

破甲机理的力学分析及简化模型

(681破甲机理课题进展报告)

中国科学院力学研究所 郑哲敏 谈庆明

引 言

681课题破甲机理组,几年来在参加单位大力协同下,特别在实验研究方面,取得了许多成果,使我们对破甲过程的认识有了实质性的提高。

破甲机理研究的任务和目的是,通过实验和分析的手段,弄清楚破甲过程以及影响这个过程的靶板方面和射流方面的主要因素,建立定量关系和可靠、实用的计算公式,为新型装甲材料和装甲板的研制,为提高破甲弹威力提供依据。

本报告的目的是汇报1974年、1975年我们在破甲机理力学分析和简化计算模型方面的一些工作。报告分为两个部分。

第一部分主要是根据机理组1974年底以前的试验,对破甲过程进行力学分析。试验资料来源于机理组成员52所、204所、江南机器厂和武钢钢研所。在这一部分里,我们讨论了以下几个问题:

- (一) 破甲机理;
- (二) 连续射流的准定常侵彻和炸高与穿深的线性关系;
- (三) u_j-u 的经验关系;

我们的主要结论是,至少对于钢靶板来说,流体弹塑性模型是比较可靠的;在破甲的全过程中,准定常侵彻占主导地位,因此射流速度 u_j 与侵彻速度 u 之间的关系的研究是十分重要的;国外常采用的一种 u_j-u 经验关系看来并不可靠,特别是公式中的常数未能正确反映靶板材料的强度性质,因而这样的公式难以为研制高抗力装甲材料提供依据。研究和建立能正确反映材料强度性质的 u_j-u 关系仍然是急待解决的问题。这方面的试验工作,除进一步提高 $p-t$ 曲线测量精度以外,还应当测定临界射流速度。

第二部分着重根据流体弹塑性模型建立 u_j-u 的理论关系。在靶板的力学性质方面,除了密度和通常的强度性质外,还考查了高压、高温、高应变率因素对 u_j-u 关系和靶板抗侵彻能力的影响。为建立 u_j-u 关系,我们提出了一个简化计算模型,它的基本思想是以理想不可压缩流体的流场为基础计算应力场,从而根据中心流线上的运动方程和能量方程,得出 u_j-u 关系和中心流线上的压力、温度和强度分布。在报告中我们介绍了平面射流侵彻靶板的理论解和计算结果。虽然实际问题是轴对称的,我们认为平面射流侵彻的解,对分析各种因素对靶板抗侵彻能力的影响,仍然是有意义的。轴对称射流侵彻的简化计算结果留待该项工作完成以后再做介绍。报告的第二部份分为以下几节:

— 108 —

本篇刊登在科技参考资料, 1977, 6: 108~164

- (一) 靶板的材料模型;
- (二) 准定常侵限过程的简化理论和求解原则;
- (三) 平面射流侵彻靶板的简化理论解和计算结果;

这一部分的初步结论主要有:

定性地说, 简化计算结果是合理的。定量地说, 完全由弹性理论来确定弹塑性区的大小看来偏小。这一点应该在研究轴对称问题时加以考虑。

在决定靶板材料抗破甲弹侵彻能力问题上, 密度和强度起主要作用。对于有一定延伸性的金属靶板, 常规拉伸实验的应力、应变关系所反映的强度(以下简称为常规强度)是强度的基数, 其它受力条件(为抗压、抗剪)下的强度可以由强度理论换算得出。如果假设材料是理想刚塑性的, 则选用的屈服极限应是拉伸屈服极限和拉伸强度之间的一个值, 由于孔底附近的变形量大, 拉伸强度可能是一个较好的选择。从总穿深看, 高应变率影响相当于提高常规强度百分之十几到几十; 高压影响相当于提高常规强度百分之几十(如果扩大塑性区, 则可能比现在的计算结果小一些)。因此, 高应变率和高压影响看来是不能忽略的。我们所试验的几种钢材, 直到300℃都能保持常温时的拉伸强度。计算表明, 进一步提高高温强度看来不能有效减小穿深。在这个意义上可以说, 高温的影响不是主要因素。但通过弹抗分析判断孔底温度或者直接测量侵彻过程中的靶板温度仍然是很有意义的, 因为它能反映高应变率和高压对提高强度的综合效果。

以上许多看法和结论取决于对材料力学性质, 特别是对高应变率、高压和高温影响的正确判断。材料力学性质方面的试验虽然做了一些, 但限于条件, 高压、高速条件下的材料试验有的刚刚开始, 有的尚无安排。我们认为, 这些方面的工作是急待开展和加强的。

上面汇报的这些工作, 正如前述, 是在681课题组各兄弟单位配合和支持下进行的。工作还是很初步的, 许多内容, 74—76年曾在不同场合与兄弟单位做过交流, 现在把它编写成文, 以利于交流和总结经验, 不当与错误之处希予批评指正。

一、破甲机理的力学分析

(一) 破甲机理

试验表明, 在静破甲条件下新40弹的射流具有如下性质: 头部速度为7.56千米/秒, 尾部速度约为1.9千米/秒, 在尾部与杵之间, 射流严重破碎, 与射流尾部最靠近的那一块虽比较完整, 且有一定速度(约1.5千米/秒), 但直径颇大, 约十几毫米, 因此对装甲钢而言, 可以认为这一部分没有侵彻能力, 在飞行过程中射流微元的速度基本保持不变, 并可表示为

$$Z = u_j t' - b \quad (1.1)$$

其中, Z 为通过弹轴的静止坐标系, 指向以射流飞行方向为正, 原点在药形罩的底面上, t' 为时间, 爆震波到达药形罩底面的时刻取为时间零点。 Z 和 t' 的单位分别取为毫米和微秒。不同的射流微元具有不同的 b , 所以 $b = b(u_j)$, 不过 b 的变化不大, 可以近似地

取为20毫米。因此(1.1)可以写为

$$Z = u_j t' - 20 \quad (1.2)$$

随着时间的增长,连续射流逐步发展为不连续的断裂射流。试验表明,对于603钢板或强度大于603的钢板,由于完成侵彻所需的时间短,因此射流拉断的因素可以不加考虑。对于象45号钢那样强度比较低的材料,完成侵彻所需的时间比较长,因此后期侵彻是在射流拉断的条件下进行的。

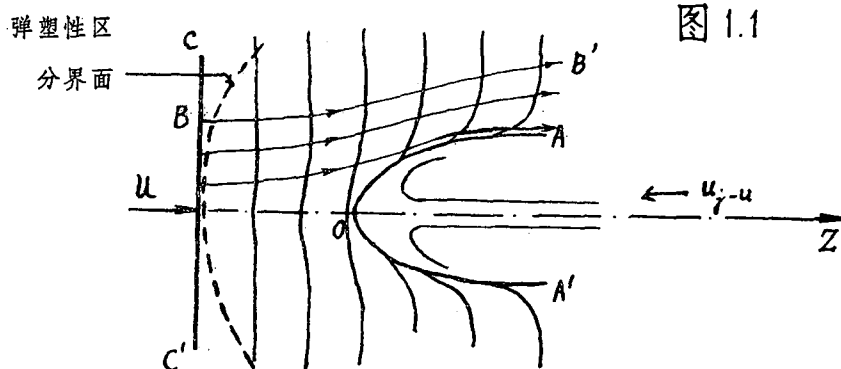
弹坑分析表明,入靶处有个漏斗坑,就603钢板而言,口部直径约为30毫米,坑深约15毫米。然后弹孔的直径随深度缓慢变化。自由射流的脉冲X光照片的分析表明,射流在孔底着靶时的直径变化不大,约为2.5~3毫米,再考虑到射流的速度梯度很小,因此可以把这一段侵彻过程当做是准定常的(详细的讨论见以后诸节)。

有时在弹孔的末端,孔径时大时小,显然可以认为这是不连续射流侵彻的结果。

有时在弹孔的末端出现孔径扩大和射流堆积的情况。这种现象可以理解为射流速度过低已不能进行侵彻,并在孔底进行堆积,但其压力超过扩孔所需的压力,因而那里的孔径进一步扩大。

在下一节,我们将证明,在连续射流定常侵彻的条件下,总穿深 P 必然和炸高 H 成线性关系,而变炸高的试验结果表明,在 $H \leq 164$ 毫米的条件下,的确有这样的线性关系。因此,现在有了比较充分的试验根据来建立连续射流定常侵彻这样一个基本模型。

让我们看一下准定常条件下,靶板的变形和流动情况。在图1.1中,我们把相对坐标的原点固定在侵彻点 O 上。相对于 O 点,射流的来流速度为 $u_j - u$,靶板的来流速度为 u 。 AOA' 是射流与靶板材料的分界面。 BB' 代表流线,即靶板微元的运动轨迹, CC' 等线表示原来垂直于对称轴 Z 的直线在侵彻过程中所经历的变化,虚线表示弹塑性区分界面。



从流动和变形图片上,可以看到靶板材料受到以下类型的变形:

(1) 扩孔—即原来无孔的靶板被挤出一个直径为 AA' 的元孔来,孔的形成是由于材料在射流冲击的高压作用下产生径向运动。除惯性力外,抵抗这种变形的力是靶板中的环向拉应力,它是和材料的拉伸强度有关的。一般说来,应变率虽然比较大,但靶板材料基本上处于常温和常压条件下的。高强度、低冲击韧性的材料在破甲弹作用下开

裂, 以及弹坑解剖时所发现的与坑壁成 45° 的裂缝与白层走向(图1.2)都说明有元周方向的拉应力。

(2) 孔底附近有很大的剪切变形。这是与弹坑解剖中发现的以下情况相对应的: 在垂直于弹坑轴线的剖面中出现环状裂缝与白层; 在子午面上出现与坑壁成一定倾角的裂纹与白层, 而且晶粒的畸变也具有类似的方向。

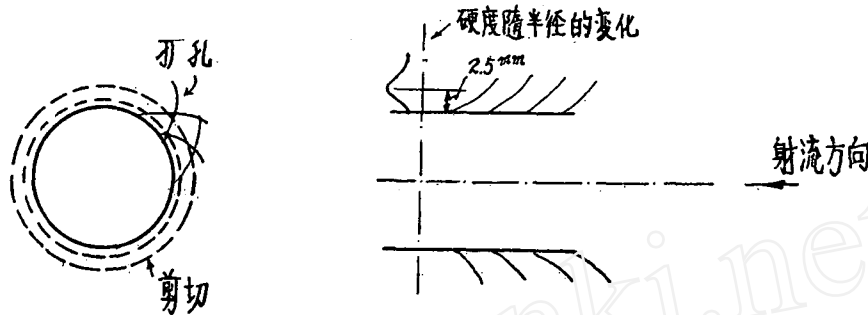


图 1.2

(3) 处于孔底中心部位的材料变薄得很严重, 当薄到一定程度时就被拉断。

由于上述变形, 坑壁表现为鱼鳞状, 对于韧性较差的高强度材料, 这种现象更为突出。

由于(2)和(3)两类变形都发生在离孔底很近的地方, 而且由于变形量大, 温度就高, 所以在考虑这一部份靶板材料的变形阻力时, 不仅象对于(1)那样需要顾及高应变率这个因素, 而且要研究高压和高温对材料强度的影响。

现在我们对孔底的受力、变形和温度情况作一些数量级的估计。以前已经论证过, 在定常侵彻条件下, 可压缩性的影响是比较次要的, 特别是在侵彻速度小于2.5千米/秒或O点压力小于30万大气压以下。因此, 下面就用不可压缩流体理论来估算射流对靶板的作用力(参看[1], 表3)。

将射流当作不可压缩流体, 并忽略粘性, 则O点的压力 p^* 为

$$p^* = \frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 \quad (1.3)$$

根据动量守恒原理, 还可以导出射流作用于靶板的合力 F 为

$$F = 2\rho_j \pi a^2 (u_j - u)^2 \quad (1.4)$$

其中, ρ_j 为射流材料的密度, a 是射流的半径。如果以 πR^2 表示射流在孔底作用的平均面积, 也即 $P^* \pi R^2 = F$, 则有

$$R = 2a \quad (1.5)$$

$a \cong 1.2 \sim 1.5$ 毫米, 所以 $R \cong 2.5 \sim 3$ 毫米, 这也就是射流堆积区或高压作用区的半径的近似值。靶板的剪切变形区的尺寸应该比这个值大。

可以从两个不同的方面来估算剪切变形区的尺寸。根据弹坑解剖, 硬度增加区距离坑壁约5毫米。若取弹坑直径为16毫米, 则根据质量守恒关系, 这个高硬度区在变形

前所处的位置 R_1 为

$$R_1 = \sqrt{(8+5)^2 - 8^2} \sim 10 \text{ 毫米}$$

这是对剪切变形区半径的估计。

另一方面, 根据弹性理论, 对于一个以等速 u 运动, 大小为 $F = 2\rho \pi a^2 (u_j - u)^2$ 的集中载荷 (参看本报告第二部分的附录A), 弹塑性区分界点到 F 作用点 O 的距离 Z_p 为

$$Z_p^2 = a^2 \frac{\rho_j}{2} \frac{(u_j - u)^2}{Y_0} (3 - \alpha^2) = (3 - \alpha^2) \frac{P^*}{Y_0} a^2 \quad (1.6)$$

其中, α 为靶板材料中横波与纵波波速的比例,

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}, \quad 3 - \alpha^2 = \frac{5 - 4\nu}{2(1 - \nu)} \quad (1.7)$$

ν 是泊松系数, 对钢而言, $\nu = 1/3$ 。由于弹性理论不考虑材料的屈服, 所以(1.6)是一种偏小的估计, 真实的 Z_p 要比以上估计大一些。

根据下面第三节的半径经验公式计算 P^* , 对603钢板, 若取 $Y_0 = 1.0$ 万巴, 我们得到表1所列之值。因此塑性区的长度约为射流半径的5到10倍。应变率 $\dot{\epsilon}$ 的数量级为 $\frac{u}{Z_p}$,

表1 (603钢, 取 $Y_0 = 1.0$ 万巴)

u_j 毫米/微秒	7	6.5	6	5.5	5.0	4.5	4	3.5	3.0	2.5	2
P^* 万巴	53.7	46.7	40.4	34.5	29.1	24.3	20.0	16.2	13.0	10.3	8.2
$\frac{Z_p}{a}$			10.54	9.75	8.96	8.17	7.43	6.68	5.98	5.33	4.63

当 $u_j = 6.0$ 毫米/微秒, $u \sim 3.0$ 毫米/微秒, 取 $a = 1.5$ 毫米, 我们得 $\dot{\epsilon} \sim 2 \times 10^5$ (1/秒)。当 u_j 减小时, $\dot{\epsilon}$ 相应地也要减小。

现在来估算孔底靶板材料的温升。以前已经论证过, 在定常侵彻条件下, 温升主要是塑性变形造成的 (在我们的压力范围内, 例如将钢等熵压缩到47.6万巴, 温度上升不过140℃)^[1]。对于我们试验的几种钢板, 在常压下, 温度到达900℃钢板便基本失去强度, 进一步的变形就不再会由于塑性变形而造成明显的温升。根据这一估计, 在定常侵彻区, 由高压到较低的压力区, 温升大约在1100°到900℃之间变化。这个估计与金相分析的结果大体一致。

概括起来, 根据试验结果分析, 我们有理由认为定常侵彻是新40弹穿透防护装甲的主要过程。开坑阶段和非连续射流侵彻以及后期射流堆积对侵彻深度的影响是次要的。流体弹塑性模型基本上能反映靶板变形的主要方面 (断裂问题需要另行考虑)。孔底处的压力低于30万巴时, 基本上可以忽略射流和靶板材料的可压缩性。孔底压力大于30万巴时, 原则上应考虑可压缩性的修正。这篇报告着重研究材料的强度因素, 因此以下我们将采用不可压缩流体弹塑性模型, 并且把射流当作无粘性的不可压缩流体。可压缩性影响可以作为一种修正加到上述不可压缩的模型中去。

(二) 连续射流的准定常侵彻和炸高与穿深的线性关系

如果射流各微元的直径和速度都是常数, 而且它的长度又很大, 则在侵彻均匀靶板一定深度之后, 射流侵彻过程趋于定常, 这时在射流速度 u_j 与侵彻速度 u 之间有一个确定的关系:

$$u = u(u_j) \quad (2.1)$$

这个关系的具体形式取决于射流和靶板材料的性质, 在射流材料一定的条件下, 自然就只取决于靶板材料的性质。

对于一个不受阻挡的自由射流来说, 如果速度梯度是头部大, 以后递减, 那末作用于单位截面积的力为 σ_j , 而通过单位面积的动量流为 $\rho_j u_j^2$ 。 σ_j 是射流材料的屈服应力, 由于射流温度很高, σ_j 的数值很小。因此 $\rho_j u_j^2 / \sigma_j$ 是一个很大的量, 它说明惯性力远大于截面上的应力。因此每一个射流微元都是在惯性力的作用下以恒速运动。

在射流受靶板阻挡的情况下, 在孔底形成射流堆积, 堆积区大小的数量级应大致与触靶那部分射流的半径为同一个数量级。例如, 前面已经估计过, 在定常侵彻条件下, 堆积区半径约为射流半径的一倍。又例如, 通过计算, 在平面射流情况下, 在距离驻点 2 倍射流厚度的位置上, 射流速度已达到来流速度的 95% (参看本报告第二部分的附录 B)。对于新 40 弹, 在射流开始着靶后,

$$-\frac{r}{u_{j0}} \frac{du_j}{dx_0} \leq 0 \quad (10^{-2}) \ll 1$$

其中, r 是射流半径, u_{j0} 是头部速度, du_j/dx_0 是射流的速度梯度。另外, 根据 X 光摄影 dr/dx_0 也是一个很小的量。这就是说, 以射流的半径为尺度, 射流微元的速度变化和半径变化都是很缓慢的, 并且射流是很长的。再有, 前面已经说过, 打击靶板的射流微元的半径基本一致。在这种情况下, 我们预期, 尽管射流微元速度是变化的, 然而在瞬时的侵彻速度 u 和着靶那部分射流微元的速度 u_j 之间仍存在着如 (2.1) 式所表示的那种关系。这样的过程, 我们称之为准定常侵彻过程。

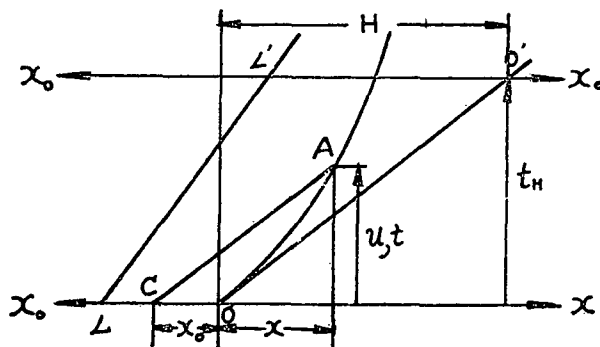


图 2.1

现在我们假设侵彻的全过程都是准定常的, 然后看看由此所得出的结论是否与试验结果一致, 从而论证准定常假设是否成立, 或者在什么条件下是成立的。

我们取如图 2.1 所示的坐标系, 射流头部微元着靶的时间取做时间的零点 O , 因此 O 点也是侵彻曲线 OAB 的起点。 X 坐标垂直于靶板并指向侵彻

方向, X_0 的指向与 X 相反, 坐标原点都是 O 。当 $t=0$, 射流有一定的速度分布, 即

$$u_j = u_j(x_0)$$

或

$$x_0 = x_0(u_j) \quad (2.2)$$

我们用 u_{j0} 和 u_{jL} 分别表示射流的头部和尾部速度, 用 L 表示 $t=0$ 时射流长度。显然, 根据 (2.2), 我们有

$$L = x_0(u_{jL}) \quad (2.3)$$

射流的每一个微元都以恒速运动, 所以在 $x-t$ 平面上它们的轨迹是一些直线。A 是侵彻曲线上的任意点, 它的坐标是 (x, t) 。CA 是通过 A 点的射流微元轨迹, 其速度为 u_j 。

根据几何关系, 我们有

$$x_0 + x = u_j t \quad (2.4)$$

另外, 按照侵彻曲线的定义

$$u = \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

从方程组 (2.1)、(2.4)、(2.5) 就能根据射流的初速分布和必要的初始条件解出侵彻曲线 (简称 $p-t$ 曲线)。具体解法如下。

取 (2.4) 式的微分, 并利用 (2.5) 式, 我们得到

$$dx_0 + u dt = t du_j + u_j dt,$$

也即

$$(u_j - u) \frac{dt}{du_j} + t = \frac{dx_0}{du_j} \quad (2.6)$$

这是 t 的一阶常微分方程, 自变数为 u_j , $(u_j - u)$ 和 X_0 都是 u_j 的已知函数。解这个方程的初始条件是

$$u_j = u_{j0}, \quad t = 0 \quad (2.7)$$

我们解得

$$t(u_j) = e^{-F(u_j)} \int_{u_{j0}}^{u_j} e^{+F(u_j)} \frac{dx_0}{u_j - u} du_j, \quad (2.8)$$

其中

$$F(u_j) = \int_{u_{j0}}^{u_j} \frac{du_j}{u_j - u} \quad (2.9)$$

代入 (2.4) 式, 又得到

$$x(u_j) = -x_0(u_j) + u_j e^{-F(u_j)} \int_{u_{j0}}^{u_j} e^{+F(u_j)} \frac{dx_0}{u_j - u} du_j \quad (2.10)$$

(2.8) 和 (2.10) 式给出以 u_j 为参变量的侵彻曲线。

下面计算最大穿深。根据射流速度分布试验,在远离原点处,射流微元轨迹没有相互交叉的情况,因此侵彻的顺序是速度大的微元在先,速度小的在后。 u_{jL} 是射流的最小速度。令 u_j^* 表示定常侵彻条件下的临界射流速度,它的定义是:如果 $u_j \leq u_j^*$,则 $u = 0$ 。令 P 表示最大穿深,则有

$$P = -x_0(u_{jL}) + u_{jL} e^{-F(u_{jL})} \int_{u_{j0}}^{u_{jL}} e^{F(u_j)} \frac{dx_0}{u_j - u} du_j \quad \text{当 } u_{jL} \geq u_j^* \quad (2.11)$$

$$P = -x_0(u_j^*) + u_j^* e^{-F(u_j^*)} \int_{u_{j0}}^{u_j^*} e^{F(u_j)} \frac{dx_0}{u_j - u} du_j \quad \text{当 } u_{jL} \leq u_j^*, u_{j0} > u_j^* \quad (2.12)$$

现在讨论最大穿深 P 和炸高的关系,并用以与试验相对照。

如果我们把炸高比前面讲的增加 H ,那末射流头部着靶的时间将推迟 t_H , $t_H = H/u_{j0}$ 。我们仍可用(2.11)式[或(2.12)式]计算最大穿深 P' ,需要改变的仅仅是以 $x_0'(u_j)$ 代替 $x_0(u_j)$ (见图2.1),即

$$P' = -x_0'(u_{jL}) + u_{jL} e^{-F(u_{jL})} \int_{u_{j0}}^{u_{jL}} e^{F(u_j)} \frac{dx_0'}{u_j - u} du_j$$

但是,根据几何关系, x_0 和 x_0' 间有下述关系:

$$x_0' = x_0 + (u_{j0} - u_j) t_H$$

因而

$$\frac{dx_0'}{du_j} = \frac{dx_0}{du_j} - t_H$$

代入 P' 的表达式并利用(2.11)式,我们得到

$$P' = P + H \left(\frac{u_{jL}}{u_{j0}} e^{-F(u_{jL})} - 1 \right) \quad (2.13)$$

所以

$$\frac{dP'}{dH} = \frac{u_{jL}}{u_{j0}} e^{-F(u_{jL})} - 1 \quad (2.14)$$

上式的右端只取决于射流头部和尾部的速度,以及反映材料性质的 $u_j - u$ 关系,它与炸高无关,与射流的速度分布也无关。(2.14)式的右端显然大于零,因为

$$\frac{u_{jL}}{u_{j0}} e^{-\int_{u_{j0}}^{u_{jL}} \frac{du_j}{u_j - u}} = e^{-\ln \frac{u_{j0}}{u_{jL}} + \int_{u_{jL}}^{u_{j0}} \frac{du_j}{u_j - u}} = e^{\int_{u_{jL}}^{u_{j0}} \frac{u du_j}{u_j(u_j - u)}} > 1$$

这样,我们就得到一个很重要的结论:在侵彻的全过程都是准定常的假设下,穿深随炸高的增加而线性增加。反之,如果穿深随炸高线性增加,则可以认为在 u_j 和 u 之间存在着一个与炸高无关,即与射流速度分布无关的关系。这个关系,从极限角度看,就

是定常侵彻关系。所以，如果变炸高试验证实存在着穿深随炸高线性增加的关系，那末就可以把侵彻的全过程当做是准定常的。

图2.2给出不同炸高条件下的穿深试验结果，所用的破甲弹是新40弹，靶板是603钢。同一个图中还给出另外两个弹的试验结果(282厂681机理组提供)，靶板都是603钢。试验条件是垂直静破甲。我们看到，纵然数据有些分散，确实存在一个穿深随炸高线性增加的关系。不过，当炸高大于某一值时，穿深便脱离这个线性关系，出现穿深基本保持不变，继而随炸高的增加而逐步下降的情况。新40弹的标准炸高(164毫米)大体上落在线性增加段的上端。

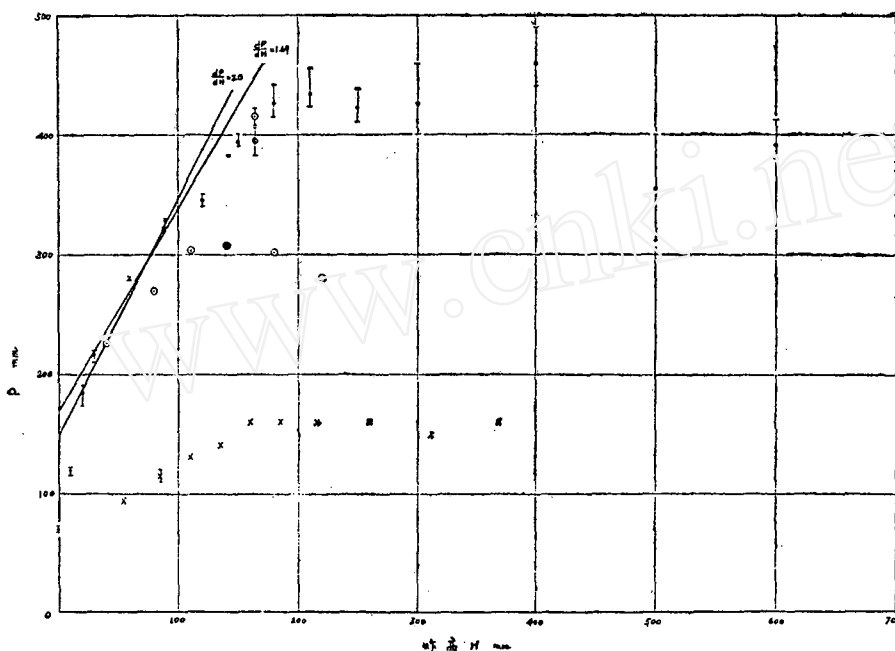


图2.2 三种弹的穿深、炸高曲线(最上面一条为新40弹，靶板为603钢)

根据新40弹自由射流的脉冲X光摄影和 $p-t$ 曲线的测量，穿深、炸高关系之所以脱离线性增加关系是由于射流的拉断。新40弹在标准炸高条件下侵彻603钢板时，拉断发生在侵彻末期的最后一小段上，因而拉断对穿深的影响是不明显的。对于1#、2#、3#、4#四种强度超过603钢的靶板，由于完成侵彻所需的时间更短，因而不出现拉断的情况。因此可以说，对于603钢和强度更高的防护装甲，在侵彻的全过程中，射流保持连续。至于45号钢，由于强度低，完成侵彻所需的时间长，因而后期侵彻是不连续射流造成的，在总穿深中占有不可忽略的比重。

由此可见，在射流保持连续的条件下，线性律——即穿深随炸高的增加而线性增加，是得到试验证实的。这意味着，虽然开坑阶段与侵彻终了有明显的非定常性质，但是从总穿深看，准定常侵彻是占主导地位的，以至非定常效应可以忽略不计。如上所述，线性律成立的原因是由于射流的长度大，速度梯度小，质量分布比较均匀，而且靶板的强

度比较高。

上面这个结论是重要的。它说明在研究破甲机理时，应该着重研究准定常侵彻。

(三) u_j-u 的经验关系

既然侵彻的整个过程可以相当准确地当做是准定常的，那末除了炸高和射流的速度分布外，决定 $p-t$ 曲线的唯一其他条件便是 u_j-u 关系，所有关于材料性质的因素都包含在这个关系之内。

在本节，我们结合不同强度靶板的穿深试验和 $p-t$ 曲线的实际测量，讨论 u_j-u 间的下述经验公式

$$\frac{1}{2}\rho_j(u_j-u)^2 = \frac{1}{2}\rho_t u^2 + KY_0, \quad (3.1)$$

其中，常数 KY_0 反映材料的强度， Y_0 是材料的动态拉伸屈服极限。我们把 u_j-u 理论关系的讨论留在本报告的第二部分。重点都是讨论靶板强度对 u_j-u 关系的影响。

当射流速度比较大的时候，更确切地说，当 $S = Y_0 / \frac{1}{2}\rho_j u_j^2$ 充分小时，靶板的强度可以忽略不计。这样就可以在理想流体的基础上建立定常侵彻的 u_j-u 关系。

如果再做不可压缩的假设，则侵彻点的压力 P^* (参看图 1.1) 可分别表示为

$$P^* = \frac{1}{2}\rho_j (u_j - u)^2 \quad (3.2)$$

$$P^* = \frac{1}{2}\rho_t u^2 \quad (3.3)$$

因此， u_j-u 关系是 $\frac{1}{2}\rho_j (u_j - u)^2 = \frac{1}{2}\rho_t u^2$, (3.4)

或 $u = u_j / (1 + \sqrt{\rho_t / \rho_j})$ 。 (3.5)

如果 u_j 很大，那末 u 和 P^* 也就很大。这时在 P^*-u 和 $P^*-(u_j-u)$ 关系中就不能忽略靶板和射流材料的可压缩性。在参考资料[1]中，已经介绍过确定 P^*-u 或 $P^*-(u_j-u)$ 关系的方法。这里只是指出，在靶板为钢，射流为紫铜的条件下，可压缩性对 u_j-u 关系的影响远比对 $P-u$ 或 $P-(u_j-u)$ 的影响要小，因而在我们所需要考虑的射流速度范围内 ($u_j < 8$ 千米/秒)，(3.4) 或 (3.5) 式仍然不失为作为忽略靶板 (及射流) 强度的一个较好的 u_j-u 关系。

对比 (3.1) 和 (3.4) 式，我们可以把 (3.1) 式中的 KY_0 当作表示强度影响的一个常数。在破甲弹的条件下，射流的强度可以忽略，因此 KY_0 是反映靶板强度的一个数，把 Y_0 取为靶板材料的屈服强度是合适的。

在 (3.1) 式可以应用的条件下， KY_0 和临界射流速度之间具有这样的联系。令 u_j^* 表示临界射流速度，则根据定义，从 (3.1) 式得到

$$u_j^* = \sqrt{\frac{2KY_0}{\rho_j}}$$

至于 KY_0 近一步的物理意义，我们在下面还要讨论。

根据 (3.6) 式，(3.1) 式又可写为 (3.6)

$$\frac{1}{2}\rho_j(u_j-u)^2 = \frac{1}{2}\rho_t u^2 + \frac{1}{2}\rho_j u_j^{*2}. \quad (3.7)$$

现在，我们首先检查 (3.7) 式的适用性。把 (3.7) 式代入 (2.11) 或 (2.12)

式, 并应用实验所得的射流速度分布 (1.2) 式, 就能计算与 u_j^* 相应的穿深, 从而得出 $p-u_j^*$ 曲线。另一方面, 通过 603、1*、2*、3*、4* 钢板在标准炸高条件下的穿深试验, 我们知道这几种钢板的 p 值。这样, 我们就得出了以上五种钢板的临界射流速度 u_j^* 及 KY_0 , 从而确定了 (3.1) 或 (3.7) 式中的待定常数。

然后, 可以从两方面检查 (3.7) 式的适用性。第一个方面是比较穿深炸高关系的试验斜率与理论斜率。第二个方面是比较各种靶板的试验和理论 $p-t$ 曲线。不论那个方面, 如果试验与理论比较一致。就说明 (3.7) 式是基本适用的。

我们先按 (1.1) 式求得射流头部着靶时的速度分布。令 H_0 表示药形罩底部到靶板表面的距离, $t' = \tau_H$ 表示着靶时刻, 则从 (2.1) 式得到

$$H_0 = u_{j0} \tau_H - b(u_{j0}). \quad (3.8)$$

Z 坐标系中, 在同一时刻, 速度为 u_j 的射流微元所在的位置为

$$Z = u_j \tau_H - b(u_j).$$

但是 (参看图 3.1)

$$X_0 = H_0 - Z$$

$$\text{所以 } X_0 = (u_{j0} - u_j) \tau_H - [b(u_{j0}) - b(u_j)], \quad (3.9)$$

$$\frac{dx_0}{du_j} = -\tau_H + \frac{db(u_j)}{du_j}. \quad (3.10)$$

(3.9) 式就是所要求的 x_0-u_j 关系。根据试验结果, $b=20$ 毫米。因此 (3.9)、(3.10) 式可以简化为

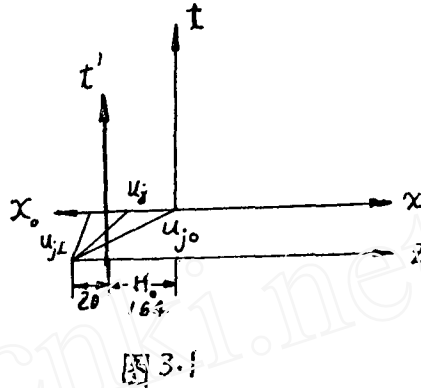
$$\left. \begin{aligned} X_0 &= (u_{j0} - u_j) \tau_H \\ \frac{dx_0}{du_j} &= -\tau_H, \\ \tau_H &= \frac{H_0 + b}{u_{j0}} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

代入公式 (2.8) 和 (2.10), 我们就得到下面计算穿深的公式:

$$t(u_j) = \tau_H (e^{-F(u_j)} - 1) \quad (3.12)$$

$$X(u_j) = \tau_H u_{j0} \left(\frac{u_j}{u_{j0}} e^{-F(u_j)} - 1 \right) = (H_0 + b) \left(\frac{u_j}{u_{j0}} e^{-F(u_j)} - 1 \right). \quad (3.13)$$

按照不同的情况, 取 $u_j = u_{jL}$ (如果 $u_{jL} \geq u_j^*$) 或 $u_j = u_j^*$ (如果 $u_{jL} \leq u_j^*$), 就得到最大穿深和达到最大穿深的时间。



下面,我们用经验公式(3.7)计算 $F(u_j)$ 。我们有

$$u_j - u = \frac{1}{1 - \frac{\rho_c}{\rho_j}} \left[\sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_j} u_j^2 + (1 - \frac{\rho_c}{\rho_j}) u_j^2} - \frac{\rho_c}{\rho_j} u_j \right] .$$

$$\text{令 } \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_j}} u_j = \sqrt{1 - \frac{\rho_c}{\rho_j}} u_j^* \operatorname{tg} \theta \quad (3.14)$$

$$\text{得到 } F(u_j) = \int_{u_{j0}}^{u_j} \frac{du_j}{u_j - u} = (1 - \frac{\rho_c}{\rho_j}) \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_c}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 - \frac{\rho_c}{\rho_j} \sin^2 \theta) \cos \theta} ,$$

其中, θ 与 u_j 按(3.14)式相对应, θ_0 与 u_{j0} 相对应。再令

$$\lambda = \sin \theta \quad (3.15)$$

得到

$$F(u_j) = (1 - \frac{\rho_c}{\rho_j}) \sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_c}} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(1 - \frac{\rho_c}{\rho_j} \lambda^2)(1 - \lambda^2)} ,$$

这里, λ 和 λ_0 按照(3.15)式与 θ 和 θ_0 相对应。解上述积分,我们最后得出

$$-F(u_j) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_c}} + 1 \right) \ln \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda_0} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_c}} - 1 \right) \ln \frac{1 + \lambda_0}{1 + \lambda} - \ln \frac{\sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_c}} - \lambda}{\sqrt{\frac{\rho_j}{\rho_c}} - \lambda_0} \quad (3.16)$$

$$\text{其中 } \lambda = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{u_j}{u_j^*} \right)^2 \left(\frac{\rho_j}{\rho_c} - 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (3.17)$$

当 u_j 等于 u_{j0} 、 u_{jL} 、 u_j^* 时, λ 分别为 λ_0 、 λ_L 、 λ^* 。

在数值计算中,我们取以下数据:

$$\rho_j = 8.60 \text{ 克/厘米}^3$$

$$\rho_c = 7.80 \text{ 克/厘米}^3$$

$$u_{j0} = 7.56 \text{ 毫米/微秒}$$

$$u_{jL} = 1.90 \text{ 毫米/微秒},$$

$$H_0 + b = 164 + 20 = 184 \text{ 毫米},$$

$$\frac{dx_0}{du_j} = -\tau_H = \frac{164 + 20}{7.56} = 24.34 \text{ 微秒}.$$

我们首先计算相应于任一个 u_j^* 的最大穿深,计算结果见表3.1和图3.2。

表 3.1

临界射流速度 u_j^* , 毫米/微秒	KY_0 万巴	最大穿深 p , 毫米	完成侵彻所需 时间 T , 微秒	炸高曲线斜率, $\frac{dp}{dH}$	备 注
0.8	2.752	480	325	2.61	$u_{jL} > u_j^*$
0.9	3.483	454	312	2.47	“
1.0	4.300	428	298	2.33	“
1.1	5.200	402	284	2.19	“
1.2	6.192	376	270	2.04	“
1.4	8.43	325	243	1.768	“
1.6	11.01	278	218	1.510	“
1.8	13.93	234	196	1.275	“
1.9	15.52	223	190	1.215	$u_{jL} = u_j^*$
2.0	17.20	185	170	1.009	$u_{jL} < u_j^*$
2.20	20.81	124	138	0.575	“

表3.2列出六种靶板的穿深试验结果, 以及由图3.2查得的 u_j^* 和 KY_0 的数值。

表 3.2

靶板	静态拉伸强度 δ_b , 万巴	静态拉伸屈服 极限, 万巴	p , 毫米	u_j^* , 毫米/微秒	KY_0 万巴	$P_s^*(Y_0=\sigma_b)$, 万巴	$P_c^*(Y_0=\sigma_b)$, 万巴
45 [#]	0.6		435	0.97	4.2		
603	1.0		400	1.10	5.25	4.0	3.4
2 [#]	1.4	1.23	338	1.35	7.85	5.3	4.4
3 [#]	1.7	1.64	299	1.51	9.85	6.2	5.2
4 [#]	1.8		265	1.66	11.85	6.5	5.4
1 [#]	2.0		251	1.72	12.7	7.1	5.9

图3.3上标出了六种靶板的平均穿深, 横坐标为 σ_b 。图3.4给出 KY_0 、 u_j^* 与 σ_b 的关系。我们看到由45[#]钢的 KY_0 所折合的 u_j^* 约为0.97千米/秒, 显得过大, 这显然是射流拉断的结果, 对于其它五种靶板, $p-\sigma_b$ 或 $u_j^*-\sigma_b$ 间的关联尚好, 不过强度最高的那两种靶板与其它三种偏离较为明显。看来, 需要有静态拉伸的应力应变曲线, 才能对 $p-\sigma_b$ 或 $u_j^*-\sigma_b$ 间的关联作进一步的讨论。无论如何, 从图3.3和3.4的总趋势看, σ_b 不失为标志靶板抗破甲性能的一个重要的, 虽然不是唯一的指标。

603钢板炸高试验曲线的斜率在1.7与2.0之间, 按平均穿深为401毫米, 根据(3.7)式所得的“理论”斜率为2.18。实验与“理论”值大体相同。

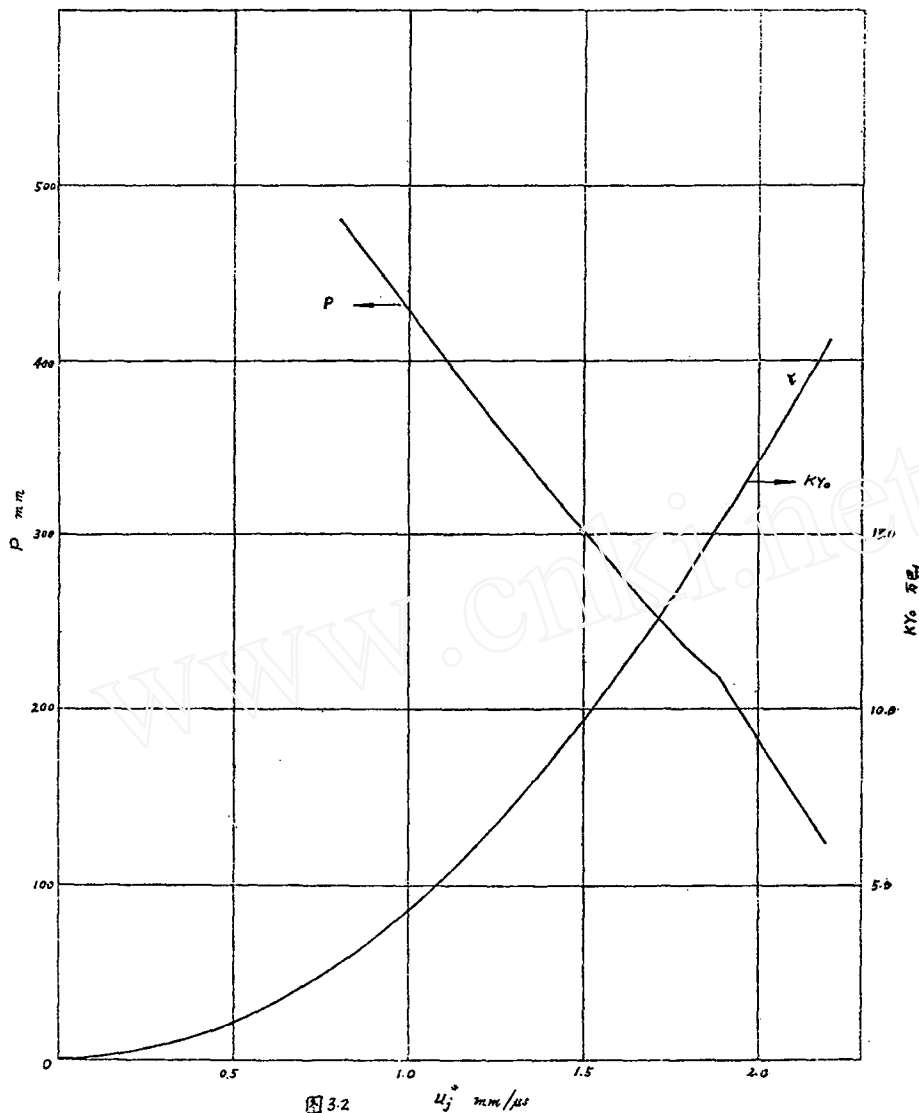
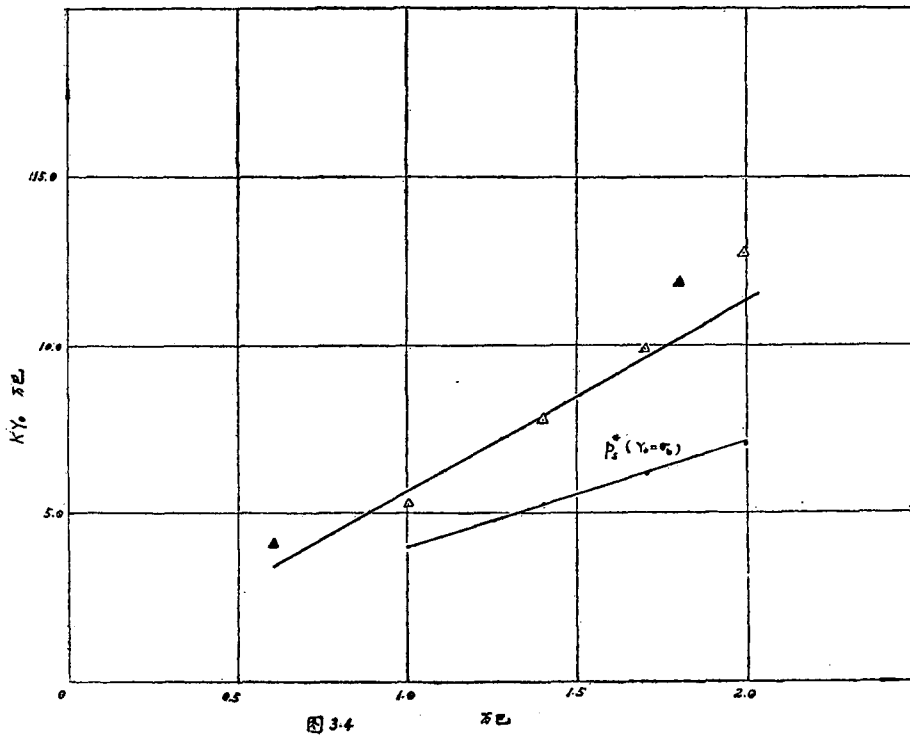
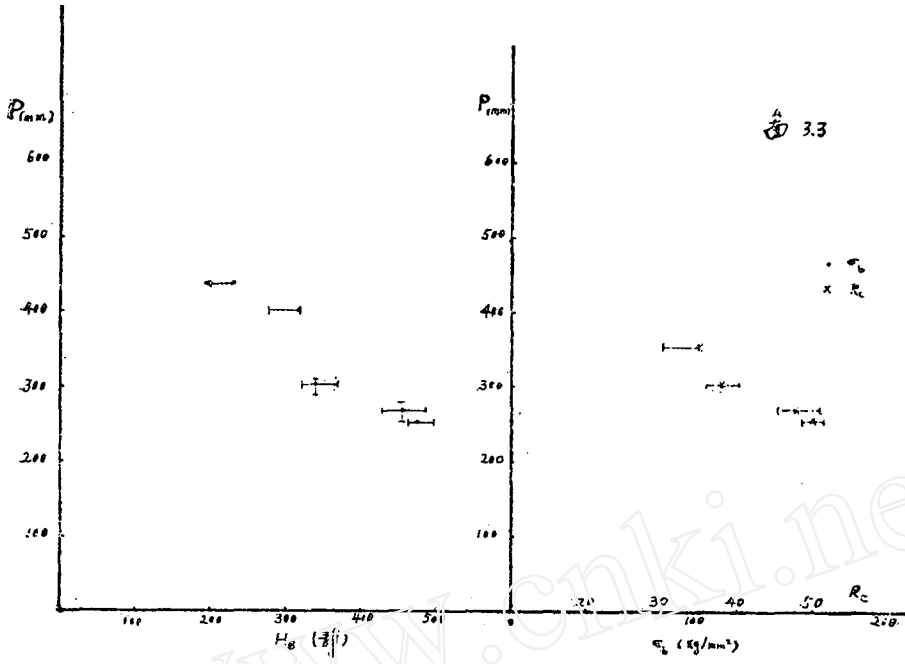


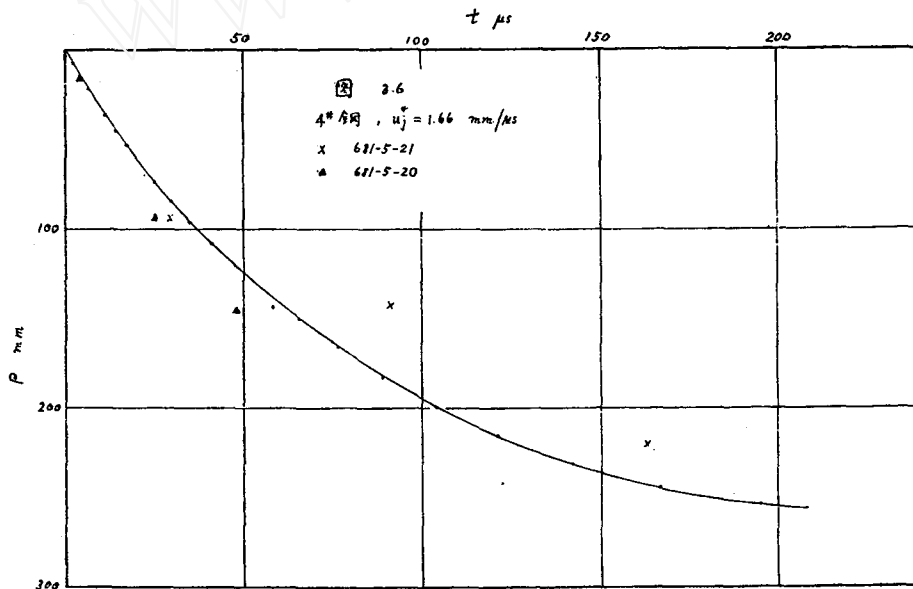
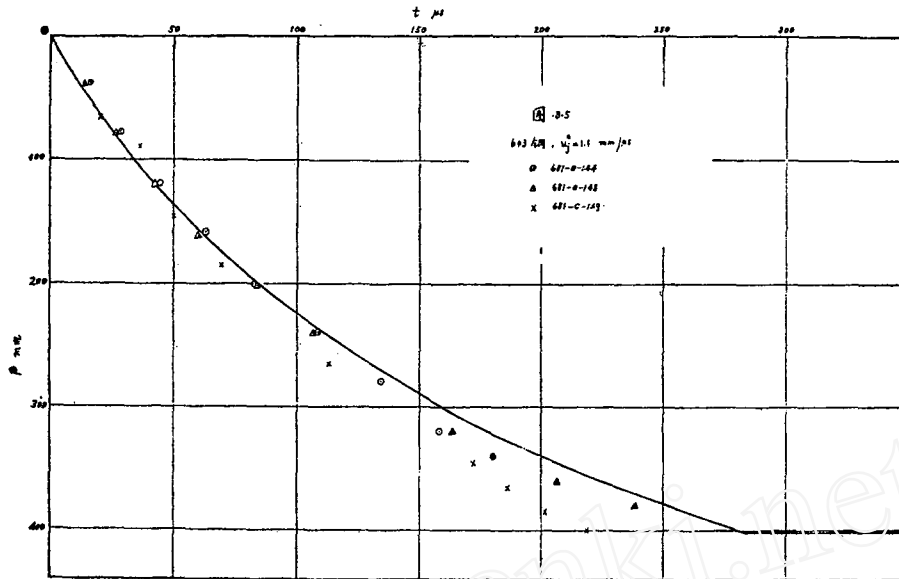
图3.2
图3.2

根据表3.2所列的 u_j^* ，就能由(3.12)、(3.13)、(3.16)和(3.17)式计算新40弹对各种靶板的 $p-t$ 曲线。计算所得的两条 $p-t$ 曲线绘于图3.5和3.6。为了便于与实验对比，图上同时标出了603钢和4*钢的试验数据。

我们看到，试验与计算曲线符合的情况属于一般。603钢的测量结果比较集中，4*钢的相当分散。603钢的数据有系统偏差，射流速度低到一定程度后，试验点系统地偏低。应当指出， $p-t$ 测量采用夹在两层靶板间的靶网，所以它记录的量是在拉格朗日坐标系中的，而在计算中采用的是欧拉坐标。试验中还有靶网提前触发的情况。这两种因素所造成的系统偏差具有相反的符号。目前对测量精度尚难做出较确切的估计。

对经验公式(3.1)做更严格的检验，应当是直接对比试验所得的 u_j-u 关系和在确定





KY_0 之后的 (3.1) 式。 u_j-u 的试验关系是从 $p-t$ 曲线的微分得来的, 因而精度要低一些, 对这些数据正另做进一步的处理。204 所提供的初步数据见图 3.9。这些数据的特点是, 在低射流速度这一头, u 下降得特别快。如果用 (3.1) 式去凑合, 就会发现, 当我们调整 u_j^* (KY_0) 与由试验点外插的临界射流速度一致时, 则 (3.1) 式所给出的 u 在高射流速度端就过小。反之, 如果调整 u_j^* 使 (3.1) 式与试验数据在高速端基本一致,

则在低速端(3.1)式给出的 u 值过大。我们认为主要原因是,除了低速端测量比较困难,因而精度差之外,从理论上讲,(3.1)式不可能是严格对的。 KY_0 这个代表靶板强度所提供的阻力,不应当是常数。它应该是侵彻速度 u 的函数(参看[1])。 u 愈大,

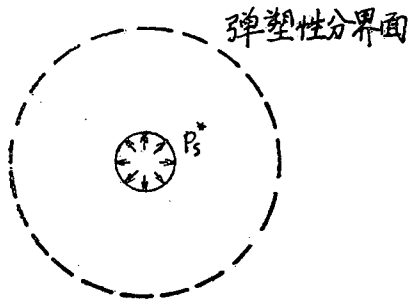


图3.7 球形胀形

靶板中的塑性变形区就愈大,塑性变形的阻力也就愈大,因而 KY_0 应该随着 u 的增大而增大。因此,当我们用总穿深 p 确定 KY_0 时,(3.1)式中的 KY_0 是受射流头部和尾部速度影响的一种平均值。因而 KY_0 不仅是靶板材料强度性质的函数,也取决于靶板和射流密度及其它射流参数。这样 KY_0 就失去了作为反映材料强度参数的意义,从而(3.1)式也就不可能正确反映只代表靶板材料性质、射流密度和射流微元速度 u_j 之间的 u_j-u 关系了。因而从

试验和理论上建立 u_j-u 关系仍然是我们面临的任务。

作为一个例子来说明(3.1)式是存在问题的,我们用另一种方法估算临界射流速度 u_j^* 。

在极限射流速度条件下,孔底的最大压力为

$$P_s^* = \frac{1}{2} \rho_j u_j^{*2}.$$

这个压力应当大约等于在一个弹塑性无限介质中扩张一个球形孔(参看图3.7)所需的压力 P_s^* 。如果在塑性区假设材料是理想刚塑性的,就能用弹塑性理论计算 P_s^* ,我们得到

$$P_s^* = \frac{2}{3} Y_0 \left[1 + \ln \frac{E}{(1+\nu)Y_0} \right], \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{2} \rho_j u_j^{*2} = P_s^* = \frac{2}{3} Y_0 \left[1 + \ln \frac{E}{(1+\nu)Y_0} \right]. \quad (3.19)$$

根据这种估计, P_s^* 等于(3.1)式中的 KY_0 。我们把根据(3.18)式所得的 P_s^* 绘于图3.8。如果把 σ_b 当作 Y_0 ,就能按表3.2所给的 σ_b 值,从图3.8查得相应的 P_s^* ,所得结果列于表3.2和图3.4。我们看到 P_s^* 远比 KY_0 要小,而且强度 σ_b 愈大,相差倍数愈大,有的竟超过一倍。我们认为这是不能单单由应变率影响来解释的。理由是,如前所述, KY_0 是一种平均值,在这里是由总穿深和给定的射流参数确定的。如果把这样确定的 KY_0 外插到 $u_j = u_j^*$,就要出现矛盾。当然,以上结论取决于 P_s^* 的可靠性。如果我们能用实验方法直接测定 u_j^* ,则将更能说明问题。

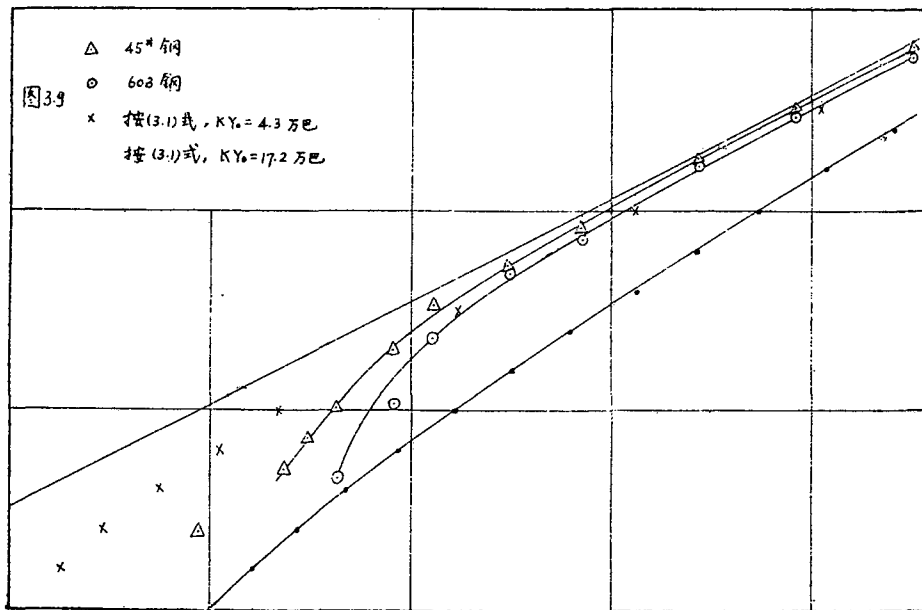
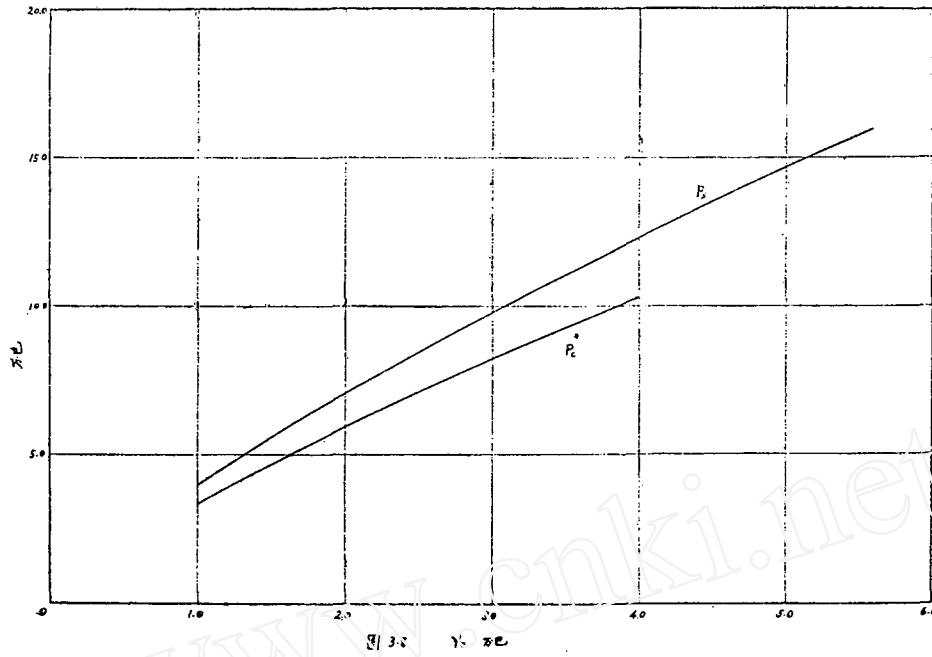


图3.9 两种靶板的 u_j-u 实验点

二、简化理论与平面射流准定常侵彻的计算结果

(一) 靶板材料模型

在弹塑性力学的范围内,在不考虑断裂和在常温、常压及通常的低应变率的条件下,

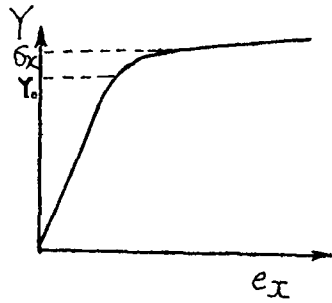


图 1.1

材料的力学性质是由它的应力应变关系来表示的。通常我们以它的简单拉伸应力应变关系为基础,然后应用强度理论,推导出复杂受力情况下的应力应变关系。对于金属材料,一般都采用 von Mises 屈服准则和 Prandtl-Reuss 流动准则(参看[1])。

图 1.1 表示材料简单拉伸的应力应变关系,横坐标为拉伸应变,纵坐标为简单拉伸的应力。拉伸应力可以分解为静水压*部分和应力偏量部分,如图 1.2 所示,正六面体各个面上的

应力偏量分别为 $\frac{2}{3}\sigma_x$, $-\frac{1}{3}\sigma_x$ 和 $-\frac{1}{3}\sigma_x$ 。由于静水压部分对金属等密实介质不产生塑性变形,所以我们定义应力强度为

$$\sigma_i = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\sigma_x\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma_x\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_x.$$

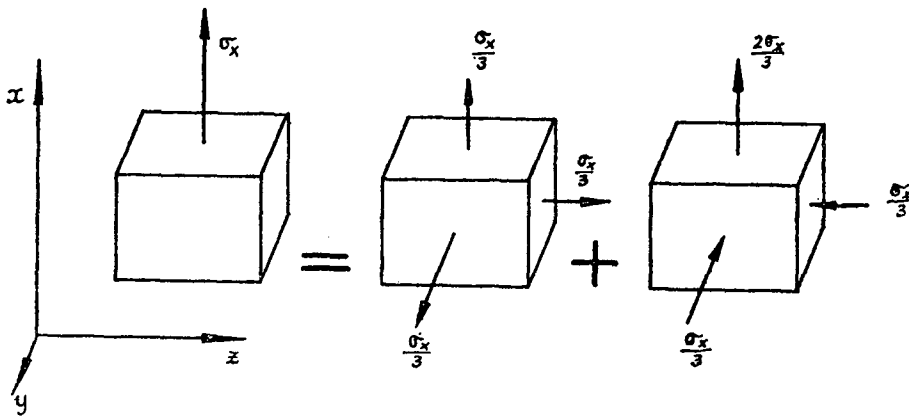


图 1.2

*图 1.2 中的 $\frac{1}{3}\sigma_x$ 是负的静水压。

在一般情况下静水压

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \text{ 详见文后.}$$

在材料各向同性的假定下,这个量决定着图1.2所示材料微元的畸变和塑性变形量。同样, 拉伸应变 e_x 中也包含体积应变 θ 。我们知道在简单拉伸条件下, 材料在垂直于拉伸的方向上有收缩, 相应的应变为 e_y 和 e_z 。那末体积应变 θ 就是:

$$\theta = e_x + e_y + e_z = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_x,$$

其中, E 是杨氏模数, ν 是泊松系数。我们定义偏量为:

$$\varepsilon_x = e_x - \frac{1}{3}\theta, \quad \varepsilon_y = e_y - \frac{1}{3}\theta, \quad \varepsilon_z = e_z - \frac{1}{3}\theta.$$

显然, $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$, 就是说应变偏量是不包含体积变形的那部分应变。在简单拉伸情况下, 我们定义应变强度为

$$\gamma_i = (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

这样, 我们就能把简单拉伸条件下的 $\sigma_x - e_x$ 关系转化为应力强度 σ_i 和应变强度 γ_i 之间的关系, 如图 1.3 所示。在复杂受力情况下, 应力分量有 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, 应变分量有 $e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ (参看图 1.4)。

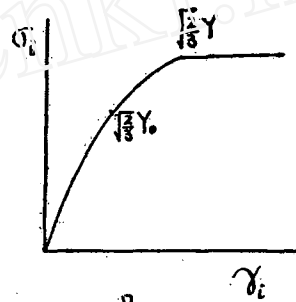


图 1.3

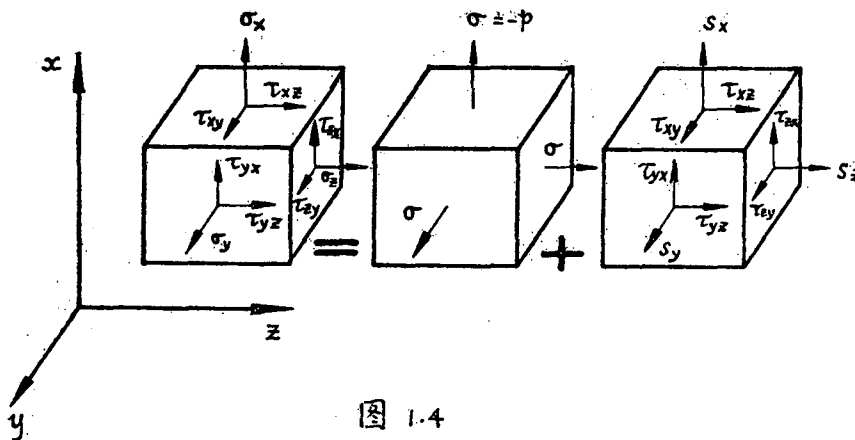


图 1.4

我们定义静水压 P 为

$$P = \frac{-(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3},$$

体积变形为

$$\theta = (e_x + e_y + e_z).$$

应力偏量为

$$s_x = \sigma_x + p, \quad s_y = \sigma_y + p, \quad s_z = \sigma_z + p, \quad s_{xy} = \tau_{xy}, \quad s_{yz} = \tau_{yz}, \quad s_{zx} = \tau_{zx}.$$

应变偏量为

$$\varepsilon_x = e_x - \frac{\theta}{3}, \quad \varepsilon_y = e_y - \frac{\theta}{3}, \quad \varepsilon_z = e_z - \frac{\theta}{3}, \quad \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \gamma_{zx}$$

进而定义应力强度 σ_i 和应变强度 γ_i 为

$$\sigma_i = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2s_{xy}^2 + 2s_{yz}^2 + 2s_{zx}^2},$$

$$\gamma_i = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{zx}^2}.$$

实验表明, 在复杂应力作用下, 如果应力分量按比例增加, 或者它们间的比例虽有变化, 但变化不大时, 那末所得到的 σ_i - γ_i 关系与简单拉伸条件下基本相符。这说明, σ_i - γ_i 关系反映材料畸变和塑性变形的本质。

所谓 von Mises 屈服条件是指材料开始发生塑性变形的条件。既然在简单拉伸条件下的屈服应力为 Y_0 , 那末在任意应力状态下的屈服条件就是

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2s_{xy}^2 + 2s_{yz}^2 + 2s_{zx}^2 = \frac{2}{3} Y_0^2. \quad (1.1)$$

Prandtl-Reuss 流动规则是指在发生屈服后继续进行塑性变形时, 应力偏量与塑性应变偏量增加率之间的一种关系。塑性应变偏量是指从应变偏量中减去弹性畸变那一部分后的应变偏量。在大塑性变形条件下, 塑性应变远大于弹性应变。这样, 塑性应变偏量就可以认为是等于总的应变分量。在这一条件下, Prandtl-Reuss 流动规则简化为

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y}{\gamma_i} \dot{\varepsilon}_x, & S_y &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y}{\gamma_i} \dot{\varepsilon}_y, & S_z &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y}{\gamma_i} \dot{\varepsilon}_z, \\ S_{xy} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y}{\gamma_i} \dot{\gamma}_{xy}, & S_{yz} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y}{\gamma_i} \dot{\gamma}_{yz}, & S_{zx} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y}{\gamma_i} \dot{\gamma}_{zx} \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $\dot{\varepsilon}_x, \dots, \dot{\gamma}_{xy}, \dots$ 为应变率, γ_i 的定义是

$$\gamma_i = \sqrt{\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + 2\dot{\gamma}_{xy}^2 + 2\dot{\gamma}_{yz}^2 + 2\dot{\gamma}_{zx}^2}.$$

Prandtl-Reuss 流动规则的作用, 是提供材料在屈服后进一步发生塑性变形时的应力、应变率关系。它可以处理非比例加载的复杂加载情况。如果材料具有冷作硬化的

性质, 那末上式中的 Y 应当是由材料变形的历史来确定的新的屈服应力, 如图 1.1 和 1.3 所示。在复杂加载条件下, 新的屈服应力 Y 可根据该时刻的应变强度 γ_i 确定, 即

$$\gamma_i = \int d\gamma_i,$$

这个积分反映直至该时刻塑性变形的累积量, 塑性变形的历史就包含在积分中。应当指出, 如果在变形过程中有卸载情况, 则由于卸载是弹性变形, 所以对应变强度的积累没有贡献。

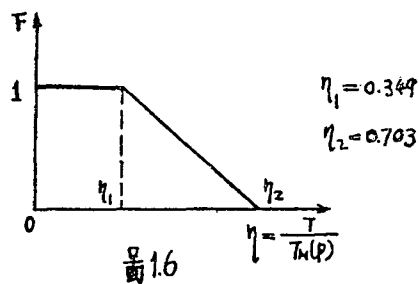
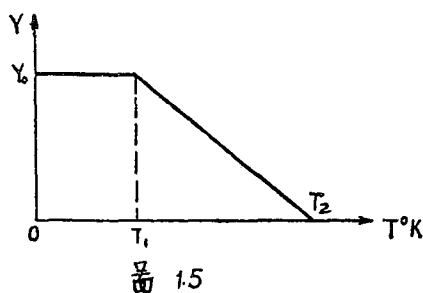
由于以上理论在应用时比较复杂, 所以在常温、常压、低应变率条件下, 常常取 $Y = Y_0 = \text{常数}$ 。这样的模型叫做理想塑性材料, 它的特点是不可压缩, 没有冷作硬化和具有各向同性。在实际问题中, Y_0 并不一定严格是材料拉伸(或压缩)的屈服极限, 而是根据材料应力应变试验关系的特点和具体问题中塑性变形的特征大小, 在屈服极限和强度极限之间取一个中间值。显然, 如果研究对象的变形量愈大, 而且屈服极限和强度极限之间应力应变关系又比较平坦, 那末这个作为计算屈服极限的 Y_0 就愈接近于强度极限 σ_0 。

603 钢的屈服极限约为 0.7 万巴, 强度极限为 1.0 万巴, 所以它的 Y_0 在 0.7 与 1.0 之间。

以下我们在理想塑性的基础上, 讨论高应变率, 高压和高温对 Y_0 的影响。由于这方面的试验工作有的正在进行, 有的尚未安排, 因此只能根据有限的试验和国外资料提出一个初步能用来估计高应变率、高压、高温对钢板抗侵彻能力影响的公式。

通常的材料拉伸试验中, 应变率约为 10^{-3} /秒; 在侵彻问题中, 应变率可达 10^5 /秒, 二者相差近八个数量级。因此应变率的影响是不可忽略的。这与在缩小比例大小的条件下, 几何模型律的成立是不矛盾的, 因为应变率的变化只有几倍。许多金属材料的试验资料表明, 只有当应变率有数量级的变化时, 它对屈服强度和应力应变关系的影响才明显地表明出来。高速材料试验还表明, 在高应变率条件下, 各种金属的屈服极限都有所提高, 但提高的程度各不相同, 低碳钢提高得最多, 可达二倍到三倍, 合金钢提高较少, 可达百分之十几到几十, 鉴于这方面的试验正在进行, 我们暂时把 Y_0 取为静态屈服点的某一个倍数。对 603 钢, Y_0 暂时取为 1.0 万巴。

681 机理组进行过几种钢板的高温拉伸试验。它们大多有这样的性质, 即从室温到约 300℃, 拉伸强度极限基本不变, 300℃ 以后到约 900℃ 强度不断降低, 在 900℃ 时基本上失去强度。因此我们把温度对强度的影响典型化为如图 1.5 所示的折线。一些实验



和理论表明, 温度影响实际上应当是 T/T_M 的影响, 其中 T 为材料的温度, T_M 是熔点,

它们的单位是绝对温度 $^{\circ}\text{K}$ 。 T_M 是静水压 P 的函数。 P 愈大,熔点就愈高。 T_M 与 P 的关系一般用Simon公式表示,

$$T_M(P) = T_{M0}(1 + \gamma P)^{\nu}$$

其中, T_{M0} 为常压下的熔点, γ, ν 是材料常数。在下面的计算中我们取

$$\gamma = \frac{1}{15} \text{ (1/万巴)}, \quad \nu = \frac{1}{4}, \quad T_{M0} = 1698^{\circ}\text{K}.$$

根据681机理组(52所)的材料高温拉伸实验(图1.5)和上述理论,我们可以把温度对强度的影响概括为

$$Y = Y_0 F(\eta), \quad \eta = \frac{T}{T_M(P)}.$$

当 $\eta \leq \frac{T_1}{T_{M0}} = \frac{320 + 273}{1698} = 0.349$ 时, $F=1$, 当 $0.349 \leq \eta < \frac{T_2}{T_{M0}} = \frac{920 + 273}{1698} = 0.703$

时, F 直线下降, $\eta \geq 0.703$ 时 $F=0$ (参看图1.6)。

最后讲一下高压影响。压力对熔点,并通过熔点对强度的影响上面已经做了交待。高压的另外两个作用是提高强度和塑性(延展性)。Towle等人的一些试验表明,单纯的压力影响可以表示为

$$Y = Y_0(1 + \alpha P),$$

对于一些纯金属, α 的数值约为0.02~0.05(1/万巴)。对于装甲钢板,我们目前尚无试验数据。在下面的计算中我们暂取 $\alpha=0.02, 0.05, 0.1$,以考查在提高强度问题上,压力对钢板抗侵彻能力是否有重要的影响。

归纳起来,我们采用的材料模型是理想刚塑性的(即忽略弹性变形),屈服极限取为

$$Y = Y_0(1 + \alpha P) F\left(\frac{T}{T_M(P)}\right), \quad (1.3)$$

$$T_M(P) = T_{M0}(1 + \gamma P)^{\nu}.$$

同时采用von Mises屈服条件(1.1)式和Prandtl-Reuss流动规则(1.2)式。(1.3)式中的 Y_0 应当是高应变率条件下的屈服应力,或动态的屈服应力与拉伸强度间的一个适当的中间值。

从上面的介绍可见,这个材料模型是经过很多简化的。有的简化,如忽略弹性畸变,在大变形区,显然是合理的。理想塑性材料(无冷作硬化)的假设对下面要进行的计算并不是非要不可的。做这样的假设主要是因为缺少动态应力应变的试验数据。至于关于高压和高温影响,我们只有部份国内数据,因此目前只得沿用国外一些不完整、不完全对口的数值和公式。这说明,在材料力学性能研究方面,特别是在高温、高压、高速材料试验方面,有许多工作需要我们去,才能更好地解决侵彻理论方面的材料模型问题。

尽管上面所介绍的材料模型比较粗糙,所依据的数据不一定都可靠,但在此基础上对侵彻过程进行理论计算还是有一定价值的。我们的目的有二:一是建立一个简化理论,二是通过分析各种因素对侵彻的影响,看看哪些因素是比较重要的,从而为今后开

展材料力学性能的研究和装甲板的研制提供参考。

由于我们的主要目的是研究侵彻过程，因此在材料的断裂问题上，没有做任何考虑，这是一个需要另外进行专门研究的问题。

(二) 准定常侵彻过程的简化理论及求解原则

基于上节所述材料模型的基本力学方程式，即质量守恒、运动方程、能量方程和流动规则，已在[1]中做了介绍，这里不再重复。

求解这组方程连同强度关系(1.3)式，除数值解法外是很困难的。为了得出有意义的结果，还必需引入新的假设作为简化侵彻理论的前提。

试验和理论分析都表明，在射流速度比较大的情况下，不可压缩流体理论是一个初级的近似。简化理论的基本思想是以不可压缩流体的解的速度场做为零次近似，然后进行强度影响的修正，从而得出一次近似解。具体做法如下：

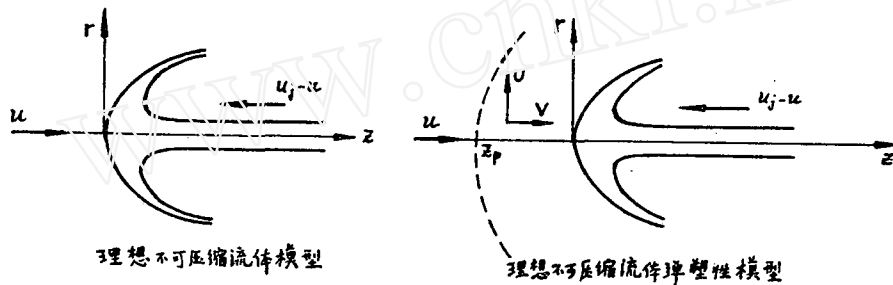


图 2.1

根据[1]，在中心流线附近，靶板相对于孔底的速度分量 U 和 V （参看图2.1）可以表示为：

$$\begin{aligned} V &= q(z) + h(z)r^2 + O(r^4), \\ U &= -\frac{1}{2}q'(z)r - \frac{1}{4}h'(z)r^3 + O(r^5), \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中， $q'(z)$ 、 $h'(z)$ 分别是 q 和 h 对 z 的导数。上面这两个表达式，已经满足质量守恒方程。应用(2.1)式可以得出中心流线附近的应力偏量以及它们的偏导数。于是沿中心流线的运动方程和能量方程可以分别写为：

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \rho_1 q^2 + p - s_z \right) = -\frac{(2/3)Y}{dq/dz} \left[-\frac{1}{2} q''(z) + 2h(z) \right], \quad (2.2)$$

$$\rho_1 C_v q dT = -Y dq. \quad (2.3)$$

其中， q_1 是由靶板密度，由于在中心流线上， $s_r = s_\theta = -\frac{s_z}{2}$ ， $s_{rz} = 0$ ，所以根据 von

Mises屈服条件, $s_z = -\frac{2}{3}Y$ 。因此, (2.2)式变为

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\rho_i q^2 + p + \frac{2}{3}Y\right) = -\frac{(2/3)Y}{dq/dz}\left[-\frac{1}{2}q''(z) + 2h(z)\right]. \quad (2.4)$$

现在着重分析一下(2.4)式。如果 $Y=0$, 则(2.4)式就是普通的不可压缩理想流体的伯努利方程:

$$\frac{1}{2}\rho_i q^2 + p = \frac{1}{2}\rho_i q u^2.$$

在孔底 $q=0$, 所以孔底的压力 p^* 为

$$p^* = \frac{1}{2}\rho_i u^2.$$

从射流方面看

$$p^* = \frac{1}{2}\rho_i (u_i - u)^2, \quad (2.5)$$

其中, ρ_i 是射流的密度。由以上两式得到把靶板当做不可压缩理想流体的 u_i-u 关系

$$u = \frac{u_i}{1 + \sqrt{\rho/\rho_i}}. \quad (2.6)$$

当 Y 不等于零, 但足够小时(严格说, 当 $\frac{Y}{(1/2)\rho_i u^2}$ 足够小时), 孔底附近的流动情况

应当是近似于不可压缩理想流体。因此, (2.4)式右端与 $\frac{2}{3}Y$ 相乘的那个函数可以根据不可压缩理想流体的理论求出。在不可压缩理想流体理论中, U 、 V 满足无旋条件,

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

因而 $2h = -\frac{1}{2}q''(z)$ 。

于是, (2.4)式的右端就变为

$$\frac{2}{3}Y \frac{d^2 q/dz^2}{dq/dz} = -\frac{2}{3}Y \frac{d^2 z/dq^2}{(dz/dq)^2}.$$

(2.4)式成为

$$d\left(\frac{1}{2}\rho_i q^2 + p + \frac{2}{3}Y\right) = -\frac{2}{3}Y \frac{d^2 z/dq^2}{dz/dq} dq. \quad (2.7)$$

(2.7)式中的 $\frac{d^2 z}{dq^2} / \frac{dz}{dq}$ 可以从不可压缩流体理论解得, 因此可以认为, z 是 q 的已知函数。根据(1.3)式, Y 是 p 和 T 的已知函数, 所以(2.3)式和(2.7)式是 p 和 T 的一阶联立常微分方程组, 自变数是 q 。

解这组方程还需要一定的边界条件。为此还必需确定在靶板有强度的条件下，弹塑性区的分界点(图2.1中的 z_p)。上述做为零次近似的不可压缩理想流体解只有在孔底O和 z_p 之间才能应用。 z_p 的确定仍然是个困难的问题，在这里我们用弹性理论和屈服条件来定 z_p 。[1]中已经指出，如果射流作用于孔底的合力为F，则根据动量平衡的原理有

$Z_p \propto \left(\frac{F}{Y_0}\right)^{1/2}$ 。我们用弹性理论来具体确定这个关系。这里只列出结果，详细

推导见附录A。

当侵彻速度 u 小于靶板材料的横波波速 c_s 时，即 $M_s = u/c_s < 1$ 时

$$\begin{aligned} Z_p^2 &= \frac{F}{4\pi} \frac{5-4\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{Y_0}, \\ \sigma_p &= \frac{2(2-\nu)}{5-4\nu} Y_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

当 u 大于 c_s ，但小于靶板材料的纵波波速 c 时，即 $M_s > 1$ ， $M = u/c_s$ ， $c < 1$ 时

$$\begin{aligned} Z_p^2 &= \frac{F}{4\pi} \frac{3-M^2}{M_s^2} \frac{1}{Y_0}, \\ \sigma_p &= \frac{M_s^2}{3-M^2} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} + \frac{2}{M_s^2} \right\} Y_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

要注意，这里的 σ_p 表示弹塑性区分界面上的压应力，即以压为正，下面的 σ 均是这样。

横波与纵波波速的表达式分别为

$$c_s^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho_t}, \quad c^2 = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)\rho_t}, \quad (2.10)$$

其中，E是杨氏模数， ν 是泊松系数。

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu}.$$

当 $\nu = \frac{1}{3}$ 时， $c_s^2 = \frac{1}{4}c^2$ ，横波波速恰为纵波波速的一半， $M = \frac{1}{2}M_s$ 。对钢而言，

$C = 6.2$ 千米/秒。

式中，F是射流作用于孔底的合力。由于假设了射流是无强度、无粘性的不可压缩流体，从射流的质量守恒和动量守恒条件可知

$$F = 2\pi a^2 (u_j - u)^2 \rho_j, \quad (2.11)$$

其中， ρ_j 是射流的密度， a 是射流的半径。

根据弹性力学的解，在 z_p 处，质点速度与 u 极相近，但不可压缩流体解在同一位置所给出的速度 q_p 一般却明显地小于 u 。因此，这两个解在 z_p 处是间断的。从物理上说，从弹性区过渡到流体区有一段距离。在简化模型中，这个距离被视为极小，因而出现间断。

为了处理这个间断, 在过度区是很小的假设下, 我们根据动量守恒条件要求, 在 $q=q_p$ 时

$$\frac{1}{2}\rho_i u^2 + \sigma_p = \frac{1}{2}\rho_i q^2 + \frac{2}{3}Y + p \quad (2.12)$$

这是 p 、 T 需要满足的第一个边界条件。在 $q=q_p$ 时, 靶板的变形量很小, 不会有明显的温升, 因此又要求

$$T = T_0 (^{\circ}\text{K}), \text{ 当 } q=q_p, \quad (2.13)$$

T_0 是靶板的初始温度。最后我们要求在孔底, 即 $q=0$ 时, 有

$$p + \frac{2}{3}Y = \frac{1}{2}\rho_j (u_j - u)^2 \quad (2.14)$$

(2.12)、(2.13)、(2.14) 式就是解常微分方程组 (2.3)、(2.7) 所需要的三个边界条件 ($0 \leq q \leq q_p$)。 $z(q)$ 是根据不可压缩理想流体理论求得的, 在解方程组 (2.3)、(2.7) 之前必须先已求出。

求解时, 我们先选定 q_p , 并根据 q_p 由 $z(q)$ 确定 $z_p = z(q_p)$ 。然后根据 (2.8) 或 (2.9) 及 (2.11) 式, 算出 $\rho_j (u_j - u)^2 / 2$ 。因为 Y 是 T 和 p 的已知函数 (公式 1.3), 所以方程组 (2.3) (2.7) 是包含两个未知函数 T 、 p 和一个特定常数 u 的一阶联立方程组, 恰好能用三个边界条件 (2.12)、(2.13)、(2.14) 式定解。解得的将是 $u_j - u$ 关系和 T 、 p (及 Y) 沿中心流线的分布。

由于轴对称情况下的 $z(q)$ 关系尚未完全求得, 目前还不能给出计算结果。下一节将只限于给出平面射流侵彻靶板的结果。

(三) 平面射流侵彻靶板的简化理论解和计算结果

我们讨论平面射流的侵彻固然是由于 $x(q)$ 的解比较容易求得*, 也由于从研究靶板材料的力学性质对于抗侵彻能力的影响角度看, 所得结果有一定参考价值。

在与轴对称问题同样的假设下, 相应于 (2.7) 式的中心流线上的运动方程是

$$d\left(\frac{1}{2}\rho_i q^2 + p + \frac{Y}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{Y}{\sqrt{3}} \frac{d^2 x/dq^2}{dx/dq} dq.$$

相应于 (2.3) 式的能量方程是

$$\rho_i C_v q dT = -\frac{2}{\sqrt{3}} Y dq.$$

根据附录 B 中的 (B.8) 式, 速度分布是

$$\frac{x\pi}{2H_2} = 2 - \frac{1}{1-q} - \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{2} \operatorname{en} \frac{1+q}{1-q}, \quad (3.1)$$

* 在平面问题中, 中心流线是 X 轴, 见附录 B 中的图。

其中 $\bar{q} = \frac{q}{u}$, $0 \leq \bar{q} \leq 1$,

因此, 中心流线上的运动方程和能量方程最后表示为

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}\rho_i u^2 \bar{q}^2 + p + \frac{Y}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{Y}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{1-\bar{q}} - \frac{1}{1+\bar{q}}\right)d\bar{q} , \\ \rho_i C_v \bar{q} dT &= -\frac{2}{\sqrt{3}}Y d\bar{q} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

我们将 $Y(T, p)$ 表示为

$$Y = Y_0(1+2p)F(\eta)$$

$$\eta = \frac{T}{T_{M0}(1+\gamma p)^\nu}$$

$$\begin{aligned} F(\eta) &= 1, & \eta \leq \eta_1, \\ &= \frac{\eta_2 - \eta}{\eta_2 - \eta_1}, & \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, \\ &= 0, & \eta \geq \eta_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

我们在积分(3.2)式时以 \bar{q} 为自变数, 积分域是

$$0 \leq \bar{q} \leq \bar{q}_p .$$

\bar{q}_p 与 X_p 的关系由(3.1)式给出, 即

$$\frac{X_p \pi}{2H_2} = 2 - \frac{1}{1-\bar{q}_p} - \frac{1}{(1-\bar{q}_p)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\bar{q}_p}{1-\bar{q}_p} \quad (3.4)$$

在平面射流侵彻的问题中, 射流作用于孔底的合力 F 为

$$F = 2H_2 \rho_j (u_j - u)^2 . \quad (3.5)$$

所以, 根据附录(C.9)的第一式, 我们有

$$-\frac{X_p \pi}{2H_2} = 1.44 \frac{\rho (u_j - u)^2 / 2}{Y_0} . \quad (3.6)$$

因此, 给定 \bar{q}_p 相当于给定 $\frac{1}{2}\rho_j (u_j - u)^2$.

边界条件是:

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}_p, & T &= T_0, \\ \frac{1}{2}\rho_i u^2 \bar{q}_p^2 + p + \frac{Y}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{2}\rho u^2 + \sigma, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_i u^2 + 1.4Y_0 ,$$

$$q = 0, \quad p + \frac{Y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\rho_j (u_j - u)^2$$

上述方程式的积分, 在一般情况下, 需要用数值计算方法, 在特殊情况下, 能求得

分析解。以下先讨论两种特殊情况，再讨论一般情况。

1. $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ 的情况

这个情况相当于熔点不受压力影响，强度不受压力影响，但是温度对强度有影响。这种情况下，

$$\eta = \frac{T}{T_{M0}}, \quad \eta_0 = T_0/T_{M0}, \quad \eta_1 = \frac{T_1}{T_{M0}}, \quad \eta_2 = \frac{T_2}{T_{M0}}.$$

由于假设了强度只受温度影响，所以可以首先积分能量方程，求出 T (或 η)与 \bar{q} 的关系。在 $T_0 \leq T \leq T_1$ 时， $Y = Y_0$ ，积分能量方程，并应用初始条件， $\bar{q} = \bar{q}_p$ ， $T = T_0$ ，我们得到

$$\rho_s C_v (T - T_0) = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \ln \frac{\bar{q}_p}{\bar{q}}. \quad (3.8)$$

这个结果适用于 $T_0 \leq T \leq T_1$ ，或者 $\bar{q}_1 \leq \bar{q} \leq \bar{q}_p$ ， \bar{q}_1 为

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_p e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\rho_s C_v T_{M0}}{Y_0} (\eta_1 - \eta_0)}. \quad (3.9)$$

当 $\bar{q} \leq \bar{q}_1$ 时，

$$F = \frac{T_1 - T}{T_2 - T_1} = \frac{\eta_2 - \eta}{\eta_2 - \eta_1},$$

所以，能量方程的积分是

$$T_2 - T = (T_2 - T_1) \left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}_1} \right)^{\frac{2 Y_0}{\sqrt{3} \rho_s C_v T_{M0} (\eta_2 - \eta_1)}}, \quad (3.10)$$

或者

$$F = \left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}_1} \right)^{\frac{2 Y_0}{\sqrt{3} \rho_s C_v T_{M0} (\eta_2 - \eta_1)}}. \quad (3.11)$$

当 $\bar{q} = 0$ 时，显然有 $T = T_2$ 。这就是说，如果强度不受压力影响，孔底的温度，不论侵彻速度是大是小，均等于 T_2 ，即靶板材料失去强度时的温度。反过来说，弹坑分析对孔底或孔壁温度的判断能说明压力对强度是否有影响及影响的程度如何。几种钢材的高温试验表明， $T_2 \sim 1172^\circ \text{K}$ ，弹坑分析提供的温度比这高，而且壁温随侵彻速度的增加而有所增加，这说明，压力通过 α 或 γ (熔点)对强度的影响是存在的。

应用以上结果，对(3.2)式中的运动方程从 $\bar{q} = \bar{q}_p$ 到 $\bar{q} = 0$ ，进行积分，并利用其余的两个边界条件，我们得到下面的 $u_j - u$ 关系：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_s u^2 = & \frac{1}{2} \rho_s (u_j - u)^2 - \sigma_p - \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[3 \ln \frac{1}{1 - \bar{q}_p} - \ln(1 + \bar{q}_p) \right] + \\ & + \frac{Y_0}{3} \int_0^{\bar{q}_1} \left[1 - \left(\frac{\bar{q}}{\bar{q}_1} \right)^{\delta} \right] \left(\frac{\bar{q}}{1 - \bar{q}} - \frac{1}{1 + \bar{q}} \right) d\bar{q}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中

$$\delta = \frac{2Y_0}{\sqrt{3} \rho_t C_v T_{M0}} \cdot \frac{1}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (3.13)$$

给定 \bar{q}_p , 我们从(3.4)和(3.6)式计算出 $\rho_j(u_j - u)^2/2$, 再从(3.12)式算出 $u(\bar{q}_p)$, 最后得出 $u_j(\bar{q}_p)$. 这样就得到了以 \bar{q}_p 为参数的 $u_j - u$ 关系.

温度对 $u_j - u$ 关系的影响, 包含在(3.12)式右端的积分中. 如果 Y 不因温度的升高而降低, 则 $\eta_1 \rightarrow \infty$, $\bar{q}_1 \rightarrow 0$, 因而那个积分等于零. 于是(3.12)式变为

$$\frac{1}{2} \rho_t u^2 = \frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 - \sigma_p - \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[3 \ln \frac{1}{1 - \bar{q}_p} - \ln(1 + \bar{q}_p) \right] \quad (3.14)$$

在图3.1中我们根据(3.14)式给出了 $\rho_j = 8.6$ 克/厘米³、 $\rho_t = 7.8$ 克/厘米³、 $Y_0 = 1.0$ 万巴时的 $u_j(\bar{q}_p)$ 和 $u(\bar{q}_p)$. 在图3.5中给出了 $Y = Y_0 = 1.0$ 和 2.0 时的 $u_j - u$ 关系.

根据(3.12)式所确定的 u , 把运动方程从 $\bar{q} = \bar{q}_p$ 积分到 $\bar{q} (< \bar{q}_p)$, 就能算出 $T(\bar{q})$ 、 $p(\bar{q})$ 、 $Y(\bar{q})$, 后者又可 根据(3.1)式换算为 $T(x)$ 、 $P(x)$ 、 $Y(x)$, 即温度、压力和强度在中心流线上的分布. 在图3.2、3.3、3.4中给出了 $\eta_1 = 0.349$ 、 $\eta_2 = 0.703$ ($T_{M0} = 1698^\circ \text{K}$) 时, $\rho_t = 7.8$ 克/厘米³、 $C_v = 5.02 \times 10^6$ 尔格/克 $^\circ \text{K}$ 、 $\rho_j = 8.9$ 克/厘米³ 几种典型射流速度下, $T(x)$ 和 $Y(x)$ 的分布情况.

在同一 \bar{q}_p 条件下, 我们以 u_0 表示由(3.14)式所算得的 u , 以 $u_0 + \delta u$ 表示用(3.12)式算得 u . 在图3.1中我们给出了 $\frac{\delta u}{u_0}$ 与 \bar{q}_p 的关系 ($Y_0 = 1.0$ 万巴).

从计算结果可见, 在中心流线上, T 、 Y 只是在距离孔底约一个射流厚度的范围内才有显著变化. $\frac{\delta u}{u_0}$ 是正的, 而且比较小, 同时侵彻速度愈大, $\frac{\delta u}{u_0}$ 愈小. 因而温度对 $u_j - u$ 关系的影响是不大的, 对总穿深的影响也必然不大.

2. $F = 1$ 的情况

这个情况忽略压力通过熔点对强度的影响, 但仍顾及压力对强度的影响, 即

$$Y = Y_0(1 + \alpha p) \quad (3.15)$$

由于 Y 仅仅是 p 的函数, 所以可以对(3.2)式中的运动方程单独进行积分. 将(3.15)式代入运动方程, 得出

$$\frac{dp}{d\bar{q}} + p \cdot \frac{A}{1+A} \left(\frac{3}{1-\bar{q}} - \frac{1}{1+\bar{q}} \right) = -\frac{\rho_t u^2 \bar{q}}{1+A} - \frac{A}{\alpha(1+A)} \left(\frac{3}{1-\bar{q}} - \frac{1}{1+\bar{q}} \right) \quad (3.16)$$

其中

$$A = \frac{\alpha Y_0}{\sqrt{3}} \quad (3.17)$$

由(3.7)和(3.15)式得出 P 所需满足的两个边界条件:

$$\begin{aligned} \bar{q} = \bar{q}_p, \quad (1+A)p &= \frac{1}{2} \rho_t (1 - \bar{q}_p^2) u^2 - \frac{Y_0}{\sqrt{3}} + \sigma_p, \\ \bar{q} = 0 \quad (1+A)p &= \frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 - \frac{Y_0}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

为了确定(3.16)式中的未知常数 u^2 , 和上一节一样, 我们对(3.16)式由 $\bar{q} = \bar{q}_p$ 到 $\bar{q} = 0$ 进行积分, 从而得到

$$\frac{1}{2} \rho_j u^2 = \frac{\frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 - \sigma_p e^{\mu_0} + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{\mu_0})}{e^{\mu_0} \left[(1 - \bar{q}_p^2) + 2 \int_{\bar{q}_p}^{\bar{q}} \bar{q} e^{\mu} d\bar{q} \right]}. \quad (3.19)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu(\bar{q}) &= \frac{A}{1+A} \left(3 \ln \frac{1}{1-\bar{q}} - \ln(1+\bar{q}) - 3 \ln \frac{1}{1-\bar{q}_p} + \ln(1+\bar{q}_p) \right), \\ \mu_0 = \mu(\bar{q}_p) &= \frac{A}{1+A} \left(3 \ln \frac{1}{1-\bar{q}_p} - \ln(1+\bar{q}_p) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

确定 $u(\bar{q})$ 之后, 就能进一步计算温度、压力、 Y 在中心流线上的分布。从(3.16)式可得,

$$p = e^{\mu(\bar{q})} \left\{ \frac{1}{1+A} \left[\frac{1}{2} \rho_j (1 - \bar{q}_p^2) u^2 - \frac{Y_0}{\sqrt{3}} + \sigma_p \right] - \frac{\rho_j u^2}{1+A} \int_{\bar{q}_p}^{\bar{q}} \bar{q} e^{\mu(\bar{q})} d\bar{q} - \frac{1}{\alpha} (e^{\mu(\bar{q})} - 1) \right\}.$$

由能量方程不能得出分析解, 因而采用数值积分法求温度分布。

对于 $F=1$ 的情况, 我们进行了较多的计算, 共有下列几个方面。

- (1) $\rho_j = 8.6$ 克/厘米³, $C_v = 5.02 \times 10^6$ 尔格/克·度, $\rho_t = 7.8$ 克/厘米³, $Y_0 = 1.0$ 万巴, $\alpha = 0, 0.02, 0.05, 0.10$ (1/万巴) 时, 不同侵彻速度条件下的强度、温度和压力在中心流线上的分布、 $u_j - u$ 关系; 射流头部速度为 $u_{j0} = 7.6$ 千米/秒, 尾部速度为 $u_{jL} = 1.80$ 千米/秒, 速度分布为线性时的 $p-t$ 曲线和总穿深。
- (2) $\rho_j = 8.6$ 克/厘米³, $\rho_t = 7.8$ 克/厘米³, $Y_0 = 1.0, 1.5, 2.0$ (万巴), $\alpha = 0$, 射流条件与(1)相同时的 $p-t$ 曲线和总穿深。
- (3) $\rho_j = 8.6$ 克/厘米³, $\rho_t = 2.7$ 克/厘米³ (靶板为铝合金), $Y_0 = 0.3, 0.4, 0.5, 1.0$ 万巴, $\alpha = 0$, 射流条件与(1)相同时的 $p-t$ 曲线和总穿深。

典型的强度、温度分布见图3.2、3.3和3.4。孔底温度与侵彻速度和 α 的关系见图3.6, α 值对侵彻速度的影响见图3.1, 其中 u_0 为 $\alpha = 0$ 时的侵彻速度, $u_0 + \delta u$ 为 $\alpha \neq 0$ 时的侵彻速度。图3.5给出了钢靶板 $Y_0 = 1$ 万巴, $\alpha = 0.1$ (1/万巴) 的 $u_j - u$ 关系。表3.1中列出了

不同条件下的最大穿深和到达最大穿深的时间, 其中 $\tau_H = -\frac{dx_0}{du_j}$ 为射流头部着靶时刻的速度梯度, L 为这时的射流长度。根据射流微元速度是线性分布的假设, L 与 τ_H 的

关系为

$$\tau_H = \frac{L}{u_{j0} - u_{jL}} \cdot$$

相应于新40弹, u_{j0} 、 u_{jL} 已如前述, $L \approx 140$ 毫米, $\tau_H \approx 24.2 \mu s$,

表 3.1

ρ_t	Y_0 , 万巴	α , 1/万巴	$\frac{t}{\tau_H}$	$\frac{p}{L}$	$-\Delta P/P, \%$
7.8	1.0	0	14.41	3.482	0
"	"	0.02	14.10	3.377	3.01
"	"	0.05	13.63	3.225	7.38
"	"	0.10	12.86	2.994	14.05
7.8	1.0	0	14.41	3.482	0
"	1.5	0	13.33	3.155	9.68
"	2.0	0	12.53	2.885	17.17
2.7	0.5	0	42.74	12.26	
"	0.4	0	40.45	11.56	
"	0.5	0	38.51	10.96	
"	1.0	0	31.45	8.767	

为了专门分析 α 对 u_j-u 关系和总穿深的影响, 我们对(3.19)式作进一步分析。在通常情况下, A 是个小量。因而可以以 A 为小参数, 把(3.19)式按 A 的幂级数展开。在保留一阶小量的条件下(3.19)式变为

$$\frac{1}{2} \rho_t u^2 = \frac{1}{2} \rho_t u_0^2 \left\{ 1 - 2A \left[\bar{q}_p + \bar{q}_p^2 + \Phi(\bar{q}_p) \frac{Y_0}{\rho_t u_0^2 / 2} \cdot \left(\frac{\sigma_p}{Y_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \Phi(\bar{q}_p) \right) \right] \right\} \quad (3.21)$$

其中, u_0 为 $\alpha=0$ 时的侵彻速度 $u_0(\bar{q}_p)$, 由(3.14)式的右端给出, 即

$$\frac{1}{2} \rho_t u_0^2 = \frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 - \sigma_p - \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \Phi(\bar{q}_p), \quad (3.22)$$

$$\Phi(\bar{q}_p) = 3 \ln \frac{1}{1 - \bar{q}_p} - \ln(1 + \bar{q}_p) \quad (3.23)$$

如令 $u = u_0 + \delta u$, 在同级近似下, 我们有

$$\frac{\delta u}{u_0} = -A \left[\bar{q}_p + \bar{q}_p^2 + \Phi(\bar{q}_p) \frac{Y_0}{\rho_t u_0^2 / 2} \left(\frac{\sigma_p}{Y_0} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \Phi(\bar{q}_p) \right) \right] \quad (3.24)$$

在 \bar{q}_p 不变的条件下, $\frac{1}{2} \rho_i (u_j - u)^2$ 亦不变。因此又有

$$\delta u_j = \delta u \quad (3.25)$$

这样就能计算穿深 p 与 α 的关系。根据本文的第一部分在 u_{jL} 大于靶板极限侵彻速度时, 总穿深 p 由下式给出

$$p = \tau_H u_{j0} \left(\frac{u_{jL}}{u_{j0}} e^{\int_{u_{jL}}^{u_{j0}} \frac{du_j}{u_j - u}} - 1 \right) \quad (3.26)$$

在保持射流参数 τ_H 、 u_{j0} 、 u_{jL} 不变的条件下, 如 u_j 和 u 做(3.25)和(3.24)式所规定的变化, 那末 p 就由 p_0 变为 $p_0 + \delta p$ 。这里 p_0 是指 $\alpha = 0$, 即 $Y = Y_0$ 时的总穿深。我们得出

$$\begin{aligned} \frac{\delta p}{p_0} &= \left(1 + \frac{\tau_H u_{j0}}{p_0} \right) \delta I \\ &= \left(1 + \frac{u_{j0}}{u_{j0} - u_{jL}} \frac{L}{p_0} \right) \delta I \end{aligned} \quad (3.27)$$

其中

$$\delta I = \int_{(L)}^{(O)} \delta u \frac{d}{d\bar{q}_p} \frac{1}{u_j - u} d\bar{q}_p \quad (3.28)$$

式中的积分限指 $\alpha = 0$ 时, 与射流头部(O)和尾部(L)相应的 \bar{q}_p 值, 当然积分号下的 $\frac{d}{d\bar{q}_p} \frac{1}{u_j - u}$ 也是在 $\alpha = 0$ 的情况下的值。

把(3.24)式所给出的 δu 代入(3.28)式就能计算 δI 。在这里我们举一个计算结果, 计算时由于考虑到 $Y_0 / \frac{1}{2} \rho_i u_0^2$ 比较小, 因而忽略了(3.24)式中包含 $Y_0 / \frac{1}{2} \rho_i u_0^2$ 那些项。

射流参数同前, 在 $\rho_i = 7.8$ 克/厘米³, $Y_0 = 1$ 万巴条件下得出

$$\delta I = -1.00\alpha,$$

α 单位为1/万巴。表3.1给出 $\frac{p_0}{L} = 3.482$, 所以

$$\frac{\delta p}{p_0} = -1.39\alpha \quad (3.29)$$

如 $\alpha = 0.02$ 、 0.05 、 0.10 (1/万巴), 则总穿深比 $\alpha = 0$ 时的 p_0 分别减少2.78%、6.95%和13.9%。这与表3.1所列出的计算结果基本一致, 差别是由忽略(3.24)式中含有 $Y_0 / \frac{1}{2} \rho_i u_0^2$ 各项所造成的。

3. 一般情况

按照(3.3)式所规定的那样,需要全面考查压力和温度的影响时,方程组(3.2)的积分就要用数值方法,我们采用的是一阶差分法。由于(3.2)式中含有一个待定常数 u^2 ,所以必须先确定 u^2 ,然后才能得出 P 、 T 、 Y 沿中心流线的分布。我们采用叠代法逐次逼近地来求 u^2 ,其步骤是先假设一个 u ,叫做 u^0 ,然后根据 $\bar{q}=\bar{q}_p$ 处的两个边界条件,用差分法积分(3.2)式得出 Y 做为 \bar{q} 的函数, $Y^{(0)}(\bar{q})$, $0\leq\bar{q}\leq\bar{q}_p$ 。由于 $u^{(0)}$ 的选取带有任意性,所以在 $\bar{q}=0$ 处的边界条件

$$P + \frac{Y}{\sqrt{\frac{3}{3}}} = \frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2$$

一般不能满足。这个边界条件,从(3.2)的第一式可知,和下述关系是等价的,

$$\frac{1}{2} \rho_i u^2 = \frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 - \sigma_p + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{3}}} \int_{\bar{q}_p}^0 Y \left(\frac{3}{1-\bar{q}} - \frac{1}{1+\bar{q}} \right) d\bar{q} \quad (3.29)$$

把求得的 $Y^{(0)}(\bar{q})$ 代入(3.29)式的右端,得到 u 的另一个数值,叫做 $u^{(1)}$,然后重复上述步骤,求与 $u^{(1)}$ 相应的 $Y^{(1)}(\bar{q})$,再由(3.29)式求出 $u^{(2)}$,如此循环渐进,直到 $u^{(n)}$ 和 $u^{(n-1)}$ 的差别可以忽略不计时为止, $u^{(n)}$ 就是 u 所应取的值。在实际计算中,我们选 $F=1$ 时的 u 为 $u^{(0)}$,发现只需少数几次叠代,就能得出足够精确的 u 。这说明,在我们所选用的各种参数条件下, $F=1$ 时的 $u(\bar{q}_p)$ 与考虑 F 受温度、压力影响时的 u 相差不多。

我们着重对 $Y_0=1.0$ 万巴, $\alpha=0.02$ (1/万巴)时的 u_j-u 关系进行了计算。选用的其它参数和第二节所列的一样是: $\rho_i=7.8$ 克/厘米³, $C_v=5.02 \times 10^6$ 尔格/克·度, $\rho_j=8.9$ 克/厘米³, $T_{M0}=1698$ 度(绝对温度), $\eta_1=0.349$, $\eta_2=0.703$, $\gamma=(1/15)$ 1/万巴, $\nu=1/4$ 。温度、压力对 u_j-u 关系的影响见图3.1, $Y(x)$ 、 $T(x)$ 的分布见图3.2、图3.3、图3.4。

现在从几个方面综合分析和讨论以上结果。

(1) 关于简化理论

从表3.1的第二栏我们看到,在平面射流侵彻问题中,当 Y_0 由1.0万巴提高到1.5和2.0万巴时,总穿深分别减少9.68%和17.17%。在不同强度装甲钢抗新40弹侵彻的试验中, σ_b 由603钢的1.0万巴提高到1.4、1.7、1.8万巴时,总穿深的减少要比由平面射流侵彻计算所得的明显得多。例如,603钢的总穿深平均为400毫米, $\sigma_b=1.8$ 的钢板平均穿深为265毫米,比前者小33.8%。

新40弹的 $L=140$ 毫米(炸高164毫米)。平面射流侵彻的 $P/L=3.48$ ($Y_0=1.0$),所以 $P=487$ 毫米,这也比400毫米大得多。

我们认为以上差别主要是因为平面问题和实际的轴对称问题本身的差别所造成的,而不是简化理论所依据的基本原则所造成的。因为在轴对称问题中靶板强度所提供的抗侵彻能力要比平面问题更为明显,而靶板惯性所提供的抗侵彻能力在两个问题中是一样的。这一点也反映在表3.1铝靶板的计算结果中:随着靶板密度的降低,总穿深有很大的变化。实际打靶结果表明,变化没有这样大,这主要是由于射流断裂,但平面与轴对称问题本身的差别也是个原因。

另外,这里提出的简化计算方法,严格说是高射流速度下的极限情况,计算总穿深时把它应用于低的射流速度,误差可能较大。尽管有这个矛盾,我们把这里的 u_j-u 关系推广应用到 $u=0$ 、 $u_j=u_j^*$,即极限侵彻速度的条件下,以考查可能会有多大误差。

在(3.14)式中将 u 置为零,得到

$$\frac{1}{2} \rho_j u_j^{*2} = \sigma_p + \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[3 \ln \frac{1}{1-\bar{q}_p} - \ln(1+\bar{q}_p) \right]. \quad (3.30)$$

根据(3.4)和(3.6)式,我们又有

$$\frac{1}{2} \rho_j u_j^{*2} = \frac{Y_0}{1.44} \left[\frac{1}{(1-\bar{q}_p)^2} + \frac{1}{1-\bar{q}_p} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\bar{q}_p}{1-\bar{q}_p} - 2 \right]. \quad (3.31)$$

$\sigma_p = 1.4Y_0$ 。由以上二式解得,在极限侵彻速度条件下,

$$\bar{q}_p \approx 0.415. \quad (3.32)$$

从物理上讲 \bar{q}_p 应等于零。在这里, $\bar{q}_p \neq 0$ 是因为所用的公式是从高速端的近似延伸过来的。由(3.32)式得出极限射流速度为

$$u_j^* = \sqrt{\frac{4.26 Y_0}{\rho_j}} \quad (3.33)$$

其中, Y_0 的单位为万巴, ρ_j 的单位为克/厘米³, u^* 的单位为千米/秒或毫米/微秒。若取 $\rho_j = 8.6$ 克/厘米³, $Y_0 = 1.0$ 和 2.0 万巴,则 u_j^* 分别为 0.704 和 0.995 千米/秒。

在轴对称侵彻问题中,国外有时用扩张球形孔所需的压力来计算 u_j^* (参看本报告的第一部分)。在平面问题中,根据同一原则,可以用扩张元柱孔所需的压力计算 u_j^* 。这个压力,在理想塑性假设下为

$$P_c^* = \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \left[1 + \ln \frac{\sqrt{3} E}{2(1+\nu) Y_0} \right], \quad (3.34)$$

所以极限射流速度为

$$u_j^* = \sqrt{\frac{2P_c^*}{\rho_j}}. \quad (3.35)$$

若取 $E = 2.0 \times 10^6$ 公斤/厘米², $\rho_j = 8.6$, $\nu = 1/3$, $Y_0 = 1.0$ 和 2.0 万巴,得出的 u_j^* 为 0.883 和 1.170 千米/秒。这些数值比(3.33)式所给出的要大。

虽然(3.35)式这种计算极限侵彻速度的方法也只是一种估算,但我们可以理解,为什么(3.33)式给出的 u_j^* 会偏小。这是因为在计算弹、塑性分界点 x_p 时,我们用的完全是弹性理论,它过高地估计了应该是塑性区的那部分材料的变形阻力,因而弹性理论给出的 $-x_p$ 的数值偏小。我们只要适当地增加(3.6)或(3.31)式中的系数 1.44 ,就能使 u_j^* 的计算结果与(3.35)式相近或符合。

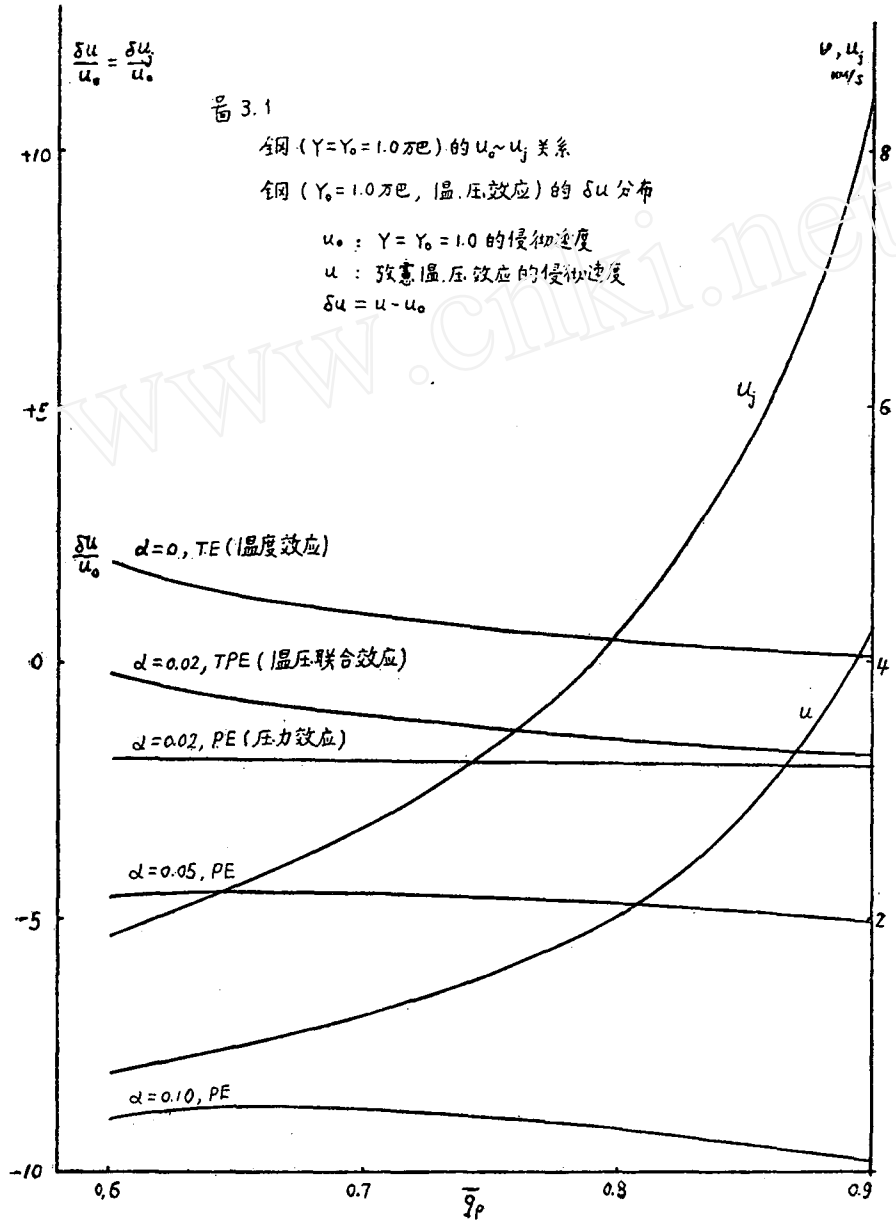
指出这一点并不是没有意义的,因为在本报告的第一部分中,在用下述经验公式

$$\frac{1}{2} \rho_j (u_j - u)^2 = \frac{1}{2} \rho_t u^2 + K Y_0 \quad (3.36)$$

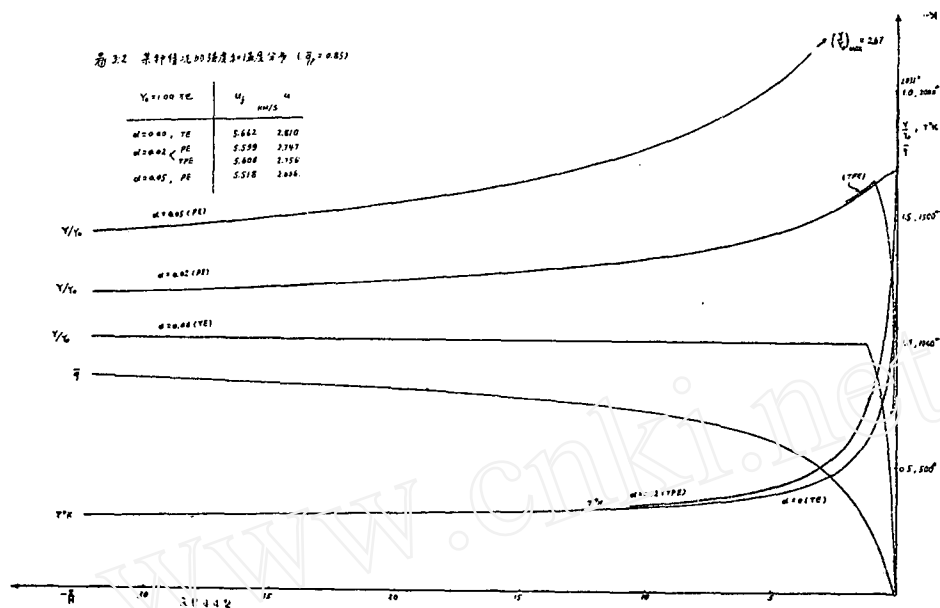
整理各种钢板的穿深试验数据时,我们根据射流参数和总穿深确定 KY_0 。发现所得的 KY_0 数值总是比理论估算大得多,以致不能用高应变率的因素来解释。

比较 (3.36) 和 (3.14) 式, 可以看出原因在哪里。根据 (3.14) 式, 靶板强度所提供的抗侵彻阻力不能用一个常数项 KY_0 表示, 它是随 \bar{q}_p 或 u_j 的增加, 随着塑性区的扩大而增大的。这在物理上是合理的。因此, 如果用 (3.36) 式整理穿深实验数据, 所确定的 KY_0 必然偏高。

以上分析说明, 从定性和定量方面看, 简化模型有一定可靠性。因此用这个方法。



研究轴对称问题是很有必要的,也只有研究了轴对称问题,这个简化计算模型才能得到较充分的实验检验。



考虑到平面问题与轴对称问题有一些共同点,平面问题也能反映材料强度对侵彻能力的影响,因此下面将根据平面射流侵彻靶板的计算结果,分析和讨论各种因素的影响。如果我们不是孤立地考虑单一因素影响的绝对大小,而是相对地比较各种因素的影响,那末从平面问题所得的结论也大体适用于轴对称问题。

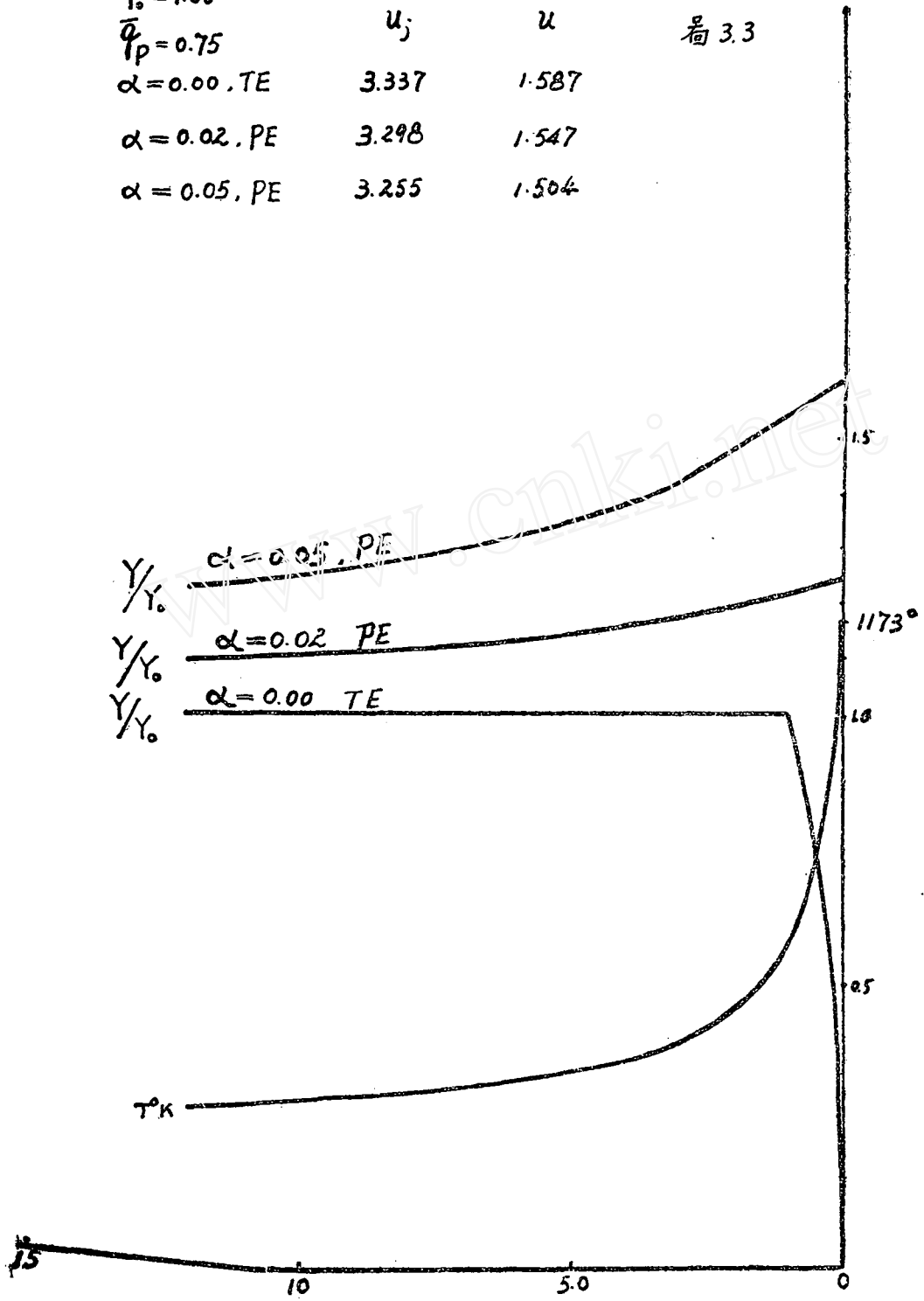
(2) 计算结果的分析讨论和几点结论

为便于讨论,我们称 $\alpha=0$ 、 $\gamma=0$ 的情况为单纯强度影响(情况TE), $F=1$ 的情况为单纯压力影响(情况PE),一般情况为压力、温度综合影响(情况TPE)。

对比图3.1中情况PE和TPE($\alpha=0.02$)的两条 $\delta u/u_0$ 曲线,可以看到它们的差别是很小的。这是因为高温区的厚度很薄,大约只有一倍射流的厚度(参看图3.2、3.3、3.4)。因此可以说,就目前所研究的各种钢材而言,由于它们在300℃以下能保持常温拉伸强度,在900℃才可以认为失去强度,所以进一步提高它们的高温强度看来不能有效地提高这些钢板的抗破甲弹侵彻的能力。

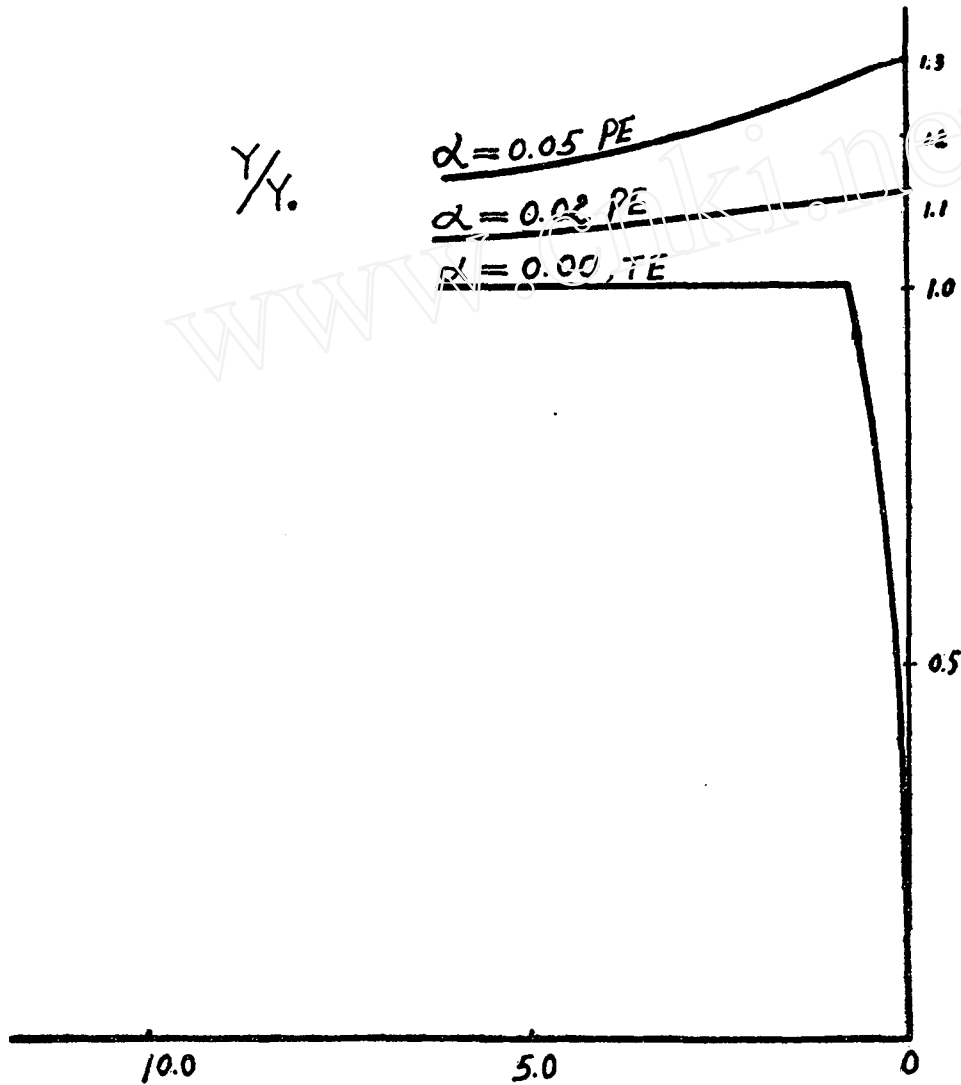
从图3.2、3.3、3.4可见,不论是情况PE还是TPE,在整个塑性区,特别是在高射流速度条件下, Y 的提高是很明显的,因而强度所提供的抗侵彻能力随 u_j 的增加而明显地增加。但是由于靶板惯性所提供的抗侵彻能力也是随 u_j 增加的,而且增加得更快,因而 α 的影响反映到 u_j-u 关系上(图3.5),不如图3.2、3.3、3.4所表示的那么明显。从(3.29)式看, α 对总穿深 P 的影响的绝对值不大,但如果从表3.1中第一栏和第二栏的比较看, $Y_0=1.0$ 万巴, $\alpha=0.05$ 相当于 $Y_0=1.38$ 万巴, $\alpha=0$; $Y_0=1.0$ 万巴, $\alpha=0.10$ 相当于 $Y_0=1.61$ 万巴, $\alpha=0$ 。这就是说,单纯从总穿深看,如果以 $\alpha=0.05$ 为

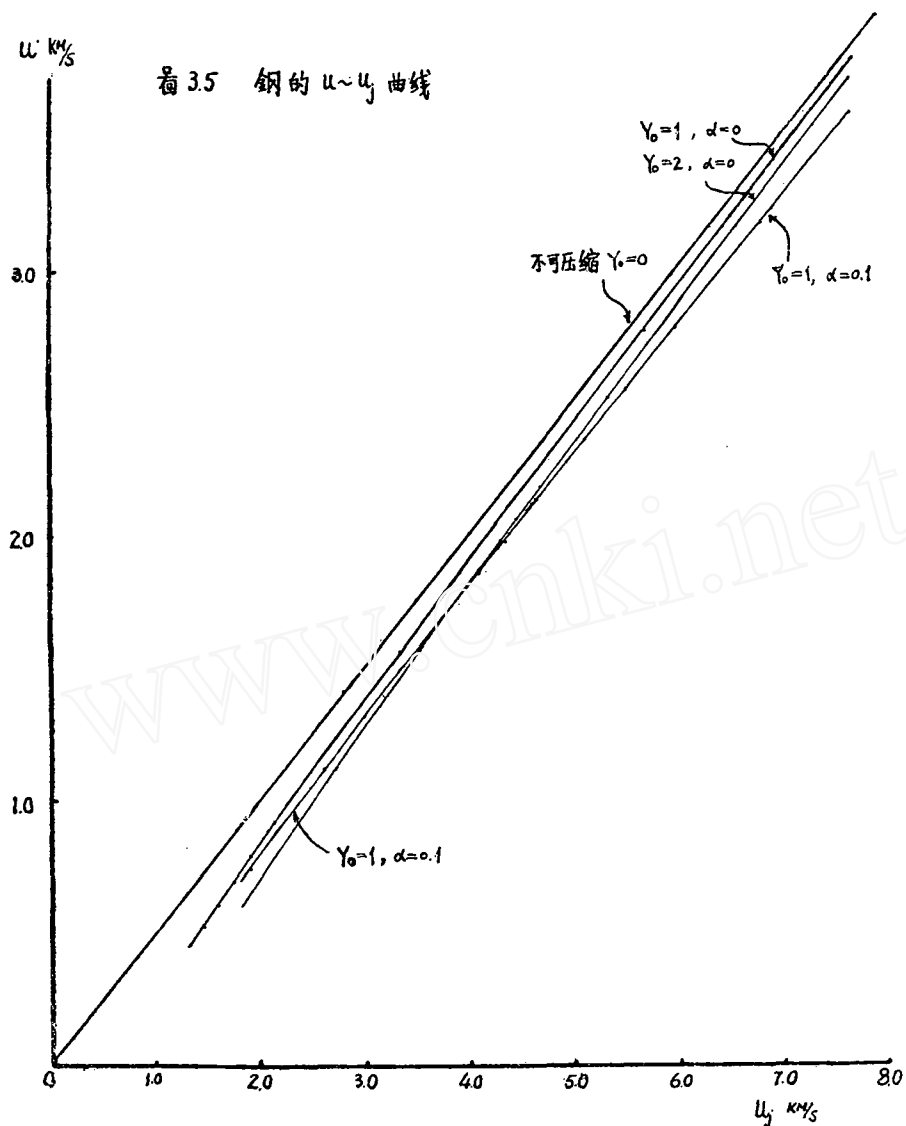
$Y_0 = 1.00$	u_j	u	看 3.3
$\bar{q}_p = 0.75$			
$\alpha = 0.00, TE$	3.337	1.587	
$\alpha = 0.02, PE$	3.298	1.547	
$\alpha = 0.05, PE$	3.255	1.504	



看 3.4

$Y_0 = 1.00$	u_j	u
$\bar{q}_p = 0.65$		
$\alpha = 0.00$ TE	2.268	1.010
$\alpha = 0.02$, PE	2.236	0.978
$\alpha = 0.05$, PE	2.209	0.952

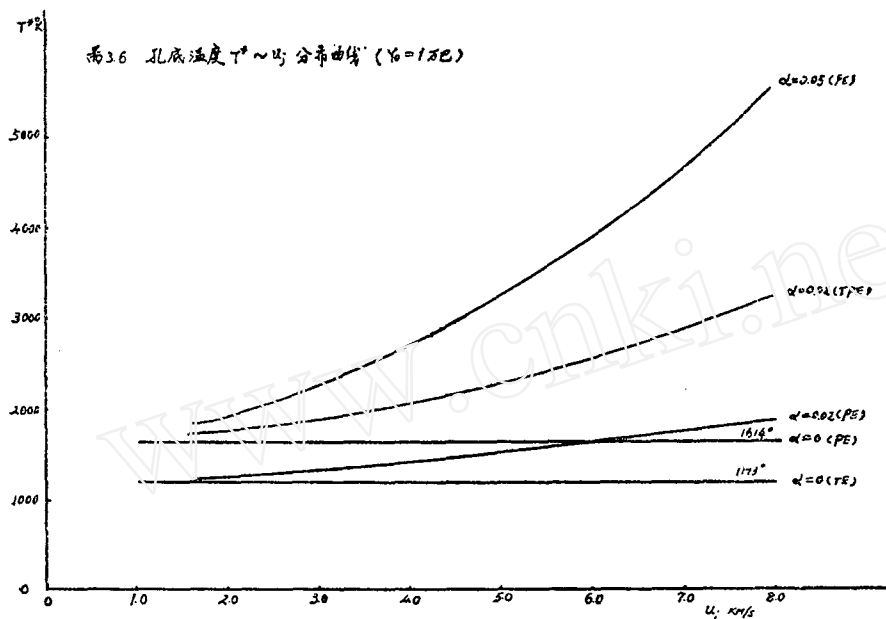




根据, α 的影响就相当于把常压强度提高 38%。目前我们缺少装甲钢 α 的实验数据, 据国外对纯金属的高压实验, $\alpha=0.05$ 是可能的数值。鉴于这样的 α 值已经能够较明显地提高钢板的抗破甲能力, 因此开展钢材在高压下的强度性能的研究看来是应当进行的, 它有助于探索提高钢材以及非金属材料抗破甲能力的途径和合理地选用装甲材料。

从图 3.2、3.3、3.4 及 3.6, 可以看到温度分布和孔底温度与 α 、 γ 等参数的值有密切的关系。孔底温度随 α 值的增加而增加; 在相同 α 条件下, 情况 PE 的孔底温度大于情况 TPE 的孔底温度。这些影响都可以归纳为压力影响。因此, 可以说温度分布和孔底温度是反映材料高压性能的比较敏感的量。靶板的瞬态温度测量和弹坑分析对于分析高压影响显然是很重要的方面。

对比表 3.1 中的第二栏和第三栏, 可以看出靶板密度对抗侵彻能力有很大影响。虽然与轴对称问题相比, 在平面问题中, 相对于强度、密度对侵彻能力的作用有些夸大, 但是仍然可以说密度是很重要的因素, 特别是在 u_j 大的时候。反过来也可以说, 提高射流密度能有效地增加破甲弹的威力。



结 束 语

这份报告汇报了破甲过程力学分析和简化模型方面的一些工作。主要结论和看法已在引言中概括地做了介绍, 这里不再重复。

这个报告只讨论了准定常侵彻问题条件下的穿深和 u_j - u 关系问题, 而没有研究射流出现拉断后的情况。在第一部分的第四节中, 只简单地分析了一下扩孔的能量利用率问题, 高强度靶板在射流作用下的开裂问题是今后应着重研究的。

轴对称射流的准定常侵彻问题正在着手解决中, 我们预计不久能基本上解决简化计算问题。那时, 才能充分应用试验结果论证简化理论的可靠性。

另外, 通过破甲过程的研究, 可以看出提高射流破甲威力的可能途径, 例如提高射流密度, 改善射流速度分布, 延长射流不被拉断的时间等都是值得研究的问题。这方面的问题将另行汇报。

附 录 A

在这一附录中，我们用弹性理论计算在弹性体内一个以等速 u 而方向和 z 轴相反运动着的集中力 F 所产生的应力场，并根据 Von Mises 屈服条件确定弹塑性区分界面和分界面上的压应力 σ 。

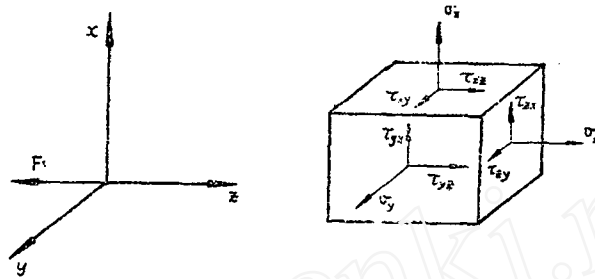


图 A.1

以 u_x 、 u_y 、 u_z 表示弹性体微元（相对于静止坐标系 (x, y, z) ）的位移。在小变形假设下，弹性体微元的运动方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho_t \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho_t \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= \rho_t \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

其中 f_x 、 f_y 、 f_z 是所谓体积力，在我们所讨论的问题中

$$\begin{aligned} f_x &= f_y = 0, \\ f_z &= -F\delta(x)\delta(y)\delta(z+ut) \end{aligned}$$

其中 F 是 Dirac δ -函数，上式说明 F 的作用点在 Z 轴上 ($x=y=0$)，而且 $z=-ut$ 。

如果我们取一个运动坐标系， $x'=x$ ， $y'=y$ ， $z'=z+ut$ ，那末这个坐标系的原点就在 F 的作用点上。在这个坐标系中，我们把弹性体微元的运动当做是定常的，也即

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) = u_x'(x', y', z'), \\ \sigma_x(x, y, z, t) &= \sigma_x'(x', y', z') \dots\dots \end{aligned}$$

于是运动方程变为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = u^2 \rho_t \frac{\partial^2 u_x}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = u^2 \rho_t \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - F\delta(x)\delta(y)\delta(z) = u^2 \rho_t \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}.$$

在这些式子以及以后的式子中,为简便起见,我们用 (x, y, z) 代替了 (x', y', z') 。

根据虎克定律

$$\sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$\sigma_y = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right).$$

其中, λ 和 μ 称为Lamé常数,它们与E(杨氏模数)、 ν (泊松系数)和G(剪切模数)之间的关系是

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

把应力的表达式代入运动方程得到位移分量 u_x 、 u_y 和 u_z 所须满足的基本方程

$$\mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho_t u^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$$

$$\mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho_t u^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - F\delta(x)\delta(y)\delta(z) \\ = \rho_t u^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{aligned}$$

我们用富氏积分变换法解上式。我们用 \bar{u}_x 、 \bar{u}_y 和 \bar{u}_z 表示 u_x 、 u_y 和 u_z 的富氏积分变

换, 即

$$\bar{u}_x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi - iy\eta - iz\zeta} u_x dx dy dz$$

根据逆变换的方法, 又有

$$u_x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi + iy\eta + iz\zeta} \bar{u}_x(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

我们先求出 \bar{u}_x 、 \bar{u}_y 和 \bar{u}_z , 然后根据逆变换公式求得 u_x 、 u_y 和 u_z 。为此, 我们取(A.1)式的富氏变换, 经过分部积分, 得出 \bar{u}_x 、 \bar{u}_y 、 \bar{u}_z 所需满足的方程如下:

$$\begin{aligned} [\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + (\lambda + \mu)\xi^2 - \rho_t u^2 \zeta^2] \bar{u}_x + (\lambda + \mu)\xi\eta \bar{u}_y + (\lambda + \mu)\xi\zeta \bar{u}_z &= 0, \\ (\lambda + \mu)\xi\eta \bar{u}_x + [\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + (\lambda + \mu)\eta^2 - \rho_t u^2 \zeta^2] \bar{u}_y + (\lambda + \mu)\eta\zeta \bar{u}_z &= 0, \\ (\lambda + \mu)\xi\zeta \bar{u}_x + (\lambda + \mu)\eta\zeta \bar{u}_y + [\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + (\lambda + \mu)\zeta^2 - \rho_t u^2 \zeta^2] \bar{u}_z &= -\frac{F}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \end{aligned}$$

解上述代数方程, 得

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{F}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(\lambda + \mu)\xi\zeta}{[\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2][(\lambda + 2\mu)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2]}, \\ \bar{u}_y &= \frac{F}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(\lambda + \mu)\eta\zeta}{[\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2][(\lambda + 2\mu)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2]}, \\ \bar{u}_z &= \frac{-F}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{[\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2]} - \frac{(\lambda + \mu)\xi^2}{[\mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2][(\lambda + 2\mu)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \rho_t u^2 \zeta^2]} \right\}. \end{aligned}$$

我们注意到, 纵波和横波波速分别是

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_t}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho_t}.$$

令

$$M^2 = \frac{u^2}{c^2}, \quad M_s^2 = \frac{u^2}{c_s^2},$$

即 M 、 M_s 分别表示侵彻速度 u 相对于纵波波速 c 和横波波速 c_s 的马赫数($M_s^2 > M^2$)。 \bar{u}_x 、 \bar{u}_y 和 \bar{u}_z 的逆变换需要根据三种不同情况分别讨论。这三种情况是: ① $M_s < 1$, ② $M_s > 1$, $M < 1$, ③ $M > 1$ 。第一种情况是亚音速侵彻, 第三种情况是超音速侵彻, 第二种情况, 相对于纵波是亚音速侵彻, 相对于横波是超音速侵彻。在破甲弹问题中, 第三种情况通常不出现, 因此以下只讨论前两种情况。

由于所讨论的问题是轴对称的, 所以我们引进元柱座标:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ \xi &= \omega \cos \Phi, & \eta &= \omega \sin \Phi, \end{aligned}$$

在求逆变换中: ω 和 Φ 的积分域分别是 $0 \leq \omega \leq \infty, 0 \leq \Phi \leq 2\pi$ 。问题既然是轴对称的, 以

下我们令 $\theta=0$, 这时 $\bar{u}_y=0$, 即 $u_\theta=0$, $u_x=u_R$, u_R 是子午面上的径向位移。以下就求 u_z 和 u_R 的逆转换。

u_z 的逆转换:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i3z+i(y+i\zeta)z} \bar{u}_z d\zeta d\eta d\xi \\ &= \frac{-F}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i\tau\omega\cos\phi+i\zeta z} \left\{ \frac{1}{\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2} - \frac{(\lambda+\mu)\zeta^2}{[\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2][(\lambda+2\mu)(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2]} \right\} \\ &= \frac{-F}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty J_0(\tau\omega) \omega e^{i\zeta z} \left\{ \frac{1}{\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2} - \frac{(\lambda+\mu)\zeta^2}{[\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2][(\lambda+2\mu)(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2]} \right\} d\omega d\zeta \end{aligned}$$

其中 $J_0(x)$ 是零阶第一种贝塞尔函数。

在 $M_s < 1$ 的情况下,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta z} d\zeta}{\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2} &= \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta z} d\zeta}{\omega^2+(1-M_s^2)\zeta^2} = \frac{\pi}{\mu|1-M_s^2|} \frac{e^{-|z|\omega/\sqrt{1-M_s^2}}}{\omega}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)\zeta^2 e^{i\zeta z} d\zeta}{[\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2][(\lambda+2\mu)(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2]} &= -\frac{\pi}{g_k l^2 \omega} \left[\frac{e^{-|z|\omega/\sqrt{1-M_s^2}}}{\sqrt{1-M_s^2}} - \frac{e^{-|z|\omega/\sqrt{1-M_s^2}}}{\sqrt{1-M_s^2}} \right]. \end{aligned}$$

由于 $\int_0^\infty J_0(\tau\omega) e^{-|z|\omega/\sqrt{1-M_s^2}} d\omega = \frac{1}{(\tau^2 + \frac{z^2}{1-M_s^2})^{1/2}}$,

所以
$$u_z = \frac{-F}{4\pi g_k l^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-M_s^2}} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \frac{z^2}{1-M_s^2}}} - \frac{\sqrt{1-M_s^2}}{\sqrt{\tau^2 + \frac{z^2}{1-M_s^2}}} \right], \quad M_s < 1 \quad (A.2)$$

在 $M_s > 1$, $M < 1$ 的情况下, 如 $Z < 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega z} d\omega}{\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2} &= \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{\mu\sqrt{M_s^2-1}} \sin \frac{\omega|z|}{\sqrt{M_s^2-1}}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)\zeta^2 e^{i\zeta z} d\zeta}{[\mu(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2][(\lambda+2\mu)(\omega^2+\zeta^2)-g_k l^2 \zeta^2]} \\ &= \frac{\pi}{g_k l^2 \omega} \left\{ \frac{1}{\sqrt{M_s^2-1}} \sin \frac{|z|\omega}{\sqrt{M_s^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} e^{-|z|\omega/\sqrt{1-M^2}} \right\}, \\ \text{我们有 } \int_0^\infty J_0(\tau\omega) \sin \frac{|z|\omega}{\sqrt{M_s^2-1}} d\omega &= \begin{cases} 0 & \frac{|z|}{\sqrt{M_s^2-1}} < \tau \\ \frac{1}{(\frac{\tau^2}{M_s^2-1} - \tau^2)^{1/2}}, & \frac{|z|}{\sqrt{M_s^2-1}} > \tau \end{cases} \end{aligned}$$

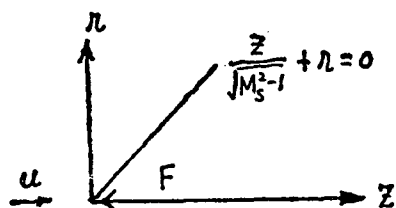


图 A.2

上述积分反映了这样一个物理事实, 即在 $M_s > 1$, $M < 1$ 的情况下, 在所谓马赫锥以前, 没有横波, 横波的影响只限于马赫锥上 (图 A.2)。在小变形理论中, 马赫锥相当于冲击波。最后, u_z 可表示为

$$u_z = -\frac{F}{4\pi\gamma_s u^2} \frac{1}{\sqrt{1-M^2} \left(\tau^2 + \frac{z^2}{1-M^2}\right)^{3/2}} - \frac{F}{4\pi\gamma_s u^2} \sqrt{M_s^2-1} \frac{H\left(\frac{z}{\sqrt{M_s^2-1}} - \tau\right)}{\left(\frac{z^2}{M_s^2-1} - \tau^2\right)^{3/2}}, \quad (A.3)$$

上式适用于任何 r 和 z 。 $H(x)$ 是 Heaviside 阶梯函数, 它的定义是:

$$H(x) = 0, \quad \text{如 } x < 0;$$

$$H(x) = 1, \quad \text{如 } x > 0.$$

同样,

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{F}{(2\pi)^3} \frac{1}{\gamma_s u^2} \frac{M_s^2 - M^2}{(1-M^2)(1-M_s^2)} \iiint \frac{\xi \zeta e^{i(x\xi + y\eta + z\zeta)} d\xi d\eta d\zeta}{\left(\zeta^2 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{1-M^2}\right) \left(\zeta^2 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{1-M_s^2}\right)} \\ &= \frac{F}{(2\pi)^3} \frac{1}{\gamma_s u^2} \frac{M_s^2 - M^2}{(1-M^2)(1-M_s^2)} i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{j\omega^2 \cos\phi e^{iz\omega \cos\phi + i\zeta^2 z}}{\left(\zeta^2 + \frac{\omega^2}{1-M^2}\right) \left(\zeta^2 + \frac{\omega^2}{1-M_s^2}\right)} d\omega d\phi d\zeta. \end{aligned}$$

由于 $\int_0^{2\pi} \cos\phi e^{iz\omega \cos\phi} d\phi = 2\pi i J_1(z\omega)$,

其中, $J_1(x)$ 是一阶的第一种贝塞尔函数, 所以

$$u_R = \frac{F}{4\pi^2} \frac{1}{\gamma_s u^2} \frac{M_s^2 - M^2}{(1-M^2)(1-M_s^2)} i \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega^2 J_1(z\omega) \frac{\zeta e^{i\zeta^2 z} d\omega d\zeta}{\left(\zeta^2 + \frac{\omega^2}{1-M^2}\right) \left(\zeta^2 + \frac{\omega^2}{1-M_s^2}\right)}.$$

在 $M_s < 1$ 的情况下

$$\frac{M_s^2 - M^2}{(1-M^2)(1-M_s^2)} i \int_{-\infty}^\infty \frac{\zeta e^{i\zeta^2 z}}{\left(\zeta^2 + \frac{\omega^2}{1-M^2}\right) \left(\zeta^2 + \frac{\omega^2}{1-M_s^2}\right)} d\zeta = -\frac{\pi}{\omega^2} \left(e^{-|\omega|/\sqrt{1-M^2}} - e^{-|\omega|/\sqrt{1-M_s^2}} \right).$$

再利用关系式

$$\int_0^\infty e^{-at} J_1(bt) dt = \frac{1}{b} - \frac{a}{b\sqrt{a^2 + b^2}},$$

我们得出

$$u_R = -\frac{F}{4\pi\rho_t u^2} \frac{z}{z} \left[\frac{1}{(1-M_s^2)^{1/2} (z^2 + \frac{z^2}{1-M_s^2})^{1/2}} - \frac{1}{(1-M^2)^{1/2} (z^2 + \frac{z^2}{1-M^2})^{1/2}} \right]. \quad (A.4)$$

在 $M_s > 1$, $M < 1$ 的情况下, 利用关系式

$$\int_0^{\infty} J_1(at) \cos bt dt = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > b \\ \frac{1}{a} - \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & b > a \end{cases}$$

可以得出

$$u_R = \frac{F}{4\pi\rho_t u^2} \frac{z}{z} \left[\frac{1}{(1-M_s^2)^{1/2} (z^2 + \frac{z^2}{1-M_s^2})^{1/2}} - \frac{1}{\sqrt{M_s^2 - 1}} \frac{1}{(\frac{z^2}{M_s^2 - 1} - z^2)^{1/2}} \right],$$

$$\frac{z}{\sqrt{M_s^2 - 1}} + z < 0; \quad (A.5)$$

$$u_R = \frac{-F}{4\pi\rho_t u^2} \left[\frac{1}{z} - \frac{z}{z (1-M^2)^{1/2} (z^2 + \frac{z^2}{1-M^2})^{1/2}} \right],$$

$$\frac{z}{\sqrt{M_s^2 - 1}} + z > 0.$$

下面根据以上弹性理论的结果, 计算在给定 F 和 u 条件下, 中心流线上屈服点的位置 z_p ($z_p < 0$, 即在孔底之前) 和作用于这个分界点上的压应力 σ_p (为该点 σ_z 的负值)。

先讨论 $M_s < 1$ 的情况, 由(A.2)和(A.4)式得出在中心流线上, $z < 0$ 时

$$u_z = \frac{F}{4\pi\rho_t u^2} \frac{M_s^2}{z} + O(r^2),$$

$$u_R = \frac{F}{4\pi\rho_t u^2} \frac{r}{z^2} (M_s^2 - M^2) + O(r^3).$$

所以当 $r \rightarrow 0$, 我们有

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{F}{4\pi\rho_t u^2} \frac{M_s^2}{z^2},$$

$$\frac{\partial u_R}{\partial r} = \frac{u_R}{r} = \frac{F}{4\pi\rho_t u^2} \frac{1}{z^2} (M_s^2 - M^2).$$

因此体积应变 θ 为

$$\theta = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_R}{\partial r} + \frac{u_R}{r} = -\frac{F}{4\pi\rho_t c^2} \frac{1}{z^2}.$$

这样就能计算 z 方向上的应变偏量和应力偏量, 它们分别是

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{3}\theta = -\frac{F}{4\pi\rho_t c_s^2} \left(1 - \frac{c_s^2}{c^2}\right) \frac{1}{z^2},$$

$$s_z = 2G \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{3}\theta\right) = -\frac{F}{2\pi z^2} \frac{5-4\nu}{6(1-\nu)}.$$

但是在中心流线上, 屈服条件是

$$s_z^2 + s_r^2 + s_\theta^2 = \frac{2}{3} Y_0^2,$$

$$s_r = s_\theta = -\frac{1}{2}s_z.$$

由于根据侵彻的物理过程, s_z 必须取负值, 因此屈服条件是

$$s_z = -\frac{2}{3} Y_0.$$

这样就得出屈服点的位置为

$$z_p = -\sqrt{\frac{3F}{4\pi Y_0} \left(1 - \frac{c_s^2}{c^2}\right)}. \quad (\text{A.6})$$

这一点的压应力为

$$\begin{aligned} \sigma_p &= -\lambda\theta - 2G\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{F}{4\pi z_p^2} \\ &= \frac{2(2-\nu)}{5-4\nu} Y_0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

在 $M_s > 1$, $M < 1$ 的情况下,

$$z_p = -\sqrt{\frac{3F(1-M^2/3)}{4\pi M_s^2}} \frac{1}{Y_0} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{F}{4\pi z_p^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{2}{M_s^2}\right) \\ &= Y_0 \frac{M_s^2}{3-M^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} + \frac{2}{M_s^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

附录 B

不可压缩理想流体平面射流定常侵彻的解

我们在这里把靶板和射流都当做不可压缩理想流体。我们把靶板和射流密度做为是相同的，以 ρ 表示之。这并不是什么限制，因为如果靶板的密度 ρ_t 不等于射流的密度，在射流的速度分布保持不变的情况下，只需要把等密度条件下的靶板速度分布乘上一个因子 $(\rho_i/\rho_t)^{\frac{1}{2}}$ 就可以了。

我们取射流的厚度为 H_2 ，靶板厚度为 H_1 （然后令 $H_1 \rightarrow \infty$ ），因为密度相同，所以相对于孔底 O ，射流与靶板的来流速度都是 u 。射流与靶板碰撞后分为上下对称的两股流。根据质量守恒和能量守恒的原则，在远离孔底 O 处，两股流的厚度都等于 $(H_1+H_2)/2$ ，速度为 u 。但是这两股流与中心流线各成一个夹角 Φ 。流动图片及座标见图 B.1。 Φ 角可以根据 x 方向上总的动量守恒原理来确定。

$$\rho U^2 H_1 - \rho U^2 H_2 = 2 \cdot \rho U^2 \cdot \frac{1}{2} (H_1 + H_2) \cos \Phi,$$

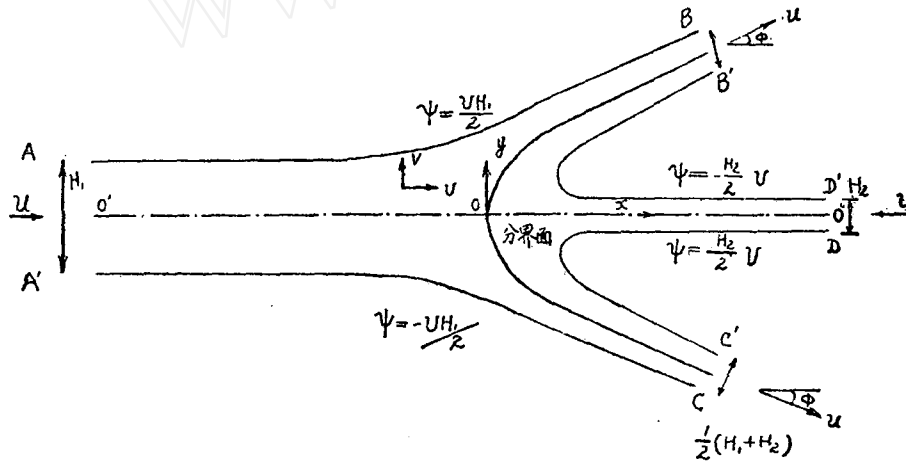


图 B.1

$$\text{因此 } \cos \Phi = \frac{H_1 - H_2}{H_1 + H_2}. \quad (\text{B.1})$$

我们要求解出自由面的形状和各点的速度 U 和 V 。解这类带有自由面的平面定常流的经典方法是复变函数法和速度平面法。下面我们就用这个方法求解。

我们知道， U 和 V 必须满足质量守恒条件和无旋条件，它们是：

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

我们可以引进速度势 $\varphi(x, y)$ ，它与 U 、 V 的关系是：

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (\text{B.2})$$

根据这个定义，无旋条件自动满足。代入质量守恒方程得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

所以 φ 必需满足拉普拉斯方程。

同样，可以引进流函数 ψ ，它的定义是

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

根据这个定义，质量守恒方程自动满足。代入无旋条件，则要求 ψ 也满足拉普拉斯方程。 ψ 沿速度方向的微分 $d\psi$ 为

$$d\psi = (U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y}) dt = 0$$

dt 为时间的微分。因此 $\psi = \text{常数}$ ，表示流线。设有两条流线 ψ_1 和 ψ_2 ，如图 B.2 所示。断面箭头由 ψ_1 指向 ψ_2 ，则由 ab 左边流向 ab 右边的流量（以体积计算），就是 $\psi_2 - \psi_1$ 。因此，如果令中心流线上的 $\psi = 0$ ，则自由表面 AB 、 $A'C$ 、 $D'B'$ 、

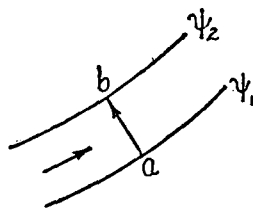


图 B.2

DC' 上的 ψ 分别等于 $(1/2)UH_1$ 、 $-(1/2)UH_1$ 、 $-(1/2)UH_2$ 和 $1/2UH_2$ （见图 B.1）。同时在自由表面上，根据伯努利定理， $U^2 + V^2 = u^2$ 。

由 φ 和 ψ 的定义可知

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

这是所谓 Cauchy-Riemann 条件。它说明 φ 和 ψ 分别等于一个以 $z = x + iy$ 为复变数的解析函数 F 的实数部分和虚数部分，即

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = F(z).$$

$F(z)$ 称为复数势。计算 dF/dz 可得

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = U - iV.$$

下面我们令

$$W = U - iV,$$

即 W 的实数部分为 U ，虚数部分为 $-V$ 。于是

$$W = \frac{dF}{dz}. \quad (\text{B.3})$$

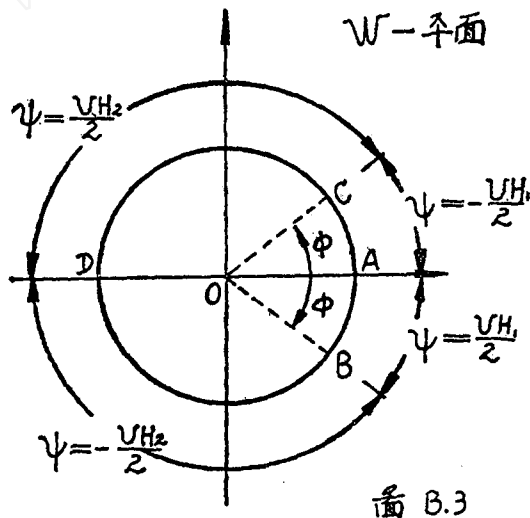
这是一个很重要的结果。它不仅说明，如果知道了复数势可以通过对 z 的微商求出速度，更重要的是它指出了带有自由面的平面流的解法。

F 既然是 z 的解析函数， W 又是 F 对 z 的导数，那末 W 也一定是 z 的解析函数，反之亦然。于是 F 也是 W 的解析函数。这样就有

$$W = \frac{dF(W)}{dW} \frac{dW}{dz},$$

或者
$$dz = \frac{1}{W} \frac{dF}{dW} dW. \quad (\text{B.4})$$

这就指出了，如果在 W 平面上能够求得 $F(W)$ ，那么 z 与 W 的对应关系可以较容易地从 (B.4) 求得。这就是所谓速度平面法。



在速度平面 W 上，图 B.1 中的流域变为 W 平面上以 u 为半径的内域。自由面上 $U^2 + V^2 = |W|^2 = u^2$ ，所以自由面就是以 u 为半径的圆周。图 B.1 中的自由面流线 AB 、 $A'C$ 、 $C'D$ 、 $D'B'$ 分别相应于图 B.3 中的 AB 、 AC 、 CD 和 DB 。在孔底 O 点 $U^2 + V^2 = 0$ ，所以两个图中的 O 是相应的。在图 B.3 中，和图 B.1 中一样，标出了复数势 F 的虚数部分所应取的边界值。因此，问题就化为在以 u 为半径的圆内求满足上述边界条件的解析函数 $F(W)$ 。

由于在 $|W| \leq u$ 里, $F(W)$ 是解析函数, 所以可以用 W 的幂级数来表示,

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

在以 u 为半径的圆周上, $W = ue^{i\theta}$, 所以 F 的边界值 F_s 为

$$\begin{aligned} F_s &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) u^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) + i \sum_{n=0}^{\infty} u^n (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

其中 $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n, β_n 均为实数. 因此, F_s 的虚数部分 ψ_s 为

$$\psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} u^n (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta).$$

在上面这个式子里, ψ_s 是已知的, 如图B.3所示. 显然, ψ_s 是 θ 的奇函数. 因此

$$\beta_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

于是
$$\psi_s = \sum_{n=1}^{\infty} u^n \alpha_n \sin n\theta.$$

利用三角函数的正交性, 即通常的富氏级数展开法, 我们得到

$$\alpha_n = \frac{1}{u^n} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \psi_s \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi u^n} \int_0^{\pi} \psi_s \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

其中
$$\psi_s = -\frac{uH_1}{2}, \quad 0 \leq \theta < \Phi;$$

$$\psi_s = \frac{uH_2}{2}, \quad \Phi < \theta \leq \pi.$$

因此,

$$\alpha_n u^n = \frac{uH_1}{\pi n} (\cos n\Phi - 1) - \frac{uH_2}{\pi n} [(-1)^n - \cos n\Phi], \quad n = 1, 2, \dots$$

将求得的这些系数代入 F 的表达式, 我们得到

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n w^n \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{w}{u}\right)^n \left\{ \frac{uH_1}{\pi n} (\cos n\Phi - 1) - \frac{uH_2}{\pi n} [(-1)^n - \cos n\Phi] \right\}. \end{aligned}$$

这里, α_0 可以是任意实数, 它的数值不影响其他计算, 因此我们把它置为零。

应用关系式

$$\cos n\phi = \frac{e^{in\phi} + e^{-in\phi}}{2},$$

以及对数展开

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{x^n}{n},$$

F 可以最后表示为

$$F = \frac{uH_1}{\pi} \ln\left(1 - \frac{w}{u}\right) + \frac{uH_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{u}\right) - \frac{u(H_1+H_2)}{2\pi} \ln\left(1 - e^{i\phi} \frac{w}{u}\right) - \frac{u(H_1+H_2)}{2\pi} \ln\left(1 - e^{-i\phi} \frac{w}{u}\right). \quad (B.5)$$

顺便提一下, 如果将 u 改为 $-u$, 这个解所表示的就是平面药形罩压垮形成射流和杵的势函数, ϕ 是压垮时的动态角。

平面射流侵彻靶板实际要讨论的是 $H_1 \gg H_2$ 的情况。如果令 $\frac{H_2}{H_1} \rightarrow 0$, H_2 保持有限值, 我们得到

$$F = \frac{uH_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{u}\right) - \frac{uH_2}{\pi} \left(1 - \frac{w}{u}\right) + \frac{2H_2u}{\pi} \cdot \frac{1}{1-w/u} - \frac{2H_2u}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-w/u)^2} \quad (B.6)$$

最后我们根据 (B.6) 式, 由 (B.4) 式求 z 和 w 的对应关系。我们得到

$$\frac{\pi}{H_2} dz = \left[-\frac{1}{1+\bar{w}} - \frac{1}{1-\bar{w}} - \frac{2}{(1-\bar{w})^2} - \frac{4}{(1-\bar{w})^3} \right] d\bar{w},$$

其中 $\bar{w} = w/u$ 。在孔底 $w=0$, 我们要求 $z=0$, 即孔底位于 (x, y) 坐标系的原点。这样就能确定在积分上式时的积分常数。于是有

$$\frac{z\pi}{2H_2} = 2 - \frac{1}{1-\bar{w}} - \frac{1}{(1-\bar{w})^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}}. \quad (B.7)$$

沿靶板中心流线, 我们有 $\bar{w} = \frac{q}{u} = \bar{q}$, $0 \leq \bar{q} \leq 1$, 代入上式, 得出

$$\frac{x\pi}{2H_2} = 2 - \frac{1}{1-\bar{q}} - \frac{1}{(1-\bar{q})^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\bar{q}}{1-\bar{q}}, \quad 0 \leq \bar{q} \leq 1 \quad (B.8)$$

$$y=0.$$

这就是平面射流定常侵彻简化理论所需要的 $x(\bar{q})$ 。

附 录 C

在这里我们用和附录A相同的方法, 计算平面问题中, 一个以等速 u 运动着的集中力 F 所产生的应力场, 坐标系见图 C.1.

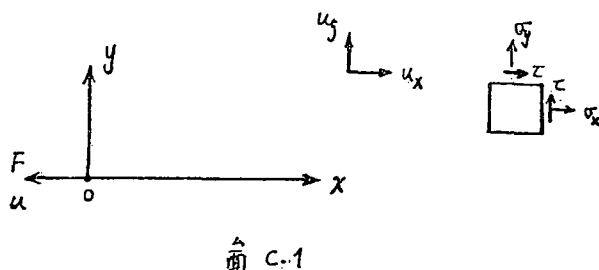


图 C.1

虎克定律为:

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right),$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).$$

和 (A.1) 式相应的定常运动方程是:

$$\begin{aligned} c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + (c^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - F \delta(x) \delta(y) \\ = u^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \\ c_s^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + (c^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ = u^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (C.1)$$

引入 u_x 和 u_y 的富氏变换

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ix\xi - iy\eta} dx dy,$$

$$\bar{u}_y = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_y e^{-ix\xi - iy\eta} dx dy.$$

于是逆转换为

$$u_x = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_x e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta, \\ u_y = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_y e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta.$$

\bar{u}_x 、 \bar{u}_y 所需满足的方程式是

$$[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) + (c^2 - c_s^2)\xi^2 - u^2\xi^2] \bar{u}_x + (c^2 - c_s^2)\xi\eta \bar{u}_y = -\frac{F}{2\pi\rho_c}, \\ (c^2 - c_s^2)\xi\eta + [c_s^2(\xi^2 + \eta^2) + (c^2 - c_s^2)\eta^2 - u^2\xi^2] \bar{u}_y = 0. \quad (C.2)$$

于是

$$\bar{u}_x = -\frac{F}{2\pi\rho_c} \frac{1}{c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2} \\ - \frac{F}{2\pi\rho_c} \frac{(c^2 - c_s^2)\eta^2}{[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2][c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2]}, \\ \bar{u}_y = \frac{F}{2\pi\rho_c} \frac{(c^2 - c_s^2)\xi\eta}{[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2][c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2]}. \quad (C.3)$$

\bar{u}_x 、 \bar{u}_y 逆转换积分不能以初等函数表示, 为此, 我们直接求应变分量 $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ 和

$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$, 它们的富氏积分表达式, 根据 (C.3) 式, 是

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{F}{(2\pi)^2\rho_c} i \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2} - \frac{F(c^2 - c_s^2)}{(2\pi)^2\rho_c} i \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\eta e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2][c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2]}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{F}{(2\pi)^2\rho_c} i(c^2 - c_s^2) \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\eta e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2][c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2]}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{F}{(2\pi)^2\rho_c} i \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2} - \frac{F}{(2\pi)^2\rho_c} i(c^2 - c_s^2) \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2(1-\xi) e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2][c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2]}.$$

在计算 σ_x 和 σ_y 时, 我们只需要 $y=0$ 上的应变, 由于 $(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x})_{y=0} = 0$, 所以

不必计算 $\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$.

我们令

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} i \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2}, \\ I_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} i(c^2 - c_s^2) \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\eta e^{ix\xi + iy\eta} d\xi d\eta}{[c_s^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2][c^2(\xi^2 + \eta^2) - u^2\xi^2]}.$$

通过一些计算, 得出

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi c^2(1-M^2)} \frac{x/\sqrt{1-M^2}}{[y^2+x^2/(1-M^2)]}, \quad M < 1,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi u^2} \left\{ \frac{x/\sqrt{1-M^2}}{y^2+x^2/(1-M^2)} - \frac{x/\sqrt{1-M_s^2}}{y^2+x^2/(1-M_s^2)} \right\}, \quad M_s < 1, M < 1,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi u^2} \frac{x/\sqrt{1-M^2}}{y^2+x^2/(1-M^2)} - \frac{1}{u^2} \delta\left(-y + \frac{x}{\sqrt{M_s^2-1}}\right),$$

$y > 0, M_s > 1, M < 1.$

最后一式中的 $\delta(x)$ 是Dirac δ 函数。

在 $y=0, x < 0$ 处, 如

$$M_s < 1,$$

则有

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{F}{2\pi\rho_t u^2} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{1-M^2}} - \sqrt{1-M_s^2} \right],$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{F}{2\pi\rho_t u^2} \frac{1}{x} \left[\sqrt{1-M^2} - \sqrt{1-M_s^2} \right], \quad (C.4)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,$$

如 $M_s > 1, M < 1,$

则有

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{F}{2\pi\rho_t u^2} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-M^2}},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{F}{2\pi\rho_t u^2} \frac{\sqrt{1-M^2}}{x}, \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0.$$

在两种情况下都有

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{F}{2\pi\rho_t u^2} \frac{M^2}{\sqrt{1-M^2}} \cdot \frac{1}{x}. \quad (C.6)$$

我们用下面的公式计算应力偏量 s_x, s_y 和 s_z ,

$$s_x = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\theta}{3} \right),$$

$$s_y = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\theta}{3} \right),$$

$$s_z = -(s_x + s_y),$$

在中心流线上, 剪应力等于零, 因而屈服条件是:

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{2}{3} Y_0^2.$$

根据 (C.4)、(C.5) 和 (C.6) 式, s_x 、 s_y (及 s_z) 都反比于 x , 因而从屈服条件可以得出 x_p , 即屈服点的计算公式如下:

$$x_p^2 = \frac{3}{Y_0^2} \cdot \left(\frac{F}{\pi M_s^2} \right)^2 \left(A^2 + AB + \frac{B^2}{3} \right) \quad (\text{C.7})$$

其中

$$B = \frac{M^2}{\sqrt{1-M^2}},$$

$$A = \sqrt{1-M^2} - \sqrt{1-M_s^2}, \quad \text{如 } M_s < 1$$

$$A = \sqrt{1-M^2}, \quad \text{如 } M_s > 1, M < 1 \quad (\text{C.8})$$

最后, 由于

$$\sigma_p = -\sigma_x = -\rho_t c^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

我们得出

$$\sigma_p = -\frac{F}{2\pi M^2} \cdot \frac{1}{x_p} \left[\frac{1}{\sqrt{1-M^2}} - \frac{\nu}{1-\nu} \sqrt{1-M^2} - \sqrt{1-M_s^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right], \quad M_s < 1;$$

$$\sigma_p = -\frac{F}{2\pi M^2} \cdot \frac{1}{x_p} \left[\frac{1}{\sqrt{1-M^2}} - \frac{\nu}{1-\nu} \sqrt{1-M^2} \right], \quad M_s > 1, M < 1.$$

数值计算表明, 当 $\nu=1/3$ 时, 在亚声速情况下 ($M_s < 1$)

$$-\pi x_p \approx 0.72 \frac{F}{Y_0}, \quad (\text{C.9})$$

$$\sigma_p \approx 1.4 Y_0.$$

我们在这个报告中, 为简化起见, 把 (C.9) 式既用于亚声速情况, 也用于 $M_s > 1$, $M < 1$ 的情况。

参 考 资 料

[1] 力学所二室四组, 破甲过程初步分析及一些基础知识(续), 力学情报, 1973年第6期67页