

Bingham 流体在旋转圆盘上 流动的数值解¹⁾

范 椿

陈耀松

(中国科学院力学研究所, 北京 100080) (北京大学力学系, 北京 100871)

摘要 导出了描述 Bingham 流体在旋转圆盘上流动的基本方程, 用差分方法数值解薄膜厚度分布方程, 得到二种类型的厚度分布. 数值解分别和计算机磁盘的厚度分布, Jenekhe 等的实验结果定性一致.

关键词 Bingham 流体, 旋转圆盘上的流动, 数值解

引 言

许多工业产品需要在表面涂上一层薄膜, 而旋转甩涂是一种简单而广泛使用的技术. Emslie 等^[1], Acrivos 等^[2], Matsumoto 等^[3] 和陈文芳等^[4] 分别研究了牛顿流体, 幂律流体, Bingham 流体和 Casson 流体在旋转圆盘上的流动. 上述文章没有考虑粘度的时间依赖性, 也就是忽略了蒸发效应. 溶液的蒸发引起溶质浓度 C 的增加, 粘度和屈服应力将随溶质浓度 C 的增加而迅速地增加.

在本文的分析中应用了陈文芳等^[4] 的量级比较方法.

1 运动方程, 连续方程和本构方程

我们选择柱坐标系 $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$, 坐标原点选在圆盘的中心. 假定速度的物理分量是

$$v_r = \bar{u}, \quad v_\theta = \bar{r}\Omega, \quad v_z = \bar{w} \quad (1)$$

其中 Ω 是圆盘的角速度, 是一常数.

我们引进下列无量纲量

$$\left. \begin{aligned} r &= \bar{r}/a, & z &= \bar{z}/h_0, & t &= (h_0/a)\Omega\bar{t}, \\ u &= \bar{u}/h_0\Omega, & w &= a\bar{w}/h_0^2\Omega, \\ P &= \bar{P}/\rho h_0^2\Omega^2, & T_{ij} &= \bar{T}_{ij}/\rho h_0^2\Omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 a 是圆盘半径, h_0 是在 $\bar{r} = a$ 处的薄膜初始厚度, \bar{t} 是时间, \bar{P} 是压力, ρ 是密度, \bar{T}_{ij} 是偏应力张量. 假定全部无量纲量是同一量级的.

¹⁾ 国家自然科学基金资助课题.

1993-05-18 收到第一稿, 1994-09-16 收到修改稿.

我们假定旋转运动是轴对称的 ($\partial/\partial\theta = 0$).

运动方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{a^2}{h_0^2} r &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{a}{h_0} \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ 2 \frac{a}{h_0} u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{r\theta}) + \frac{a}{h} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{a^2}{h_0^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{a}{h_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{a^2}{h_0^2} \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

连续方程是

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

其边界条件是

1) 在圆盘上无滑移

$$\text{在 } z = 0 \text{ 处, } u = w = 0 \quad (5)$$

2) 在自由表面, 剪切应力为零

$$\text{即在 } z = \bar{h} = h/h_0 \text{ 处 } T_{ij} = 0, (i \neq j) \quad (6)$$

这里 \bar{h} 是薄膜的厚度, 并且是 \bar{t} 和 \bar{r} 的函数.

我们引进下列无量纲量

$$\mathbf{A}_{ij} = \bar{\mathbf{A}}_{ij}/\Omega, \quad K(C) = \bar{K}(C)/\rho h_0^2 \Omega, \quad \tau_y(C) = \bar{\tau}_y(C)/\rho h_0^2 \Omega^2$$

这里 C 是溶质浓度, $\bar{\mathbf{A}}_{ij}$ 是 Rivlin-Ericksen 的一阶张量, $K(C)$ 是粘性粘度, $\bar{\tau}_y(C)$ 是屈服应力.

Bingham 流体的本构方程是

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{ij} &= \{K(C) + \tau_y(C)/|A_{st}A_{ts}/2|^{1/2}\} \mathbf{A}_{ij}, \quad T_{st}T_{ts}/2 \geq \tau_y^2, \\ \mathbf{A}_{ij} &= 0, \quad T_{st}T_{ts}/2 < \tau_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里塑性粘度 $K(C)$ 和屈服应力 $\tau_y(C)$ 二者是溶质浓度 C 的函数.

按照轴对称假设, 由 (1) 和 (2) 可得 \mathbf{A}_{ij} 如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2h_0}{a} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{h_0^2}{a^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & \frac{2h_0}{a} \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{h_0^2}{a^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{2h_0}{a} \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

溶液的蒸发引起 C 的变化. 一方面, 蒸发速率依赖于旋转圆盘上流体和周围空气的相对速度 $r\Omega$, 如此, 我们可以假设 C 的变化速率线性依赖于 $r\Omega$. 另一方面,

蒸发速率随溶液浓度的减小而减小, 我们可以假设 C 的变化速率线性依赖于 $C_s - C$, 这里 C 是固化浓度. 如此, 我们假设

$$\partial C / \partial t = \bar{\alpha} r \Omega (C_s - C)$$

这里 $\bar{\alpha}$ 是一常数. 上述方程的解是

$$C = C_s - (C_s - C_0) \exp(-\bar{\alpha} r \Omega t) \quad (9)$$

这里 C_0 是初始浓度.

2 薄膜厚度的微分方程

我们假定 $h_0/a \ll 1$. 由 (8) 比较 A_{rz} 中的第一项和第二项

$$\frac{h_0^2}{a^2} \frac{\partial w}{\partial r} / \frac{\partial u}{\partial z} \approx (h_0/a)^2 \ll 1$$

则

$$A_{rz} \approx \partial u / \partial z$$

用同样的量级比较方法可知 $A_{rr}/A_{rz} = (h_0/a) \ll 1$, $A_{\theta\theta}$ 和 A_{zz} 与 A_{rr} 是同一量级, 所以 A_{rr} , $A_{\theta\theta}$ 和 A_{zz} 可以忽略, 近似于零. 由本构方程 (7) 可知, T_{rz} 与 T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, T_{zz} 的量级比较和 A_{rz} 与 A_{rr} , $A_{\theta\theta}$, A_{zz} 的量级比较是相同的. 所以 T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, T_{zz} 在我们的计算中都可以忽略, 只剩下 T_{rz} . 于是, 本构方程 (7) 可简化为

$$\left. \begin{aligned} T_{rz} &= \tau_y(C) \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + K(C) \frac{\partial u}{\partial z}, & |T_{rz}| &\geq \tau_y, \\ \partial u / \partial z &= 0, & |T_{rz}| &< \tau_y \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中 $\operatorname{sgn}(\partial u / \partial z)$ 对于正的幅角取 +1, 对于负幅角取 -1.

运动方程 (3) 可简化为

$$-(a/h_0)r = \partial T_{rz} / \partial z \quad (11)$$

从方程 (11) 我们可以看到, 由于离心力而产生的运动是离心力和粘性力的平衡. 这一运动是由一个在 r 方向的剪切运动加上一个在 θ 方向的刚体旋转运动组成.

当 Bingham 流体变成固体时, 即, $C \rightarrow C_s$, 塑性粘度 $K(C)$ 和屈服应力 $\tau_y(C)$ 都趋于 ∞ , 如此, 我们假设

$$K(C) = B / (C_s - C) = B \exp(\bar{\alpha} r \Omega t) / (C_s - C_0)$$

这里 B 是一个常数, 当 $t = 0$ 时, $K_0 = K(C_0) = B / (C_s - C_0)$, 如此, $K(C)$ 可写成

$$K(C) = K_0 \exp(\alpha r t) \quad (12a)$$

这里 K_0 是初始塑性粘度, $\alpha = \bar{\alpha}a/h_0$ 是一常数.

同样道理, 我们可将 $\tau_y(C)$ 写成

$$\tau_y(C) = \tau_0 \exp(\beta rt) \quad (12b)$$

这里 τ_0 是初始屈服应力, β 是一常数.

方程 (10), (11), (12a) 和 (12b) 以及边界条件 (5) 和 (6) 的解是

$$\left. \begin{aligned} u &= Re \exp(-\alpha rt) r [\xi^2 - (\xi - z)^2] / 2, & \xi \geq z \geq 0; \\ u &= Re \exp(-\alpha rt) r \xi^2 / 2, & h \geq z \geq \xi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这里 $Re = \rho a h_0 \Omega / K_0$ 是雷诺数, $z = \xi$ 是液体状态和固体状态的交界面

$$\xi = h - \tau_y / r Re \quad (14)$$

因为 ξ 不能是负的, 故流动区域被限制在

$$r \geq \tau_y / h Re \quad (15)$$

为了决定在任何时间 t 的薄膜厚度 h , 在任何固定点 r , 对连续方程 (4) 从 0 到 h 积分, 也就是, 我们对于 z 从 $z = 0$ 到 $z = h$ 积分

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\int_0^\xi u(r, z) dz + \int_\xi^h u(r) dz \right] + \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\xi u(r, z) dz + \frac{\partial}{\partial r} \int_\xi^h u(r) dz = 0 \quad (16)$$

将 (13) 代入 (16), 经过一些推导, 可得薄膜厚度的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha rt}}{Re} \frac{\partial h}{\partial t} + r h \left(h - \frac{\tau_y}{Re r} \right) \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{6} \left(h - \frac{\tau_y}{Re r} \right) \left[4h^2 + h \frac{\tau_y}{Re r} + \left(\frac{\tau_y}{Re r} \right)^2 \right] \\ - \frac{rt}{3} \left(h - \frac{\tau_y}{Re r} \right) \left\{ \alpha h^2 + \left(\frac{3}{2} \beta - \frac{1}{2} \alpha \right) \left[h \frac{\tau_y}{Re r} + \left(\frac{\tau_y}{Re r} \right)^2 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

3 数值解和讨论

我们用差分方法数值计算了偏微分方程 (17). 计算中所用的参数值如下: 圆盘半径 $a = 20\text{cm}$, 薄膜初始厚度 $h_0 = 20\mu\text{m}$, 初始塑性粘度 $K_0 = 1.2\text{g/cm s}$, 密度 $\rho = 1.2\text{g/cm}$, 圆盘的角速度 $\Omega = 3000\text{rpm}$, 薄膜厚度的初始分布 $h(o, r) \equiv 1$. 计算了 $\tau_0 = 0.01, 0.1, 0.2$, 以及 α, β 分别为 0—0.6 的各种情况.

图 1 给出了在 $\tau_0 = 0.01, 0.1, 0.2$ 各种情况下, 薄膜厚度随 r 和各种 t 值变化的曲线. 从图 1 可以看到两种类型的厚度分布.

1) 从情况 $\tau_0 = 0.01$ 和 $\alpha = 0.2, 0.4$ 的图 1(b), (c) 以及情况 $\tau_0 = 0.1, \alpha = 0.6$ 和 $\beta = 0.3$ 的图 1(d) 可以看到, 厚度 h 随 r 的增加而增加. 此计算结果与在电子计算机中使用的磁盘上所做的甩涂实验结果是一致的. 厚度的斜率随 α 的增加而增加.

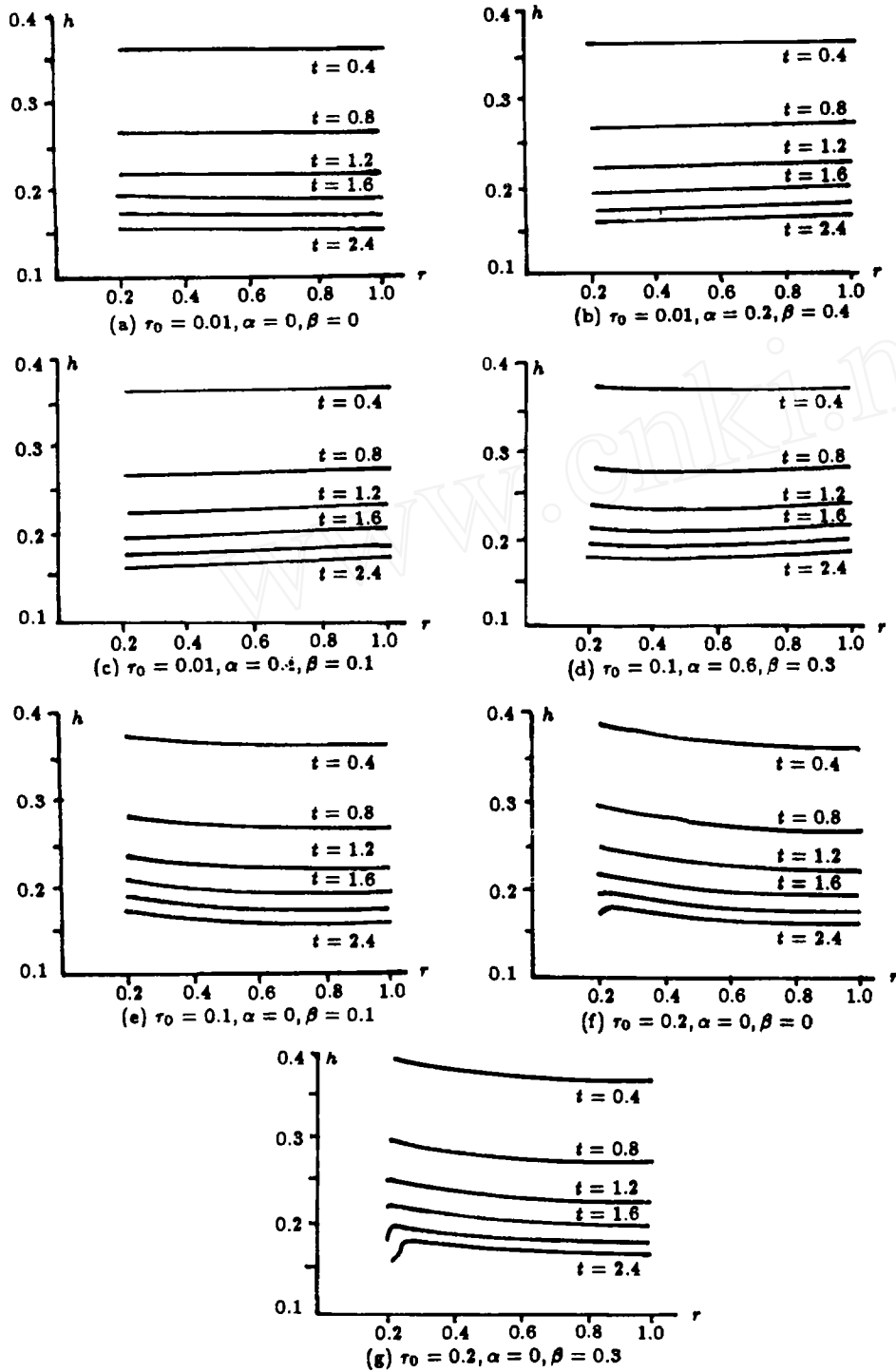


图 1 对于 $\tau_0 = 0.01, 0.1, 0.2$ 和不同的 α, β 值的情况，
 在不同 t 值时，厚度 h 作为 r 的函数
 Fig.1 The thickness h as a function of r for various values
 of t in the case of $\tau_0 = 0.01, 0.1, 0.2$ and various values of α, β

2) 从情况 $\alpha = 0$ 和 $\tau_0 = 0.01, 0.1, 0.2$ 的图 1(a), (e), (f) 可以看到, 厚度 h 随 r 的增加而减少. 此计算结果与 Jenekhe 和 Schuldt^[5] 的实验结果是一致的. 厚度的斜率随 τ_0 的增加而减少.

3) 从情况 $\tau_0 = 0.2$ 的图 1(f), (g) 可以看到, 根据方程 (15) 的限制, β 值被限制在 $\beta < 0.2$.

结论: 流变参数 α 使得薄膜厚度 h 随径向坐标 r 的增加而增加, 即中心薄, 外圈厚. 而初始屈服值 τ_0 正好相反, 它使得薄膜厚度 h 随径向坐标 r 的增加而减少, 即中心厚, 外圈薄. 流变参数 β 对厚度分布的影响较小.

作者十分感谢 C.F. Chan Man Fong 教授, 徐复教授, 谈庆明教授, 朱如曾教授和审稿人对本文的评审, 讨论以及有益的建议.

参 考 文 献

- 1 Emslie AC, Bonner FT, Peek LG. *J Appl Phys*, 1958, 29: 288
- 2 Acrivos A, Shah MJ, Petersen EE. *J Appl Phys*, 1960, 31: 936
- 3 Shiro Matsumoto, Yoichi Takashima et al. *I & EC Fundamentals*, 1982, 21: 198
- 4 CF Chan Man Fong, Cai Fushi, Xu Yuanze. *Acta Mechanica Sinica*, 1987(3): 107
- 5 Jenekhe SA, Schuldt SB, Chen Bng. *Commun*, 1985, 33: 135

NUMERICAL SOLUTION OF THE FLOW OF A BINGHAM FLUID ON A ROTATING DISK

Fan Chun

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Chen Yaosong

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing 100871, China*)

Abstract The equation describing the flow of a Bingham fluid on a rotating disk are derived and the equation of the film thickness distribution is solved numerically using the difference method. Two kinds of thickness distribution have been found. The numerical solutions agree with the experimental result of the magnetic disk used in electronic computers and the result of Jenekhe and Schuldt respectively.

Key words Bingham fluid, flow on a rotating disk, numerical solution