是在非定常多块网格隐式耦合求解程序的基础上引入预处理方法, 采用的是双时间步推进, 外层时间代表物理意义上的真实时间, 每一个物理时间步的结果作定常问题的收敛

**基金项目:** 国家自然科学基金项目 (40576047)。

**作者简介:** 王涛, 男, 山东人, 博士后, 高级工程师, 从事海洋船舶流体力学和空气动力学方面的研究。  
Email: [fluidy888@gmail.com](mailto:fluidy888@gmail.com), 通讯联系人: 刘鹏飞 研究员, Email: [Pengfei.Liu@nrc-cnrc.gc.ca](mailto:Pengfei.Liu@nrc-cnrc.gc.ca)。

解得到, 这样就可以在内层时间中加入预处理, 满足了时间精度的要求, 又在低速问题时提高内层时间迭代的收敛效率。通过二维问题的试验验证结果对比, 发现误差在工程允许范围之内。从而利用这一方法对摆翼地效推进器进行了推力和推进性能的分析。

## 1 NS 方程的预处理过程

### 1.1 本文 NS 方程的无量纲参数为

$$(a) P_{ref} \sim P_{\infty}, (b) \rho_{ref} \sim \rho_{\infty}, (c) T_{ref} \sim T_{\infty}, (d) a_{ref} \sim \frac{a_{\infty}}{\sqrt{\gamma}},$$

$$(e) e_{ref} \sim \rho_{ref} a_{ref}^2 = \frac{\rho_{\infty} a_{\infty}^2}{\gamma} \quad (1)$$

$$\text{状态方程: } P = \rho T, \text{ 无量纲声速: } a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (2)$$

无量纲来流条件:

$$P = 1, \rho = 1, T = 1, U^* = \sqrt{\gamma} Ma \quad (3)$$

$$\text{动量扩散系数 } \frac{\sqrt{\gamma} Ma}{R_e} \mu \quad (4)$$

$$\text{温度扩散系数 } \frac{\sqrt{\gamma} Ma}{R_e} \cdot \frac{\gamma}{(\gamma-1)P_r} \mu \quad (5)$$

### 1.2 预处理的双时间步方法

N-S 方程组是一个描述流体流动的通用性方程组, 有很多种不同的形式, 选取的量纲不同或者选取的坐标轴不同都是不一样的, 即使这样由于考虑的问题不同, 也是有不同的形式的。对于数值模拟, 需要将各个物理量进行无量纲化, 同时由于本文工作中研究的问题的需要, 选择的是直角坐标系, 故微分形式的三维非定常 N-S 方程组可以表示为:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\zeta}} = \frac{\sqrt{\gamma} Ma}{Re} \left( \frac{\partial \hat{F}^v}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{G}^v}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial \hat{H}^v}{\partial \hat{\zeta}} \right) \quad (6)$$

或者

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{\eta}} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{\zeta}} = L(Q_v) \quad (7)$$

式中的各项意义,

$$\hat{Q} = J^{-1} Q = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{bmatrix}; \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho U u + \xi_x p \\ \rho U v + \xi_y p \\ \rho U w + \xi_z p \\ \rho U h_t - \xi_t p \end{bmatrix}; \quad \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho V u + \eta_x p \\ \rho V v + \eta_y p \\ \rho V w + \eta_z p \\ \rho V h_t - \eta_t p \end{bmatrix};$$

$$\hat{H} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho W u + \zeta_x p \\ \rho W v + \zeta_y p \\ \rho W w + \zeta_z p \\ \rho w h_t - \zeta_t p \end{bmatrix}; \quad \hat{F}^V = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x \phi_x + \xi_y \phi_y + \xi_z \phi_z \end{bmatrix};$$

$$\hat{G}^V = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \phi_x + \eta_y \phi_y + \eta_z \phi_z \end{bmatrix}; \quad \hat{H}^V = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \phi_x + \zeta_y \phi_y + \zeta_z \phi_z \end{bmatrix};$$
(8)

或者

$$\hat{F}, \hat{G}, \hat{H} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + l_x p \\ \rho v V_n + l_y p \\ \rho w V_n + l_z p \\ \rho h_t V_n - l_t p \end{bmatrix}, \quad V_n = u l_x + u l_y + u l_z$$
(9)

双时间步法在每一时间步需要用迭代方法消除由于线化和因式分解所带来的误差, 因此引入假时间 ( $\tau$ ) 项, 得到

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} = L(Q_v)$$
(10)

将假时间导数项写成原始变量和预处理矩阵的形式, 得到

$$\Gamma_p \frac{\partial \hat{Q}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} = L(Q_v), \quad \hat{Q}_p = (\rho u, \rho v, \rho w, e) / J$$
(11)

然后对假时间导数项采用一阶后差, 对物理时间导数项采用二阶向后差分, 离散方程得到

$$\Gamma_p \frac{\hat{Q}_p^{k+1} - \hat{Q}_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3\hat{Q}^{k+1} - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_\xi \hat{F} + \delta_\eta \hat{G} + \delta_\zeta \hat{H} = L(Q_v)$$
(12)

进一步的线化处理, 得到

$$\Gamma_p \frac{\Delta \hat{Q}_p}{\Delta \tau} + \frac{3(\hat{Q}^k + \Gamma_e \Delta \hat{Q}_p) - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_\xi \hat{F} + \delta_\eta \hat{G} + \delta_\zeta \hat{H} = L(Q_v)$$
(13)

指标  $k$  表示子迭代步数,  $n$  表示真实时间步数,  $\delta$  表示下标方向上的空间差分, 进一步经过线化得到

$$\Gamma_p \frac{\Delta \hat{Q}_p}{\Delta \tau} + \frac{3(\hat{Q}^k + \Gamma_e \Delta \hat{Q}_p) - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_\xi (\hat{F} + \hat{A}1_p^k \Delta Q) + \delta_\eta (\hat{G} + \hat{B}1_p^k \Delta Q) + \delta_\zeta (\hat{H} + \hat{C}1_p^k \Delta Q) = L(Q_v)$$
(14)

式中  $\Delta\hat{Q}_p = \hat{Q}_p^{k+1} - \hat{Q}_p^k$ ,  $\hat{A}1$ ,  $\hat{B}1$  和  $\hat{C}1$  是对流量对  $\hat{Q}_p$  的雅可比矩阵,  $\Gamma_e = \frac{\Delta\hat{Q}}{\Delta\hat{Q}_p}$ 。进一

步将子迭代步数为  $k$  的项和真实时间步为  $n$  或者  $n-1$  层的项移到方程右边, 含  $\Delta\hat{Q}_p$  的项留在方程左边, 重写上述方程为

$$\left[ \Gamma_p + \Gamma_e \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t} + \Delta\tau \left( \hat{A}1_p^k \delta_\xi + \hat{B}1_p^k \delta_\eta + \hat{C}1_p^k \delta_\zeta \right) \right] \Delta\hat{Q}_p = R^k \quad (15)$$

其中

$$R^k = -\Delta\tau \left( \frac{3\hat{Q}^k - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \Delta\tau \left( \delta_\xi \hat{F}^k + \delta_\eta \hat{G}^k + \delta_\zeta \hat{H}^k \right) + \Delta\tau L(Q_v) \quad (16)$$

把假时间和物理时间的混合项变成一个单一矩阵, 令  $S_p = \Gamma_p + \Gamma_e \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t}$ , 则上式变为

$$\left( S_p + \Delta\tau \hat{A}1_p^k \delta_\xi + \Delta\tau \hat{B}1_p^k \delta_\eta + \Delta\tau \hat{C}1_p^k \delta_\zeta \right) \Delta\hat{Q}_p = R^k \quad (17)$$

上式两端同乘  $\Gamma_e$ , 再反回到原守恒型方程系统, 得到

$$\left( I + \Delta\tau \Gamma_e S_p^{-1} \hat{A}1^k \delta_\xi + \Delta\tau \Gamma_e S_p^{-1} \hat{B}1^k \delta_\eta + \Delta\tau \Gamma_e S_p^{-1} \hat{C}1^k \delta_\zeta \right) \Delta\hat{Q} = \Gamma_e S_p^{-1} R^k \quad (18)$$

$$\left( \frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma_e S_p^{-1} \hat{A}1^k \delta_\xi + \Gamma_e S_p^{-1} \hat{B}1^k \delta_\eta + \Gamma_e S_p^{-1} \hat{C}1^k \delta_\zeta \right) \Delta\hat{Q} = \frac{\Gamma_e S_p^{-1} R^k}{\Delta\tau} \quad (19)$$

其中  $A1$ ,  $B1$ ,  $C1$  是对流量对  $\hat{Q}$  的雅可比矩阵。

令  $A = \Gamma_e S_p^{-1} \hat{A}1$ ,  $B = \Gamma_e S_p^{-1} \hat{B}1$ ,  $C = \Gamma_e S_p^{-1} \hat{C}1$ ,  $RHS = -\frac{\Gamma_e S_p^{-1} R}{\Delta\tau}$ , 则上式就变

成

$$\left( \frac{I}{\Delta\tau} + A^k \delta_\xi + B^k \delta_\eta + C^k \delta_\zeta \right) \Delta\hat{Q} = \frac{\Gamma_e S_p^{-1} R^k}{\Delta\tau} \quad (20)$$

或者

$$\left( \frac{I}{\Delta\tau} + A^k \delta_\xi + B^k \delta_\eta + C^k \delta_\zeta \right) \Delta\hat{Q} = -RHS^k \quad (21)$$

上标  $k$  表示假时间步数, 写成通式为

$$\left( \frac{I}{\Delta\tau} + A\delta_\xi + B\delta_\eta + C\delta_\zeta \right) \Delta\hat{Q} = -RHS \quad (22)$$

### 1.3 隐式 LU-SGS 分解

对上式进行 LU-SGS 求解, 用最大特征值分裂

$$A^\pm = \frac{A \pm \gamma_A I}{2}, \quad \gamma_A = \max[|\lambda(A)|] \quad (23)$$

$$B^\pm = \frac{B \pm \gamma_B I}{2}, \quad \gamma_B = \max[|\lambda(B)|] \quad (24)$$

$$C^\pm = \frac{C \pm \gamma_C I}{2}, \quad \gamma_C = \max[|\lambda(C)|] \quad (25)$$

$$A^+ - A^- = \gamma_A I, B^+ - B^- = \gamma_B I, C^+ - C^- = \gamma_C I \quad (26)$$

$$\frac{\Delta \hat{Q}^n}{\Delta \tau} + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [(A^+ + A^-) \Delta \hat{Q}^n] + \frac{\partial}{\partial \eta} [(B^+ + B^-) \Delta \hat{Q}^n] + \frac{\partial}{\partial \zeta} [(C^+ + C^-) \Delta \hat{Q}^n] \right] = -RHS \quad (27)$$

利用前后差分进一步展开:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \hat{Q}}{\Delta \tau} + A_{i+1}^- \Delta \hat{Q}_{i+1} - A_i^- \Delta \hat{Q}_i + A_i^+ \Delta \hat{Q}_i - A_{i-1}^+ \Delta \hat{Q}_{i-1} \\ + B_{j+1}^- \Delta \hat{Q}_{j+1} - B_j^- \Delta \hat{Q}_j + B_j^+ \Delta \hat{Q}_j - B_{j-1}^+ \Delta \hat{Q}_{j-1} \\ + C_{k+1}^- \Delta \hat{Q}_{k+1} - C_k^- \Delta \hat{Q}_k + C_k^+ \Delta \hat{Q}_k - C_{k-1}^+ \Delta \hat{Q}_{k-1} = -RHS \end{aligned}$$

(28)

$$\begin{aligned} A_{i+1}^- \Delta \hat{Q}_{i+1} + B_{j+1}^- \Delta \hat{Q}_{j+1} + C_{k+1}^- \Delta \hat{Q}_{k+1} - A_{i-1}^+ \Delta \hat{Q}_{i-1} - B_{j-1}^+ \Delta \hat{Q}_{j-1} - C_{k-1}^+ \Delta \hat{Q}_{k-1} \\ + \frac{\Delta \hat{Q}}{\Delta \tau} + \beta \gamma_A \Delta \hat{Q}_i + \beta \gamma_B \Delta \hat{Q}_j + \beta \gamma_C \Delta \hat{Q}_k = -RHS \end{aligned} \quad (29)$$

这样, 上式与定常 NS 方程有相同的离散形式, 在此基础上实施 LDU 近似因式分解。

### 1.4 预处理矩阵的定义和运算

预处理矩阵<sup>[1]</sup>:

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ u\rho'_p & \rho & 0 & 0 & \rho_T \\ v\rho'_p & 0 & \rho & 0 & \rho_T \\ w\rho'_p & 0 & 0 & \rho & \rho_T \\ \rho h_p - h_0 \rho'_p - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho h_T + h_0 \rho_T \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ u\rho_p & \rho & 0 & 0 & u\rho_T \\ v\rho_{pp} & 0 & \rho & 0 & v\rho_T \\ w\rho_p & 0 & 0 & \rho & w\rho_T \\ H_0 \rho_p - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{\gamma \rho}{\gamma - 1} + H \rho_T \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\rho'_p = \frac{1}{\varepsilon_p a^2}, \text{ 其中 } a \text{ 表示声速, } \varepsilon_p = \frac{M_p^2}{1+(\gamma-1)M_p^2}$$

$$S_p = \begin{pmatrix} \frac{\rho_p''}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_T}{b} \\ \frac{u\rho_p''}{b} & \rho & 0 & 0 & \frac{u\rho_T}{b} \\ \frac{v\rho_p''}{b} & 0 & \rho & 0 & \frac{v\rho_T}{b} \\ \frac{w\rho_p''}{b} & 0 & 0 & \rho & \frac{w\rho_T}{b} \\ \frac{H\rho_p''-1}{b} & \frac{\rho u}{b} & \frac{\rho v}{b} & \frac{\rho w}{b} & \frac{\gamma\rho + H\rho_T\gamma - H\rho_T}{b(\gamma-1)} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$S_p^{-1}\hat{A}_p$  的特征值

$$\lambda_{1,2,3} = bU \quad (33)$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{b}{2} \left[ U \left( 1 + \frac{d}{d'} \right) \pm \sqrt{U^2 \left( 1 + \frac{d}{d'} \right) + 4 \frac{\rho h_T}{d'}} \right] \quad (34)$$

同理,  $S^{-1}\hat{B}_p$  和  $S^{-1}\hat{C}_p$  的特征值具有同样的形式, 只需 U 分别用 V 和 W 代换。

$$\begin{aligned} \frac{\rho h_T}{d'} &= \frac{\rho h_T}{\rho h_T \rho_p'' + (1 - \rho h_p) \rho_T} = \frac{\rho c_p}{\rho c_p (b \rho_p' + (1-b) \rho_p) - \frac{\rho}{T}} \\ &= \frac{c_p a^2}{c_p \left( \frac{b}{\varepsilon_p} + \gamma - \gamma b \right) - \gamma R} = \frac{a^2}{\frac{b}{\varepsilon_p} - \gamma b + 1} = \frac{M_p^2 a^2}{b - M_p^2 (b-1)} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{定义 } \beta' = \frac{M_p^2}{b - M_p^2 (b-1)}, \text{ 则 } \frac{\rho h_T}{d'} = \beta' a^2 \quad (36)$$

$$\text{还有, } \frac{d}{d'} = \frac{\rho h_T}{\rho h_T} = \beta' \quad (37)$$

上式中  $M_p^2$  的值和  $b$  控制着预调的行为, 参数  $b$  作为开关可以控制非稳态与稳态过程。对于稳态过程,  $b=1$  并且  $\beta' = M_p^2$ , 对于非稳态过程来说

$$M_p^2 = \text{MIN} \left( \text{MAX} \left( M_i^2, M_u^2, M_{\min}^2 \right), 1 \right) \quad (38)$$

其中,  $M_i$  是局部的马赫数尺度, 传统用于稳态预调过程,  $M_{\min}^2$  是一个截断值, 一般在  $3 \times M_\infty^2$ , 而  $M_u$  是一个新的非稳态尺度, 有下式给定:

$$M_u = \frac{L_u}{\pi \Delta t a} \quad (39)$$

## 2 数值方法的验证

用该方法对低雷诺数下无限长圆柱的绕流进行了模拟，来流速度为 5m/s， $Re = \rho U D / \mu$  分别为 20、40、和 100。前两种雷诺数对于的是绕流圆柱的对称分离流动，后一雷诺数对于的流动则是非定常的非对称涡脱落过程。图 1 给出雷诺数为 20 和 40 时的流线，图中显示了随着雷诺数的增大分离涡逐渐变长。我们将过圆柱中心沿轴线方向的线称为中心线，定义中心线上从底部顶点到回流区结束位置的距离为再附长度，图 3 分别给出了两种雷诺数下中心线上流向速度沿轴向的变化曲线，从中可以方便得出相应的再附长度，如表 1 所示。

同时在图 2 给出了在相同条件下用不可压方法得到的结果<sup>[2]</sup>，可以看到两组结果符合的较好，进一步验证了预处理方法在处理低速问题时候的精度。

$Re = 100$  对应的流动时涡脱落的非定常过程，计算中取真实时间步为 0.2s，子迭代中则通过预处理方法加速收敛。图 4 给出升力系数随着时间变化历程，可以看出，大约几个周期之后开始建立稳定的周期历程。图 5 则给出了在一个周期内 12 个不同相位的瞬时流线图，图中显示了涡交替脱落的非定常过程。计算得到的涡脱落周期  $\tau = 12.5s$ ，对应的  $Strouhal = Df / U_\infty = D / \tau U_\infty$  为 0.16，其中  $D$  为圆柱直径， $f$  为为涡脱落频率。

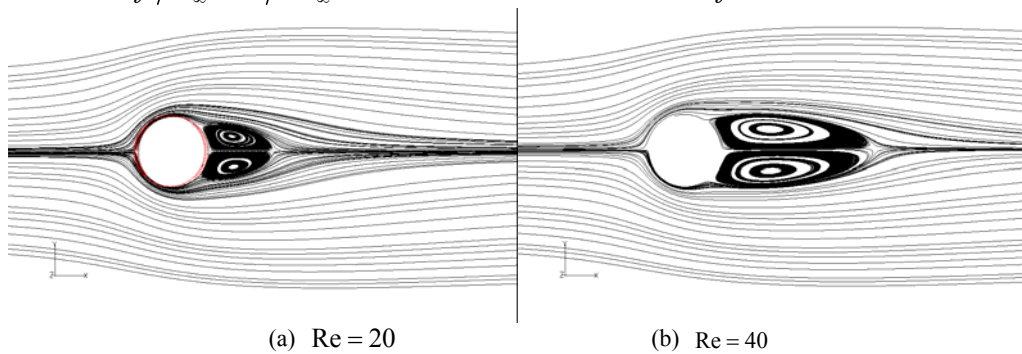


图 1  $Re = 20, 40$  对应的绕流流场

表 1 圆柱在  $Re = 20, 40$  时的再附长度

	$Re = 20$	$Re = 40$
$L_A$	1.92	4.05

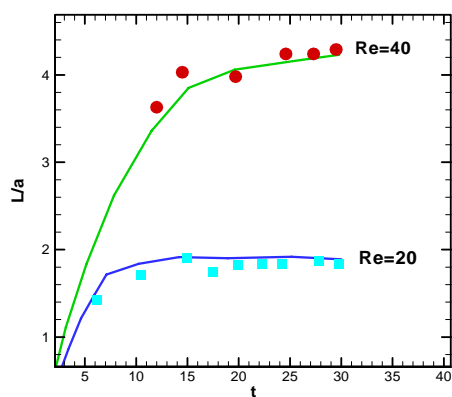


图 2 再附长度随着时间的变化历程

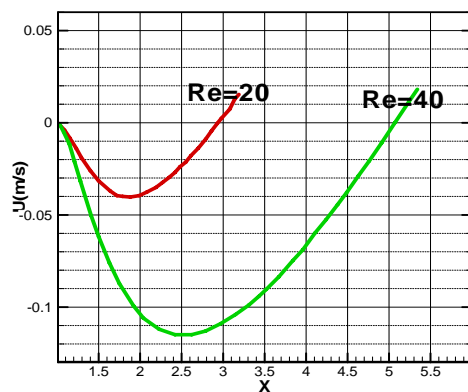


图 3. 尾部中心线上的流向速度

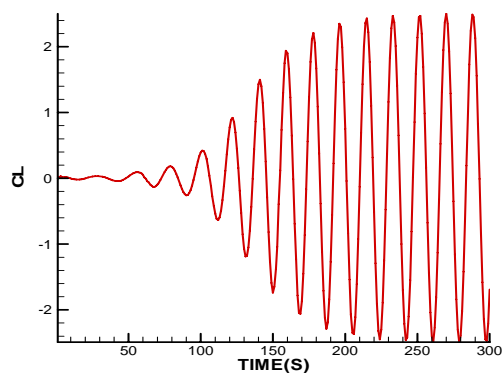


图 4 升力系数随着时间的变化历程 ( $Re = 100$ )

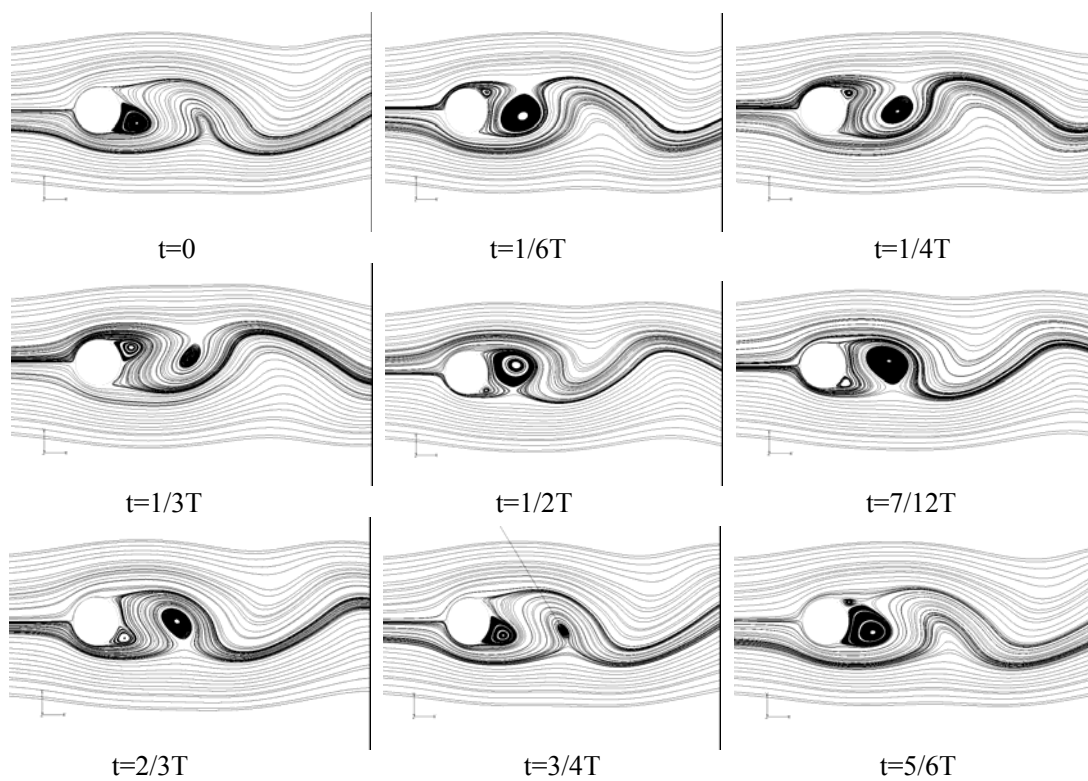


图 5 一个涡脱落周期的瞬时流线 ( $Re = 100$ )



### 3 结论

通过本文在可压缩代码的基础上, 引入预处理方法使方程各个特征值之间相互平衡, 降低了系统的刚性, 使可压方程能够高效率的用于不可压的求解。由于双时间的外层时间表示物理意义上的真实时间, 每一物理时间步的解作为定常问题的收敛解得到, 在内层时间步中加入预处理, 即满足了时间精度的要求, 又在处理低速问题是提高内层迭代的收敛效率。通过模拟二维圆柱非定常绕流, 验证了该方法在求解低速非定常问题时候的效率和精度, 进而证明了该算法可以用于非定常低速流动问题。

### 参考文献

- [1] C. L. Merkle, J. A. Sullivan, Computation of Flows with Arbitrary Equations of State, AIAA-96-0680, 1996.
- [2] Braza, M., Chassaing, P., and Minh, H.H., Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder, J. Fluid Mech., 165:79,130, 1986.