

# 复合材料中增强粒子与基体的微观应力和残余应力分析

潘颖<sup>1</sup>, 丁雁生<sup>2</sup>, 蔡瑞娇<sup>3</sup>

(1 北京航空材料研究院, 北京 100095; 2 中国科学院力学研究所, 北京 100080;

3 北京理工大学, 北京 100081)

**摘要** 按球对称胞元模型对复合材料中增强粒子与基体的微观内应力和残余应力进行了热弹性分析。结果表明, 这个模型揭示了压制成型的颗粒填充聚合物基复合材料微观内应力和残余应力的成因, 即两相材料模量失配、热膨胀失配; 胞元内应力主要存在于粘结相中。

**关键词** 复合材料 微观内应力 残余应力 胞元模型

## 0 前言

基于复合材料细观力学, 在显微观察<sup>[1]</sup>基础上, 定性讨论热压成型的颗粒填充聚合物基复合材料的微观内应力和残余应力成因。

按照复合材料力学的观点, 加压保温时, 聚合物包覆层受热软化, 因高压作用在颗粒间隙中流动。这时聚合物不能承受剪切力。在卸压降温过程中, 一方面两相材料受冷收缩, 另一方面两相材料又卸压膨胀。这时聚合物逐渐能够承受剪切力。因两相材料的模量和线胀系数不同, 在压力与温度改变时变形不协调, 使刚刚热压成型的复合材料就已经产生内应力, 或说就已经有残余应力。本文采取复合材料力学常用的胞元模型, 讨论了两相模量和热膨胀失配产生内应力的机制。为避开随机性增加的麻烦, 只讨论规则几何形状的问题。

## 1 球对称胞元的热弹性模型

从细观力学角度看问题时, 人们常把一个颗粒及包裹它的基体视为复合材料的基本结构单元, 称作胞元。

1957年英国学者 Eshelby 发表无限介质内椭球夹杂弹性解以后, 随复合材料的兴起, 关于胞元模型的研究很多<sup>[2]</sup>。文献报道的胞元模型, 有一维的也有二维的, 有球对称的、轴对称的, 有弹性的、弹塑性的、热弹塑性的等。为了能简洁地说明热压成型材料内应力的成因, 我们选择了一维球对称胞元的热弹性模型, 并假设粘结剂对颗粒的包覆率为 100%。稍微复杂一些的模型都需要数值模拟, 一维球对称胞元的热弹性模型则容易得到解析结果。

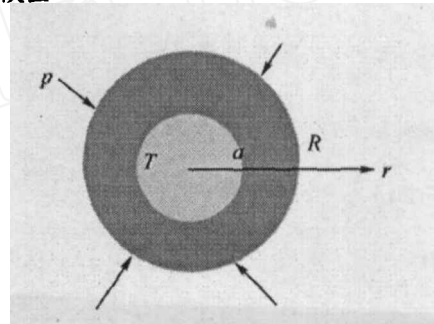


图1 一维球对称胞元

在颗粒填充复合材料某颗粒邻域处取一维球对称胞元如图 1 所示, 径向坐标为  $r$ , 坐标原点在颗粒中心。设  $R$  为胞元半径;  $a$  为颗粒半径; 作用于外球面的静水压力  $p$  为胞元间相互作用力, 是该颗粒邻域处宏观应力场的体现; 胞元材料的温度为  $T(r)$ 。  $V_f = (a/R)^3$  表示颗粒相体积分。于是有如下基本方程组:

应力平衡方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - 2\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0 \quad (1a)$$

应变定义

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \epsilon_\theta = \epsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (1b)$$

弹性关系

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_r + 2\nu\epsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T]$$
$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\epsilon_r + \epsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T] \quad (1c)$$

式中:  $\sigma$ 、 $\epsilon$ 、 $u$  分别表示材料的应力、应变和位移;  $E$  为弹性模量;  $\nu$  为泊桑比;  $\alpha$  为线胀系数。

将弹性关系和应变定义代入应力平衡方程, 得到

$$\frac{de}{dr} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

式中体应变  $e = \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2u)$ 。设胞元温度

均匀分布,  $\frac{dT}{dr} = 0$ , 则问题的解为

$$\begin{aligned} e(r) &= \text{const} \\ u(r) &= \frac{e}{3}r + \frac{c}{r^2} \\ \varepsilon_r(r) &= \frac{e}{3} - \frac{2c}{r^3} \\ \varepsilon_\theta(r) &= \varepsilon_\phi(r) = \frac{e}{3} + \frac{c}{r^3} \\ \sigma_r(r) &= \kappa(e - 3\alpha T) - 4\mu \frac{c}{r^3} \\ \sigma_\theta(r) &= \sigma_\phi(r) = \kappa(e - 3\alpha T) + 2\mu \frac{c}{r^3} \\ \bar{\sigma}(r) &= \kappa(e - 3\alpha T) \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\phi)$  为平均应力, 体积压缩模

量  $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ , 剪切模量  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。

对于颗粒相,  $r \rightarrow 0$  时,  $u$ 、 $\sigma_r$  均有界, 使得  $c = 0$ 。于是

$$\begin{aligned} e(r) &= \text{const} = e \\ u(r) &= \frac{e}{3}r \\ \varepsilon_r(r) &= \varepsilon_\theta(r) = \varepsilon_\phi(r) = \frac{e}{3} \\ \sigma_r(r) &= \sigma_\theta(r) = \sigma_\phi(r) = \bar{\sigma}(r) = \kappa(e - 3\alpha T) \end{aligned} \quad (4)$$

对于基体 (即粘结相, 用上标 'b' 表示),

$$\begin{aligned} e^b(r) &= \text{const} = e^b \\ u^b(r) &= \frac{e^b}{3}r + \frac{c^b}{r^2} \\ \varepsilon_r^b(r) &= \frac{e^b}{3} - \frac{2c^b}{r^3} \\ \varepsilon_\theta^b(r) &= \varepsilon_\phi^b(r) = \frac{e^b}{3} + \frac{c^b}{r^3} \\ \sigma_r^b(r) &= \kappa^b(e^b - 3\alpha^b T) - 4\mu^b \frac{c^b}{r^3} \\ \sigma_\theta^b(r) &= \sigma_\phi^b(r) = \kappa^b(e^b - 3\alpha^b T) + 2\mu^b \frac{c^b}{r^3} \\ \bar{\sigma}^b(r) &= \kappa^b(e^b - 3\alpha^b T) \end{aligned} \quad (5)$$

## 2 残余应力的确定

### 2.1 加载保温阶段的解

加载保温时, 作球对称加载的假设,  $\sigma_r^b(R) = p_1$ ; 因粘结相高温软化, 使  $\mu^b = 0$ 。于是

$$\sigma_r^b(r) = \sigma_\theta^b(r) = \sigma_\phi^b(r) = \bar{\sigma}^b(r) = \kappa^b(e^b - 3\alpha^b T) = p_1 \quad (6a)$$

且有

$$e^b = \frac{p_1}{\kappa^b} + 3\alpha^b T$$

考虑边界连续条件

$$u(a) = u^b(a), \quad \sigma_r(a) = \sigma_r^b(a)$$

于是

$$\sigma_r(r) = \sigma_\theta(r) = \sigma_\phi(r) = \bar{\sigma}(r) = p_1 \quad (6b)$$

且有

$$e = \frac{p_1}{\kappa} + 3\alpha T$$

$$c^b = \frac{a^3}{3} \left[ \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^b} \right) p_1 + 3(\alpha - \alpha^b) T \right]$$

由此可见, 在加压保温阶段, 胞元体的应力处处相同, 都等于边界压力; 颗粒相的应变也处处相同, 只是粘结相的应变随矢径改变, 但粘结相的体应变仍处处相同。

### 2.2 卸载降温阶段的解

胞元温度由  $T$  降到  $T_0$ , 胞元周围压力由  $p$  降到  $p_0$ 。

假设降温足够缓慢, 材料温度处处均匀; 卸载降温后的材料参数用下标 '0' 表示。这时粘结相遇冷玻璃化, 使  $\mu_0^b > 0$ 。

由于  $\frac{dT_0}{dr} = 0$ , 则问题的解仍如(3)式。

对于颗粒相, 仍有  $c = 0$ , 于是

$$\begin{aligned} e &= \text{const} = e_0 \\ u(r) &= \frac{e_0}{3}r \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{e_0}{3} \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \sigma_\phi = \bar{\sigma} = \kappa_0(e_0 - 3\alpha_0 T_0) \end{aligned} \quad (7)$$

对于基体,

$$e^b = \text{const} = e_0^b$$

$$u^b(r) = \frac{e_0^b}{3}r + \frac{c_0^b}{r^2}$$

$$\varepsilon_r^b(r) = \frac{e_0^b}{3} - \frac{2c_0^b}{r^3}$$

$$\varepsilon_\theta^b(r) = \varepsilon_\phi^b(r) = \frac{e_0^b}{3} + \frac{c_0^b}{r^3}$$

$$\sigma_r^b(r) = \kappa_0^b(e_0^b - 3\alpha_0^b T_0) - 4\mu_0^b \frac{c_0^b}{r^3}$$

$$\sigma_\theta^b(r) = \sigma_\phi^b(r) = \kappa_0^b(e_0^b - 3\alpha_0^b T_0) + 2\mu_0^b \frac{c_0^b}{r^3}$$

$$\bar{\sigma}^b = \kappa_0^b(e_0^b - 3\alpha_0^b T_0) \quad (8)$$

这里三个待定积分常数  $e_0^b$ 、 $e_0^b$ 、 $c_0^b$ , 可根据下列边界条件确定:

$$\sigma_r^b(R) = p_0$$

$$u(a) = u^b(a)$$

$$\sigma_r(a) = \sigma_r^b(a) \quad (9)$$

由此解得

$$e_0 = \frac{p_0}{\kappa_0^b} + 3\alpha_0^b T_0 + (\psi V_f + 3) \frac{c_0^b}{a^3}$$

$$e_0^b = \frac{p_0}{\kappa_0^b} + 3\alpha_0^b T_0 + \psi V_f \frac{c_0^b}{a^3}$$

$$\frac{c_0^b}{a^3} = \left[ p_0 \left( \frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b} \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \frac{1}{\eta_b} \quad (10)$$

式中  $\eta_b = (\psi V_f + 3) + \frac{\kappa_0^b}{\kappa_0} \psi (1 - V_f)$ ,

$$\psi = \frac{4\mu_0^b}{\kappa_0^b} = 6 \frac{1 - 2\nu_0^b}{1 + \nu_0^b}$$

由此解得卸载降温后结构材料的应力的表达式:

$$\sigma_r(r) = \frac{\kappa_0}{\kappa_0^b} \left\{ p_0 + \kappa_0^b \left[ p_0 \left( \frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b} \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \frac{\psi V_f + 3}{\eta_b} - 3\kappa_0^b (\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right\}$$

$$\sigma_r^b(r) = p_0 + \kappa_0^b \left[ p_0 \left( \frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b} \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \frac{3 - \psi V_f \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right)}{\eta_b}$$

$$\sigma_\theta^b(r) = p_0 + \kappa_0^b \left[ p_0 \left( \frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b} \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \frac{3 + \psi V_f \left( \frac{R^3}{2r^3} + 1 \right)}{\eta_b} \quad (11)$$

这时在粘结相中存在剪切应力, 其最大值的表达式为

$$\tau_{\max}^b(r) = \frac{3}{4} \kappa_0^b \left[ p_0 \left( \frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b} \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \frac{\psi V_f R^3}{\eta_b r^3} \quad (12)$$

粘结相中的平均应力为

$$\bar{\sigma}^b = p_0 + \kappa_0^b \left[ p_0 \left( \frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b} \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \frac{\psi V_f + 3}{\eta_b} \quad (13)$$

于是, (11)式可以改写为

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\phi = \bar{\sigma} = \frac{\kappa_0}{\kappa_0^b} \left[ \bar{\sigma}^b - 3\kappa_0^b (\alpha_0 - \alpha_0^b) T_0 \right] \quad (14)$$

### 3 讨论

从这些卸载降温阶段的应力表达式可以看到:

(1) 粘结相的正应力均由边界压力、胞元间模量失配力和热应力三部分构成; 颗粒相的正应力与边界压力、胞元间模量失配力和热应力这三部分力成比例, 比例系数为  $\kappa_0/\kappa_0^b$ ;

(2) 胞元间模量失配力与两相间体积压缩模量倒数的差  $\frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0^b}$  成正比, 热应力与两相间线胀系数差  $\alpha_0 - \alpha_0^b$  成正比。这里, 因边界均匀受压, 两相间剪切模量差  $\mu_0^b - \mu_0$  对模量失配力的影响未显示出来;

(3) 球形胞元外表均匀受压时, 球形颗粒也均匀受压, 但是球壳状粘结相受压不均匀, 还存在剪力, 处于不均匀压剪状态;

(4) 粘结相的内应力随矢径  $r$  变化; 在  $r = a$ , 即颗粒与粘结剂界面处, 粘结相的剪应力达到极大值。

$$\tau_{\max}^b(r) = \frac{3\psi}{4\eta_b} \left[ p_0 \left( \frac{\kappa_0^b}{\kappa_0} - 1 \right) + 3(\alpha_0 - \alpha_0^b) \kappa_0^b T_0 \right]$$

因此, 内应力易使颗粒与粘结剂界面脱粘。

## 4 结论

(1) 两相材料模量失配、两相材料热膨胀失配

是热压成型的复合材料产生微观内应力的成因。改善两相材料模量、热膨胀失配以减少微观内应力, 能够达到降低这类复合材料内应力的目的。

(2) 胞元模型中的内应力主要存在于粘结相中, 两相界面粘结剂一侧剪力最大, 从而使两相界面易损伤。

### 参 考 文 献

- [1] 潘颖. 刚性粒子填充高聚物细观损伤的显微观察. 北京理工大学学报, 2000, 20 (1): 125-128.  
 [2] 杜善义, 王彪编. 复合材料细观力学. 北京: 科学出版社, 1998.

作者简介: 潘颖, 女, 1959 年出生, 博士, 高工, 主要研究方向为树脂基复合材料方面的研究。E-mail: topanying@gmail.com

## Analyses of Thermal and Residual Microstresses in Particle and Matrix of Composite

Pan Ying<sup>1</sup>, Ding Yansheng<sup>2</sup>, Cai Ruijiao<sup>3</sup>

(1 Beijing Institute of Aeronautical Materials; Beijing 100095;

2 Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080;

3 Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**Abstract** Heat plastic analyses are conducted on thermal and residual microstresses in particular composites, according to a spherical symmetric model. It is shown that the cellular element model enable to study the formation mechanism for internal stress of the particle reinforced polymer matrix composite under pressure moulding, namely, the unmatched modul, unmatched heat-expansion coefficient in the particles and matrix material will initiate internal stress. There are the internal stress of cellular element mainly in matrix material .

**Key words** Composite Microthermal stress Residual stress Cellular element model