

$M_\infty \rightarrow 1$ 时圆球绕前体流场的数值模拟

郑之初 雷晓晓

中国科学院力学研究所, 北京(邮政编码 100080)

摘要 本文根据来流马赫数 M_∞ 选取坐标变换函数, 将 $M_\infty \rightarrow 1$ 时的低超声速圆球绕流前体流场变换到矩形的计算区域, 忽略粘性影响, 采用时间相关法, 用 TVD 有限差分格式求 Euler 方程的定常解, 得到了 $M_\infty = 1.05$ 、 1.01 和 1.005 的流场分布。结果与弹道靶的实验吻合较好。

关键词 圆球, 低超声速, Euler方程, TVD格式。

引言

许多实际飞行器的头部常采用球体形状, 而 $M_\infty \leq 1.05$ 的低超声速圆球绕流, 由于脱体激波远离圆球, 亚声速流场范围显著增大, 不同作者利用各自的实验设备或计算方法所得到的结果存在着较大的差异, 以至于对流场结构如声速线的形状等还有不同观点^[1]。最近, 文献[1]已计算得到了与实验结果较为吻合的直至 $M_\infty \geq 1.05$ 的前体流场解, 这是一大进步, 但计算 $M_\infty = 1.02$ 时出现了流场参数不再单调变化、收敛速度极慢的情况。本文在文献[1]的基础上对坐标变换函数、计算格式和边界条件的处理都作了较大的改进, 得到了 M_∞ 小到1.005的结果, 并且所得的解是单调变化的, 与实验结果也吻合较好。

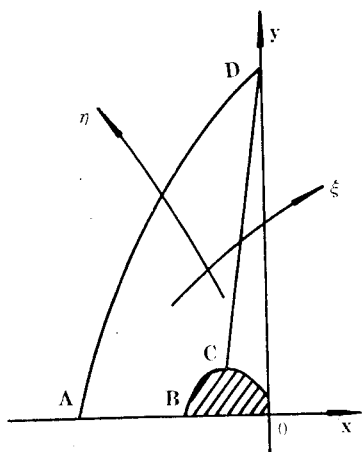


图1 计算流场和坐标
Fig.1 Illustration of coordinate and computational flow field

一、方程及求解

1. 坐标变换

本文中前体流场是指脱体激波到物面之间的流场区域, 并使出口边界位于超声速区。以下的坐标变换函数要求 ξ 坐标线从对称轴 AB 处的直线段变化到出口边界 DC , η 坐标线在物面处与圆球重合, 在来流边界尽量接近脱体激波的形状, 如图1所示, 利用文献[2]中的脱体激波经验公式的基础, 本文公式如下

本文于1994年8月2日收到, 12月20日收到修改稿。

$$\left. \begin{aligned} x &= \eta - 1 - f \sin k \\ y &= f \cos k \\ f &= \eta [(H - \delta) \xi^2 + \delta - 1] + 1 \\ k &= 0.5\pi(1 - \xi) \end{aligned} \right\} (1)$$

其中, H 和 δ 值是根据不同的马赫数选取以控制计算流场范围

2. 基本方程

假设超声速绕球流动是轴对称、非定常和绝热的, 它在 (ξ, η) 平面上的控制方程为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + H = 0 \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Q &= \tilde{Q}/J, \quad F = (\xi_x \tilde{F} + \xi_y \tilde{G}), \quad G = (\eta_x \tilde{F} + \eta_y \tilde{G})/J \\ H &= H/J, \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \\ \tilde{Q} &= [\rho, \rho u, \rho v, e]^T \\ \tilde{F} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u]^T \\ \tilde{G} &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v]^T \\ \tilde{H} &= [\rho v/y, \rho uv/y, \rho v^2/y, (e+p)v/y]^T \end{aligned} \right\} (3)$$

上述变量 ρ 、 u 、 v 、 p 分别是密度、 x 和 y 方向的速度、压力, e 和 t 分别是单位体积的内能及时间

$$e = p/(\gamma - 1) + 0.5\rho(u^2 + v^2) \quad (4)$$

其中 γ 为比热比, 无量纲化特征量为无穷远流处的压力 p_∞ 和声速 a_∞ , 球的半径 R 。

3. 算法

为避免方程中非齐次项的影响, 采用 Strang 型时间分裂格式, 如下所述

$$\left. \begin{aligned} Q_{i,j}^{n+1} &= L_\eta L_\xi Q_{i,j}^n + 2\Delta t H(Q_{i,j}^n) \\ Q_{i,j}^* &= L_\xi L_\eta Q_{i,j}^{n+1/2} \\ Q_{i,j}^{n+2} &= Q_{i,j}^* + \Delta t [H(Q_{i,j}^*) - H(Q_{i,j}^n)] \end{aligned} \right\} (5)$$

其中 L_ξ 和 L_η 分别是逼近一维问题。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0$$

的一维差分算子, $Q_{i,j}^n = Q(i\Delta\xi, j\Delta\eta, n\Delta t)$, $\Delta\xi$ 、 $\Delta\eta$ 和 Δt 分别是 ξ 、 η 方向的空间步长和时间步长。以下以 L_ξ 为例构造 TVD 显式格式, L_η 的公式类似。

设 $A = \partial F / \partial Q$, 其特征值为 $(a^1, a^2, a^3, a^4)^T$, R 是 A 的特征向量矩阵, $RAR^{-1} = A$, $A = \text{diag}(a^1, a^2, a^3, a^4)$, 具体的表达式见参考文献 [3]。定义 $Q_{i+\frac{1}{2},i}$ 为 $Q_{i,i}$ 和 $Q_{i+1,i}$ 的某种对称的平均值, 本文选取最简单的算术平均值形式, 即

$$Q_{i+\frac{1}{2},i} = 0.5(Q_{i,i} + Q_{i+1,i}) \quad (6)$$

$a_{i+\frac{1}{2},j}^l$, $R_{i+\frac{1}{2},j}$ 为 a^l 、 R 和 R^{-1} 在 $Q_{i+\frac{1}{2},j}$ 的值。定义:

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l = \frac{R_{i+\frac{1}{2},j}^{-1}(Q_{i+1,j} - Q_{i,j})}{\frac{1}{2}(J_{i,j} + J_{i+1,j})} \quad (7)$$

为 ξ 方向当地特征量的差。

$$L_{\xi} Q_{i,j} = Q_{i,j} - \lambda_{\xi}(M_{i+\frac{1}{2},j} - M_{i-\frac{1}{2},j}) \quad (8)$$

其中 $\lambda_{\xi} = \Delta t / \Delta \xi$, 数值通量函数 $M_{i+\frac{1}{2},j}$ 的表达式为

$$M_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(F_{i,j} + F_{i+1,j} + \frac{1}{\lambda_{\xi}} R_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_{i+\frac{1}{2},j}) \quad (9a)$$

$\Phi_{i+\frac{1}{2},j}$ 的元素 $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$ 是最早由 Harten^[4] 构造的一种迎风 TVD 格式, 即

$$\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^l = \bar{\psi}(v_{i+\frac{1}{2},j}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l) \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l - g_{i+1,j}^l - g_{i,j}^l \quad (9b)$$

$$v_{i+\frac{1}{2},j}^l = \lambda_{\xi} \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \quad (9c)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l = \begin{cases} \frac{(g_{i+1,j}^l - g_{i,j}^l)}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l} & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l = 0 \end{cases} \quad (9d)$$

限制函数 $g_{i,j}$ 的形式是

$$g_{i,j}^l = S \cdot \max[0, \min(|\tilde{g}_{i+\frac{1}{2},j}^l|, S \cdot \tilde{g}_{i-\frac{1}{2},j}^l)] \quad (9e)$$

$$\tilde{g}_{i+\frac{1}{2},j}^l = \frac{1}{2}[\psi(v_{i+\frac{1}{2},j}^l) - (v_{i+\frac{1}{2},j}^l)^2] \cdot \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \quad (9f)$$

$$S = \text{sign}(\bar{g}_{i+\frac{1}{2},j}^l) \quad (9g)$$

$$\bar{\psi}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & |x| < \varepsilon \\ |x| & |x| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (9h)$$

这里 $\psi(x)$ 是对 $|x|$ 的一种熵修正, ε 为小的正常数。通常 ε 可取 $0.06 \sim 0.25$, 本文取 $\varepsilon = 0.125$ 。

4. 初始条件和边界条件

计算时先假设在驻点附近有一小块亚声速区, 其中流场参数可根据驻点值和正激波后值按一定的关系计算得到, 流场其余部分可假设为来流值。对于超声速情况, 来流边界 DA 按无穷远流参数 p_{∞} 、 ρ_{∞} 、 u_{∞} 、 v_{∞} 给定。

对称边界 AB : 由镜像法求出边界上的值。非齐次项用洛必达法则处理。物面边界 BC : 按 (1) 流线条件, (2) 法向动量方程, (3) 等焓关系求解三对角方程修正。出流边界 CD 上的所有参数均由二阶外插得到。

5. 激波拟合

计算得到的脱体激波是一个较宽的带, 大约跨过四到五个网格, 本文用激波关系式

结合计算得到的流场参数来拟合激波。

二、讨论

本文计算得到了 $M_\infty = 1.05$ 、 1.01 和 1.005 时的圆球绕流前体流场,为了加速迭代,采用了当地时间步长

$$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t}{1 + \sqrt{J}} \quad (10)$$

其中 $M_\infty = 1.05$ 的脱体激波结果与其他作者的数值计算和实验结果比较见图 2, 图 3 给出了 $M_\infty = 1.053$ 时圆球的弹道靶实验照片, 从图中可以看出本文的结果比文献[1]中结果有较大改进, 与弹道靶实验符合较好。图 4 是 $M_\infty = 1.01$ 的计算结果, 图 5 给出了

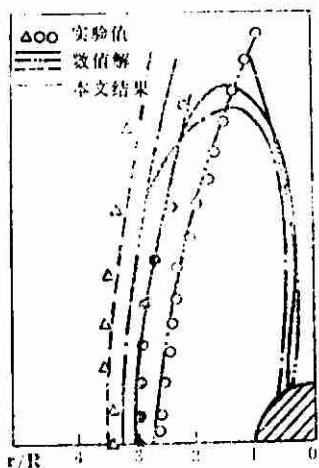


图 2 $M_\infty = 1.05$ 的计算及实验结果
Fig.2 Comparison of result of the current scheme with experimental data ($M_\infty = 1.05$)

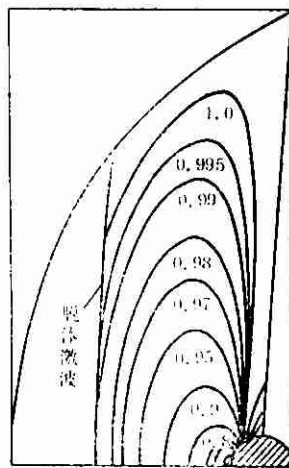


图 4 $M_\infty = 1.01$ 等马赫线和脱体激波
Fig.4 Mach contours and detached shock wave with $M_\infty = 1.01$



图 3 $M_\infty = 1.053$ 的弹道靶实验照片
Fig.3 Photograph of flowfield around a sphere at $M_\infty = 1.053$ on ballistic range

$M_\infty = 1.005$ 时的等马赫数分布、等压力线分布和脱体激波形状。从我们的计算结果来看, 等压力线、等密度线和等马赫数线都比较光滑, 无突变或折线, 即流场参数值是单调连续变化的。当 $M_\infty \rightarrow 1$ 时, 在大的亚声速流场范围内, 流场参数的变化幅度越来越小, 如图 5 (a) 所见, 流场中马赫数从 0.95 到 1.0 几乎与马赫数从 0.0 到 0.95 的距离相同, 所以在计算过程中很容易

由于误差积累导致计算不收敛, 这也正是圆球绕流在 M_∞ 趋近于 1 时的难点所在。本文方法的优点在于克服了这一困难, 得到了 M_∞ 直到 1.005 的前体流场解。

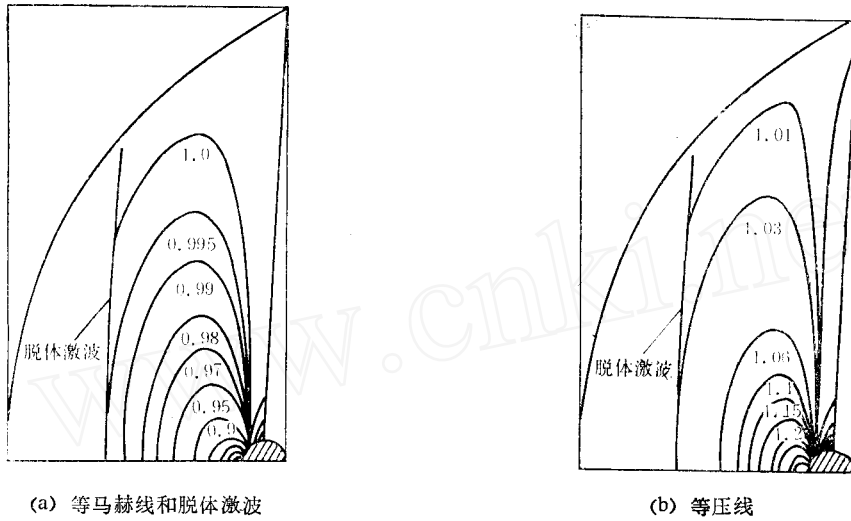


图 5 $M_\infty = 1.005$ 等马赫线、脱体激波和等压线
 Fig.5 Mach contours, detached, shock wave and pressure contours with $M_\infty = 1.005$

本文的数值模拟方法，不但给出了 $M_\infty \geq 1.005$ 的圆球前体流场，在此基础上还可用于半球组合体、球锥组合体等的流场计算。以算得的声速线为初值为粘性后体流场的解奠定基础。

参 考 文 献

- 1 郑之初, 唐安民, 林同骥. 低超声速绕球流动的数值模拟. 中国科学(A辑), 1993, 23(7):725~732
- 2 郑之初. 跨音速下圆球脱体激波. 空气动力学学报, 1984, 1(3):98~103
- 3 Pullian T H, Steger J. Recent Improvements in Efficiency, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms. AIAA Paper 85-0360, 1985.
- 4 Harten A. A High Resolution scheme for the Computation of Weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws, *J. Comput. Phys.*, 1983, 49. 357~393
- 5 Yee H C, Harten A. Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates. AIAA Paper 85-1513, 1985.

Computation for Flow Field About a Sphere When $M_\infty \rightarrow 1$

Zheng Zhichu Lei Xiaoxiao

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science*)

Abstract In this paper, a coordinate transformation was constructed according to M_∞ to convert the forward flow field about a sphere into a rectangular area in the computational plane. Computation has been conducted for the inviscid flow field by solving Euler equations with time-dependent method and total variation diminishing (TVD) finite difference schemes. Flow field for $M_\infty = 1.05, 1.01$ and 1.005 have been obtained and locational of detached shock wave compare well with those obtained in ballistic facilities.

Key words sphere, low supersonic flow, Euler equations, TVD scheme.