

连续介质力学与断裂*

中国科学院力学研究所 郑哲敏

在这篇文章里,我们结合断裂问题回顾连续介质力学的发展,并指出,为了更深地理解和描述断裂现象,还需要进一步完善连续介质力学。

一、经典弹塑性理论应用于断裂时的局限性和 Griffith 的理论

现讨论一维应变条件下裂纹的扩展问题。我们假设

1. 材料是均匀的,就是说,所讨论的材料是没有内部结构的;
2. 材料是弹性的,但允许有非线性和大变形所导致的几何非线性;
3. 原始裂纹是几何线段,除长度为 $2l$ 外没有其它尺度(参看图 1)。

在一般情况下,弹性应力应变关系可以表示为

$$\sigma_{ij} = \lambda f_{ij}(\varepsilon_{ij}, \alpha, \beta, \dots) \quad (1)$$

其中 σ_{ij} 为应力张量, ε_{ij} 为应变张量, λ 为量纲是 kg/cm^2 的材料常数, α, β, \dots 为无量纲材料参数。对各向同性线弹性材料, λ 可取为杨氏模量,无量纲材料参量只有一个,可取为泊松比, f_{ij} 为已知数。

现在我们问,拉应力 σ_0 (图 1) 多大时,裂缝就要延伸?

显然,我们有

$$f(\sigma_0, \lambda, l, \alpha, \beta, \dots) = 0 \quad (2)$$

根据量纲分析,我们由上式得到

$$\sigma_0 / \lambda = g(\alpha, \beta, \dots) \quad (3)$$

上式右端只取决于无量纲材料参数,并与裂缝长度 l 无关。同理,若以 ρ 表示裂缝发展时的端部曲率半径或某种定义下的裂缝张开位移,则有

$$\rho / l = h(\alpha, \beta, \dots) \quad (4)$$

h 也只包含无量纲材料常数。无论式(3)还是式(4),都表示几何相似的规律。

然而上述结论是与实验事实相违背的。因此,为了描述裂缝扩展的规律,需要把经典连

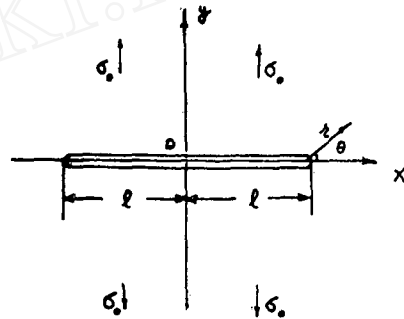


图 1

* 本文主要部分曾在第 1 届全国材料力学性能学术交流会(1980年 11 月 22—26 日,杭州)大会上报告。

续介质力学加以补充。

为了解释玻璃的断裂现象, Griffith [1,2] 在线弹性前提下, 引进了表面张力的概念。这一概念的引进是对经典连续介质力学的一个重要补充。

1. Griffith 的能量原则 我们设想图 1 所示的试件是在一个完全刚性或完全柔性的拉伸试验机上进行的。于是, 裂缝开始延伸的条件可以表示为

$$f(\sigma_0, E, l, \nu, \gamma) = 0 \quad (5)$$

这里, E 是杨氏模量, ν 是泊松比, γ 是表面能。仿照 Griffith 的做法, 我们假设裂缝的延伸是弹性能向表面能的转化。于是式 (5) 可进一步简化为

$$f(\sigma_0^2/E, \nu, \gamma, l) = 0 \quad (6)$$

因而根据量纲分析, 我们有

$$\sigma_0^2 l = \text{const} \times \gamma E = C_G \quad (7)$$

这里的常数是泊松比 ν 的函数。式 (7) 的右端是材料参数, 对于任一特定的材料, 可视为常数。由式 (7) 可知, σ_0 成反比与 $l^{1/2}$, 裂缝愈长, 所需的 σ_0 就愈小。这一结论已由 Griffith 对玻璃中裂缝扩展的研究得到证实。

2. 线弹性应力分析 根据线弹性微小变形理论, 不难得出裂缝周围的应力分布 (例如参看 [3])。在裂缝尖端附近, 如果忽略 r/l 的高阶小量, 我们有 (图 1)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \frac{1}{4} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \frac{1}{4} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) \\ \tau &= K_I (2\pi r)^{-1/2} \frac{1}{4} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$K_I = (\pi l)^{1/2} \sigma_0 \quad (9)$$

被称为应力强度因子。与式 (7) 相比, 我们看到裂缝扩展的条件可写为

$$K_I = K_{Ic} \quad (10)$$

K_{Ic} 称为断裂韧性, 是材料常数。由式 (10) 和式 (8) 可见, 不论裂缝多长, 裂缝尖端附近, 应力分布是完全相同的。

可以证明, 当裂缝伸长 dl 时, 释放的弹性能 Gdl 为

$$Gdl = \frac{K_I^2 (1-\nu^2)}{E} dl \quad (11)$$

所以由 Griffith 的能量准则得到

$$K_{Ic}^2 (1-\nu^2)/E = 2\gamma \quad (12)$$

于是在线弹性条件下, 式 (7) 中的常数可具体表示如下:

$$\text{const} = 2/\pi(1-\nu^2) \quad (13)$$

我们注意到, 同样的原则可以应用于非线性弹性材料。例如, 对于应力随应变指数变化的材料, 即

$$\sigma = Y \epsilon^n \quad (14)$$

单位体积的应变能是 $\frac{Y}{1+n} \left(\frac{\sigma_0}{Y}\right)^{(n+1)/n}$ 。因此裂缝扩展的条件是

$$\sigma_0^{(n+1)/n} l = \text{const}(n+1) Y^{1/n} \gamma \quad (15)$$

虽然, (7) 是 (15) 的特殊状况。

现在回到式(7)。CG/E² 的量纲是长度。我们问, 对于线弹性材料这个长度的物理意义是什么? 裂缝扩展准则(7)与最大强度准则有无联系? 有无本质差别?

二、Eringen 的线弹性非局部理论

真实材料是有内部结构的, 上节结尾提出的表征材料性质的长度量, 从根本上讲当然代表材料的内部尺度。复杂结构的材料, 可以有多个内部尺度。

对于理想晶体, 只有晶格常数是材料的内部尺度。讨论理想晶体的力学性质属于晶格动力学和固体物理的范畴, 超出了经典连续介质力学的领域。

60 年代末期以来发展了一种非局部连续介质力学 (Eringen [4]), 它在某种程度上把经典连续介质力学推广到能够考虑材料内部的尺度效应。这里我们介绍 Eringen 应用非局部理论分析线弹性单晶断裂问题的结果, 因为它恰好能回答我们在前面所提出的问题。

根据 Eringen, 非局部线弹性固体的应力应变关系可写为

$$\sigma_{ki} = \int \lambda'(|\bar{x}' - \bar{x}|) e'_{r,r}(\bar{x}') \delta_{ki} + 2\mu'(|\bar{x}' - \bar{x}|) e'_{ki}(\bar{x}') dV(\bar{x}') \quad (16)$$

这里 e_{ki} 是通常定义下的应变张量, 即 δ_{ki} 是 Kronecker δ , σ_{ki} 是 \bar{x} 点的应力张量。式 (16) 中的积分在一般情况下是体积分。式 (16) 与通常各向同性线弹性材料不同之处在于 $\sigma_{ki}(\bar{x})$ 是 \bar{x} 点附近应变张量某种加权平均的结果。 λ' , μ' 相当于经典弹性力学中的拉梅常数。当

$$\lambda'(\bar{x}) = \lambda \delta(\bar{x}), \quad \mu'(\bar{x}) = \mu \delta(\bar{x})$$

时, 其中 $\delta(\bar{x})$ 是 Dirac 的 δ 函数, 式 (16) 简化为通常的虎克定律。 λ' , μ' 是待定函数。对于单晶材料, Eringen 假设

$$\lambda'(\bar{x}) = \lambda \alpha(\bar{x}'), \quad \mu'(\bar{x}) = \mu \alpha(\bar{x}') \quad (17)$$

这里, 未知函数 $\alpha(x)$ 是根据晶格动力学中纵波传播的色散关系得出的。他得到

$$\alpha(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & \frac{|x|}{a} \leq 1 \\ = 0, & \frac{|x|}{a} > 1 \end{cases} \quad (18)$$

其中 a 是晶格常数, 即相邻两个原子间的距离。这样, 式(16)中就不再包含材料性质方面的未知函数了。

令

$$t_{ki}(x) = \lambda e_{r,r}(x) \delta_{ki} + 2\mu e_{ki}(x) \quad (19)$$

则

$$\sigma_{ki} = \int \alpha(|\bar{x}' - \bar{x}|) t_{ki}(\bar{x}') dV(\bar{x}') \quad (20)$$

Eringen 证明了, 将非均匀线弹性理论应用于图 1 所示的平面应变的应力分析问题, 时,

其基本方程和边界条件分别为

$$t_{ki}, i = 0 \tag{21}$$

和

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y = \sigma_0, \text{ 其余应力分量} \rightarrow 0, \text{ 当 } |x|, |y| \rightarrow \infty \text{ 时} & \quad (a) \\ \sigma_{xy} = 0, y = 0 & \quad (b) \\ \sigma_{yy} = 0, y = 0, |x| < l & \quad (c) \\ u_y = 0, y = 0, |x| > l & \quad (d) \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

从式(21)和(22)可以看出,基本方程(21)是和经典弹性力学中的 Navier 方程一样的,差别仅在于边界条件(22 a), (22 b), (22 c)。

由上述理论得出的应力分布 $\sigma_{yy}(x, 0)/\sigma_0$ 如图 2 所示,其中最大值位于 $x = l$,并由下式给出:

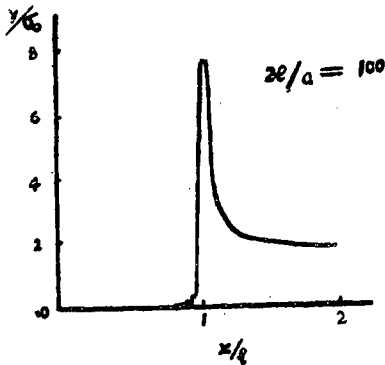


图 2

$$\sigma_{yy}(l, 0)/\sigma_0 = C \left(\frac{2l}{a} \right)^{1/2} \tag{23}$$

这里 $C = 0.73$ 。 x/l 充分大时,非局部理论的解和,经典弹性力学的解完全一致。

若用最大拉应力

$$\sigma_{yy}(l, 0) = \sigma_c \tag{24}$$

作为裂缝扩展的准则, σ_c 是材料的结合强度,则裂缝扩展的条件为

$$C \left(\frac{2l}{a} \right)^{1/2} = \sigma_c / \sigma_0 \tag{25}$$

把这个果结与式(7)相比,我们看到如果考虑到材料内部结构,最大拉应力准则与 Griffith 的能量准则是完全一致的。

在某种程度上,式(25)的物理意义更为明确,更易于接受。在这个式子中, C_c 可以从材料的基本性质计算,不依赖于能量如何具体转化的假设。

用固体物理的理论,能够计算理想晶体的结合强度 σ_c 和表面能 γ 。另一方面,用非局部线弹性理论和基于经典弹性理论的 Griffith 能量准则,也可以独立地建立 σ_c 与 γ 之间的关系。因为根据式(25)和(7)及(13),有

$$\sigma_c^2 a = 2C^2 C_G = \frac{4C^2 E}{\pi} \frac{\gamma}{(1-\nu^2)} = \frac{8C^2 \mu}{\pi(1-\nu)} \gamma \tag{26}$$

利用式(26)和基于固体物理的 γ 值,可以算出结合强度 σ_c 。如果这个 σ_c 与由固体物理得出的结合强度相一致,那么非局部线弹性理论的正确性就得到了验证。表 1 给出 Eringen 计算得到的结果。从最后两栏的比较中看到, Eringen 的非局部线弹性理论是经得起这种检验的,因此应当认为这是经典弹性理论的一个重要发展。

三、合金材料的内部尺度

对于工程中使用的高强度、中高强度合金材料,实践表明:

1. 断裂韧性的概念仍然成立,并在这个基础上建立了断裂力学。
2. 由式(12)计算所得的表面能 γ 过大,比理论值大几个数量级。

表 1 摘自 Crystal Lattice Defects 1977, vol. 7, pp. 109—130

晶格类型		实 验					非 局 部 理 论				原子模型
元素符号	γ (CGS)	$\mu \times 10^{-11}$ (CGS)	ν	a \AA	$K \times 10^{-11}$ (CGS)	$K, \times 10^{-14}$	$\sigma_c \times 10^{-11}$	σ_c/E			
面心立方	Al	840	2.51	0.347	2.86	4.382	1.238	0.183			
	Ni	1725	7.48	0.276	2.43	24.185	3.117	0.163			
体心立方	Fe	1975	6.92	0.291	2.48	26.158	3.248	0.182		0.23	
离子	LiF	480	4.40	0.068	2.014	3.075	1.236	0.131			
金钢石	C	5400	50.9	0.187	1.54	458.782	17.260	0.143		0.17	
密排六方	Zn	575	3.83	0.333	2.66	4.481	1.298	0.127		0.11	

3. 断口分析表明, 不论是解理断裂还是韧窝型断裂, 都有塑性变形, 都有与细观结构相联系的尺度效应。

对于合金等金属材料, Orowan[5]曾于 1952 年提出, 如果把塑性功也包括在表面能内, 则 Griffith 理论仍可应用, 这就是后来迅速发展成为很有用的断裂力学的基础。然而, 尽管断裂力学很有用, 在经典弹性力学和塑性力学基础上, 不能说在断裂机理上已经很清楚, 或者说很好地被理解了。这是因为在经典弹塑性力学的范围内, 塑性功是体积能, 它与表面能的量纲不同, 因而原则上不能把前者看作是后者的一部分。能把塑性功表达为表面能量纲的唯一可能是通过一个能表征材料内部结构的尺度。因此, 要进一步阐明材料的断裂机理, 必须把经典弹塑性力学加以改进, 使其建立在一个能正确描述材料内部结构的本构关系上。至少对断裂问题而言, 应当说这是连续介质力学发展的一个重要方向。

下面我们以韧窝型断裂为例, 讨论含有二相粒子(这里泛指弥散相、沉积物、夹杂)的材料内部尺度, 并估计它的断裂韧性。

断口分析表明, 韧窝的中心是二相粒子所在之处, 不同韧窝间距相应于二相粒子的间距, 韧窝的深度与韧窝间距是同一数量级的。

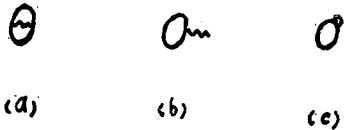


图 3 (a)二相粒子断裂; (b)微裂缝生发于二相粒子附近的基体中; (c)二相粒子与基体间结合的破坏。

显微镜观察还表明, 微裂缝或空穴往往在二相粒子附近生成(见图 3 a, b, c)。在裂缝前面, 这些裂缝的生长、复合和与主裂缝连通的结果导致裂缝的扩展。

由图 4 (b)可见, 如果用 σ_y 表示屈服应力, ϵ_u 表示材料所能承受的极限应变, δ 表示颗粒的平均间距, 则缝裂缝扩展单位长度所需

之塑性功 γ_p 大约为

$$2\gamma_p \approx C\sigma_y \epsilon_u \delta \quad (27)$$

C 是与微空穴形成和复合的细观过程有关的常数, σ_y , ϵ_u 都是宏观量, δ 属于细观量。因此把这类塑性功包括在内的表面能 γ_a 可写为

$$\gamma_a = \gamma + \gamma_p \approx \gamma + (C/2)\sigma_y \epsilon_u \delta \quad (28)$$

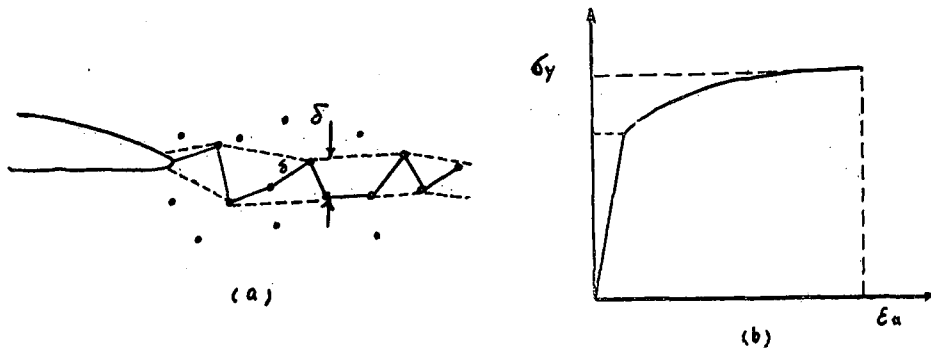


图 4

其中 γ 是真正的表面能 (加上表面平滑度的修正)。根据式(12), 当式(28)中的第二项起主导作用时, 我们有

$$K_{Ic} = \sqrt{CE\sigma_y \varepsilon_u \delta / (1-\nu^2)} \quad (29)$$

虽然这是一种粗略的计算, 但它与许多金属物理工作者从不同角度提出的各种公式大体相同 [6]。

把这个 K_{Ic} 代入应力分布公式(8)就能估算塑性区的大小, 以 r_{pc} 表示塑性区的特征尺寸, 我们有

$$r_{pc} \approx \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{CE\varepsilon_u \delta}{\sigma_y(1-\nu^2)} \quad (30)$$

当然, 既然是由弹性理论导出的, 上式应用的条件是 $r_{pc}/l \ll 1$, 或者

$$\frac{CE\varepsilon_u}{\sigma_y(1-\nu^2)} \frac{\delta}{l} \ll 1 \quad (31)$$

由此可见, 在裂缝起始或稳态扩展 dl 时, 裂缝端部有 B , A 两个区域。鉴于这两个区域都有塑性变形即不可逆的能量消耗, 式(28)应该改写为 (参见图5)

$$\begin{aligned} (2\gamma_a)dl &= (2\gamma + C\sigma_y \varepsilon_u \delta + C'r_{pc}\sigma_y \bar{\varepsilon})dl \\ &\approx (C\sigma_y \varepsilon_u \delta + C'r_{pc}\sigma_y \bar{\varepsilon})dl \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\bar{\varepsilon}$ 为 A 区中的平均塑性应变, C' 这个常数表示 A 区的大小。式(29)和(30)应相应地改为

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} (C\sigma_y \varepsilon_u \delta + C'r_{pc}\sigma_y \bar{\varepsilon})} \quad (33)$$

$$r_{pc} \approx \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 = \frac{E}{\sigma_y(1-\nu^2)} (C\varepsilon_u \delta + C'r_{pc} \bar{\varepsilon}) \quad (34)$$

后一式可以用以解 r_{pc} 。当然, r_{pc} 不应为负值。负值意味着裂缝不能扩展。

由式(34)可见, r_{pc} 正比于 δ , 所以塑性区 A 的特征尺寸是由 δ 决定的, 这当然就导致式(7)那样的断裂力学关系式。 B 区有人称之为过程区。

区域 A 和区域 B 有什么相互关系呢? 我们以起始裂缝来说明这个问题。当外载荷 (垂直于裂缝的均匀拉伸由零增加时, 由于裂缝顶端的应力或应变集中, 在那里“首先”发生塑性变形, A 区逐渐增加, 裂缝的张开位移和顶端的尺度都随着长大, 但 Lagrange 意义上的裂缝长度并无变化, 直至由于二相粒子或夹杂物的存在, B 区的变形超过 A 区的相应量, 甚至伴随着那里和部分 A 区的加载和卸载, 进而裂缝扩展。

稳定扩展的过程是类似的, 当然那时的外载荷可以不同于起始裂缝所需的外载荷。

上面的讨论导致这样的结论, 那就是裂缝的扩展受控于和二相粒子等密切相关的裂缝顶端的细观过程, 而 A 区不过是 B 区作用的一个间接表现而已。如果我们有某种方式能够足

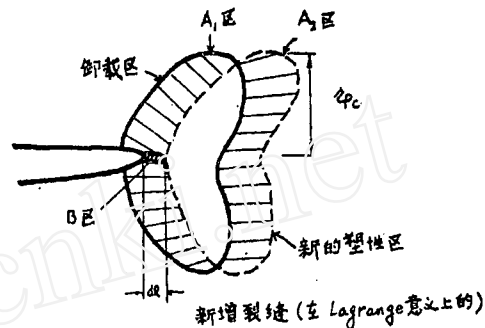


图 5

够精确地观测与记录裂缝顶端的应变场, 我们就会发现, 在裂缝扩展时, B 区变形有比较突然的增长。

有兴趣的是 A , B 两区的相对大小和在那里分别消耗的能量。显然, 这取决于两个因素: (1) 二相粒子导致的强度削弱是否显著; (2) 裂缝尖端 (在裂缝起始扩展或稳定扩展时) 的尺度与 δ 的相对大小。如果, 强度的削弱很显著, 裂缝尖端的尺度又小, 譬如说与 δ 同一个数量级, 那么 A 区相对来说就很小, 因而我们的注意力就应该放在 B 区那个比较狭窄的区域。这接近于 Dugdale 类的模型。不过, 因为裂缝尖端的特征尺寸与 δ 相当, 那么在这个区域内, 应当考虑材料的非均匀性或内部尺度。另一个极端是: 二相粒子对强度没有任何削弱, 那么经典弹塑性力学完全可用, 不过对尖端的开裂条件需要有一个与材料内部尺度无关的准则。这必然导致式 (3), 即与一般断裂力学不同的结论。

裂缝尖端的特征尺度是一个很值得研究的问题, 似乎可以说, 对于韧窝断裂, 这个尺度与韧窝尺度即二相粒子 (或夹杂物) 的有效距离为同一数量级。另一方面, 在有塑性变形的解理断裂中, 取晶粒尺寸可能更为合理。

总之, 我们看到由于二相粒子的存在, 为了进一步完善断裂问题的研究, 把经典连续介质力学推广到类似于 Eringen 所提出和应用的非局部线弹性理论看来是很有必要的。

以上结论, 基于普适的量纲分析与一些公认的实验事实, 因此其主要论点可能是成立的, 当然要解决断裂的基本机理问题, 还需要做大量细致的工作。

参 考 文 献

- [1] Griffith, A. A. (1921), *Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A* 221:163.
- [2] Griffith, A. A. (1924), In «Proc. of 1st Intern. Cong. for Appl. Mech., Delft»: 55.
- [3] Sih, G. C. and Liebowitz, H. (1968), In «Fracture» Vol. II, Edited by Liebowitz H., Academic Press, New York and London.
- [4] Eringen, A. C. (1977), «Crystal Lattice Defects», Vol. 7: 109—130.
- [5] Orowan, E. (1952), In «Fatigue and Fracture of Metals», Edited by Marry, W. M., Wiley, New York: 139—169.
- [6] 章熙康、陈源、王其闵 (1978), 《断裂物理与断裂力学学术讨论会文集》, 断裂物理与断裂力学学术讨论会文集编委会: 242—262.