

# 材料分叉的数值分析<sup>1)</sup>

黄 涛 李国琛 洪友士 熊电元  
(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要** 通过与解析解法相对比, 本文说明了分析材料分叉时采用数值法的特点. 文中揭示了在单向和弱双向加载条件下材料分叉(平面剪切带和表面皱曲)的一些特征. 单向拉伸的实验表明, 所计算的临界值是合理的.

**关键词** 材料分叉, 剪切带, 表面皱曲, 颈缩, 空洞

## 引 言

韧性材料承受大塑性变形后, 其材料行为和变形模态会发生分叉突变. 金属板材中常见的分叉模态有: 剪切带, 表面皱曲和横向颈缩. 有关的分析方法可参见 Hill 和 Hutchinson<sup>[1]</sup>, Tvergaard<sup>[2]</sup> 和 Li<sup>[3]</sup> 的文章.

本文利用数值方法研究单向和弱双向加载条件下两种材料分叉模态(平面剪切带和表面皱曲). 与解析法相比较, 数值法可以在更广泛的速率扰动分布范围内寻求最低的临界值. 用一种低碳钢板材所做的单向拉伸实验验证了计算临界值的合理性.

## 1 分叉分析的基本方程

已经证明, 固体的稳定性取决于具有势能含义的泛函的二次变分量  $Q^{[4]}$ , 其表达式为

$$Q = \int_V [L^{ijkl} \delta D_{kl} - \sigma^{ik} \delta D_k^j - \sigma^{jk} \delta D_k^i + \sigma^{ik} \delta V^j|_k] \delta V_j|_i dv \quad (1)$$

这里  $\sigma^{ij}$  是 Cauchy 应力,  $\delta D_{kl} = [\frac{1}{2}(\delta V_k|_l + \delta V_l|_k)]$  是变形率的变分,  $L^{ijkl}$  为分叉时刻材料所具有的刚度. 材料分叉发生在稳定限  $Q = 0$ , 同时也是  $Q$  达到驻值的条件.

对于受有空洞化损伤的韧性材料, 引用可膨胀塑性本构方程

$$\frac{D\delta\tau^{ij}}{Dt} = L^{ijkl} \delta D_{kl} \quad (2a)$$

其中

$$L^{ijkl} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{1}{2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + g^{ij}g^{kl} \frac{\nu - E/3E_{tm}^{(p)}}{1 - 2\nu + E/E_{tm}^{(p)}} - \frac{3}{2\sigma_e^2} \frac{E}{E_{te}^{(p)}} \frac{S^{ij}S^{kl}}{2(1+\nu)/3 + E/E_{te}^{(p)}} \right] \quad (2b)$$

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金, 中国科学院基金与中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室联合资助课题.  
1994-10-12 收到第一稿, 1995-09-19 收到修改稿.

$\delta\tau^{ij}$  是 Kirchhoff 应力的一次变分,  $D/Dt$  表示 Jaumann 率,  $g^{ij}$  是度量张量,  $\sigma_e \left[ = \left( \frac{3}{2} S_j^i S_i^j \right)^{1/2} \right]$  是等效应力,  $S^{ij}$  代表应力偏量,  $E$  和  $\nu$  则分别是弹性模量和 Poisson 系数. 在 (2b) 中还有两个可包含损伤因素的参数  $E_{te}^{(p)}$  和  $E_{tm}^{(p)}$ , 它们分别是等效应力 - 应变曲线  $(\sigma_e - \varepsilon_e^{(p)})$  和平均应力 - 应变曲线  $(\sigma_m - \varepsilon_m^{(p)})$  上的切线模量.

## 2 单向加载条件下的材料分叉

图 1(a) 示意了在平板表面上形成的皱曲. 其波长  $L$  小于板厚  $h$ , 即  $h/L > 1$ . 如果  $L$  大于或远大于  $h$ , 则成为颈缩. 图 1(b) 绘制了宽为  $L$  的平面剪切带, 其法线在  $x_\alpha$  方向上. 板沿  $x_1$  轴方向上承受单向拉伸应力  $\sigma_{11}$ .

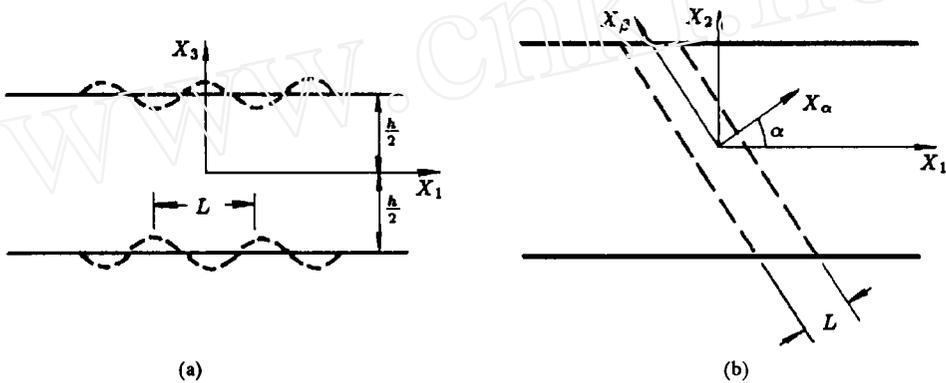


图 1 平板中 (a) 表面皱曲和 (b) 平面剪切带的示意图  
Fig.1 Schematic demonstration of (a) surface wrinkling and (b) shear banding, formed in plane sheet

对于表面皱曲分叉, 速率扰动的波型可设为

$$\left. \begin{aligned} \delta V_1 &= \sin \frac{2\pi x_1}{L} V_1(x_3) \\ \delta V_3 &= \cos \frac{2\pi x_1}{L} V_2(x_3) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

且  $\delta V_2 = 0, \delta V_{1,2} = \delta V_{3,2} = 0$ .

平面剪切带则有

$$\left. \begin{aligned} \delta V_\alpha &= \sin \frac{\pi x_\alpha}{L} V_1(x_3) \\ \delta V_\beta &= \sin \frac{\pi x_\alpha}{L} V_2(x_3) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

且  $\delta V_3 = 0, \delta V_{\alpha,\beta} = \delta V_{\beta,\beta} = 0$ . 这里和以后, 在下标前的逗号代表对含有该序号的坐标取导数.  $V_1(x_3)$  和  $V_2(x_3)$  代表沿板厚分布的对称函数.

表面皱曲分叉时所应满足的边界条件有

$$\left. \begin{aligned} \delta V_1 = 0, & \quad \delta V_{3,1} = 0, & \text{在 } x_1 = 0 \\ \delta V_3 = 0, & \quad \delta V_{1,3} = 0, & \text{在 } x_3 = 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \delta \dot{T}_{11} dx_3 = 0, & \quad \int_{-h/2}^{h/2} \delta \dot{T}_{13} dx_3 = 0, & \text{在 } x_1 = L/2 \\ \delta \dot{T}_{33} = 0, & \quad \delta \dot{T}_{31} = 0, & \text{在 } x_3 = h/2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

平面剪切带则应满足

$$\left. \begin{aligned} \delta V_\alpha = 0, & \quad \delta V_\beta = 0, & \text{在 } x_\alpha = 0 \\ \delta V_{\alpha,3} = 0, & \quad \delta V_{\beta,3} = 0, & \text{在 } x_3 = 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \delta \dot{T}_{\alpha\alpha} dx_3 = 0, & \quad \int_{-h/2}^{h/2} \delta \dot{T}_{\alpha 3} dx_3 = 0, & \text{在 } x_\alpha = L/2 \\ \delta \dot{T}_{3\alpha} = 0, & \quad \delta \dot{T}_{33} = 0, & \text{在 } x_3 = h/2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $\delta \dot{T}_{ij}$  表示名义应力率的变分.

分叉前, 材料处于平面应力状态且只有  $\sigma_{11} \neq 0$ , 其他各应力分量均为零.

将 (3) 或 (4) 式代入 (1) 式, 并用差分将其中的  $V_1(x_3)$  和  $V_2(x_3)$  离散化, 经积分即可得到  $Q$  的具体表达式. 再利用  $Q$  的驻值条件就能求解分叉问题. 有关方法与 Li<sup>[3]</sup> 所介绍过的相类似.

取分叉时的材料参数  $\nu = 0.3$ ,  $E_{tc}^{(p)}/E = 0$ ,  $\varepsilon_y = 0.002$  (屈服应变) 又  $E/E_{tm}^{(p)} = 60, 80$  或  $100$ , 计算的临界应力值均列在表 1 中. 它们都是随  $h/L$  变化所得到的最低  $\sigma_{cr}$  值, 括号中列出了相应的  $h/L$  范围. 计算时, 在板的半厚区间内取了约 50 个差分间隔, 并用 100 个差分离散化做了校核.

表 1 临界应力  $\sigma_{cr}/\sigma_y$  ( $\nu = 0.3$ ,  $\varepsilon_y = 0.002$ ,  $E_{tc}^{(p)}/E = 0$ )

Table 1 The critical stresses  $\sigma_{cr}/\sigma_y$

$E/E_{tm}^{(p)}$	$\sigma_{cr}/\sigma_y$			
	surface wrinkling		plane shear banding	
	numerical	analytical	numerical	analytical
60	2.733( $h/L = 4 \sim 10$ )	2.750(25~35)	2.750	2.750
80	2.058( $h/L = 4 \sim 12$ )	2.065(25~35)	2.068	2.068
100	1.651( $h/L = 3 \sim 6$ )	1.657(25~28)	1.657	1.657

为了对比, 由解析法所求得的结果<sup>[4,6]</sup>也列在表 1. 对于表面皱曲, 由于数值方法能提供更大的自由度, 比之解析法所设定的分布函数能更好地模拟扰动波型, 从而可以导出更低的临界应力. 但解析法能为平面剪切带提供较精确的扰动波型, 当  $h/L=1000$  时两种计算方法所得的临界应力值在四位有效数字上相一致.

表征表面皱曲扰动的  $V_2(x_3)$  函数值在表面 ( $x_3 = h/2$ ) 达到最大但在靠近中面 ( $x_3 = 0$ ) 趋于零. 与此相反, 平面剪切带的最大  $V_2$  值在中面而在达到表面时成为零. 图形从略.

在求解表面皱曲分叉时, 需要注意最大的  $V_2(x_3)$  值与最大的  $V_1(x_3)$  之间的比值, 即

$$\rho = (V_2)_{\max}/(V_1)_{\max} \quad (7)$$

$\rho$  值对于所选取的  $h/L$  范围很敏感. 当  $h/L < 3$  时  $\rho < 0.03$ , 这表明表面的横向皱曲很小, 微不足道. 但若  $h/L > 7$ , 则扰动分布出现振荡, 没有合理的波型. 仅在  $3 < h/L < 7$  范围内才有光滑的波型且  $\rho > 0.10$ . 由此说明, 计算临界应力时, 不仅需要顾及其相应的扰动波型以明确分叉的类型, 也要考虑到模态分布的合理性.

### 3 弱双向加载条件下的材料分叉

由于材质的不均匀性或加载约束的作用, 在板平面内会造成实际受力的非理想性. 在名义上为单向拉伸条件下, 平板中心区域会有微弱的双向受力情况. 以下来分析这类弱双向加载对材料分叉的作用.

数值分析时, 只要注意到分叉前的应力状态是双向的 ( $\sigma_{22} \neq 0$ ), 其他均与前面相同.

令

$$B = \sigma_{22}/\sigma_{11} \quad (8)$$

其大小反映了加载的双向性程度. 为简化计算, 假设分叉前符合塑性比例加载条件即  $B$  值保持不变.

取  $\nu = 0.3$ ,  $E_{te}^{(p)}/E = 0$ ,  $\varepsilon_y = 0.002$ ,  $E/E_{tm}^{(p)} = 100$  计算在弱双向加载条件下的平面剪切带状分叉时的临界应力 ( $h/L = 1000$ ). 结果用虚线表示在图 2. 比较图 2(a) ( $B=0.02$ ) 和图 2(b) ( $B=0.05$ ) 可见, 随着  $B$  值的增大 (虽然其绝对值仍然很小), 剪切带的临界应力值急速增大而让位于其它模态的分叉. 图中用实线表示了表面皱曲的临界应力随  $h/L$  的变化.  $B$  值愈小, 实线的波折幅度也愈缩小.  $B=0$  (图省略) 时, 实线趋于与  $h/L$  无关的直线并与代表剪切带的虚线基本重合. 虽然这里用的是分叉前为平面应力状态, 其基本趋势与 Tvergaard<sup>[2]</sup> 用平面应变加载条件和 Gurson<sup>[5]</sup> 模型所得结果相一致.

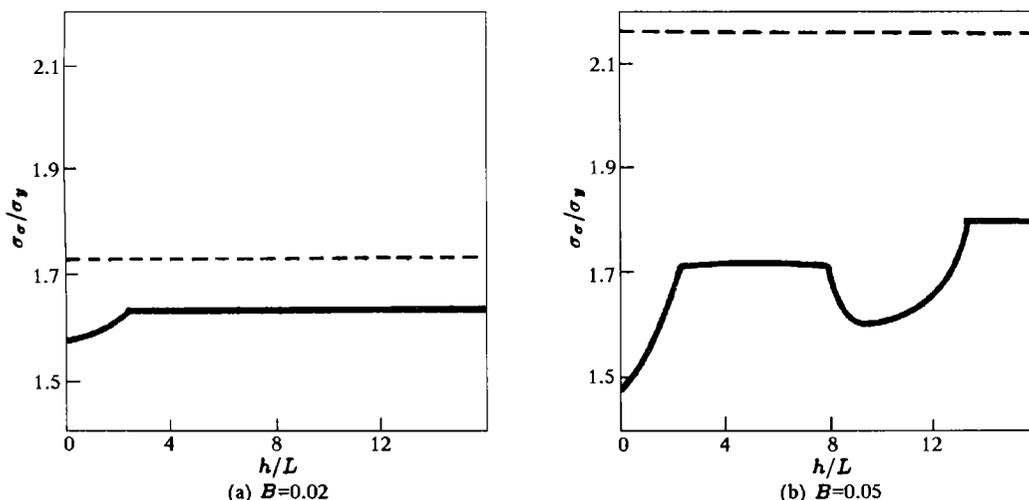


图 2 表面皱曲临界应力  $\sigma_{cr}/\sigma_y$  随  $h/L$  的变化 (虚线为剪切带的临界值)

Fig.2 The critical stresses  $\sigma_{cr}/\sigma_y$  calculated for surface wrinkling as a function of the parameter  $h/L$

有两点值得提出：随着  $B$  值的增大，一种穿透板厚的横向剪切带会先于其他而出现 (参见文献 [4] 第 11 章)，本文未予讨论。再者，图 2 中的实线似乎表明颈缩型分叉应占主导地位，因为在  $h/L = 0$  处对应着最低的“临界应力”。但事实上，此时的横向扰动与平面内扰动之比值  $\rho$  (见式 (7)) 还不足 0.01，十分微弱。只有当  $h/L$  值增大且在一定范围内才具有明显的横向扰动而成为表面皱曲。若有缺陷诱导就当另议。

以上分析表明，在微弱双向加载条件下，临界应力具有不确定性的特点，又分叉模态出现有多重性。由此可以推测到实际临界应力值必将受制于客观存在的不均匀性 (材料，几何，受力) 的导向。由此不难理解，名义上的单向拉伸实验结果往往会低于理论预测值。

### 4 实验分析

选择一种  $A_3$  钢作单向拉伸试件。其化学成分为：0.09 碳，0.25 硅，1.32 锰，0.02 磷，0.011 硫，0.065 氧，0.008 氮 (以上均为重量百分数)，其余是铁。屈服应力  $\sigma_y = 310\text{MPa}$ ，屈服应变  $\epsilon_y = 0.0015$ 。实验方法与前文相类似 [6,7]。

图 3 记录了各个分离试件的宽度和厚度收缩率  $W/W_0$  和  $h/h_0$  随名义应变  $\Delta L/L_0$  的变化。每个实验点代表某一试件被拉伸到该名义应变后卸载取下所测量的结果。以后各图中数据也是如此。这里，板厚  $h$  相对初始值  $h_0$  的减薄速度明显地低于板宽  $W$  的状况，且厚度颈缩的转折点也不明确。这些特点都与以前所观测的双相钢行为 [6,7] 不同。

对卸载后的试件逐个剖开制样，测量和统计其内部的空洞体积百分比  $f_v$ ，可得到  $f_v$  与  $\Delta L/L_0$  的关系，如图 4 所示。利用切线相交的办法可以找到转折点处在  $\Delta L/L_0 = 0.265$  (相当于真实等效应变  $\epsilon_e = 0.335$ )。

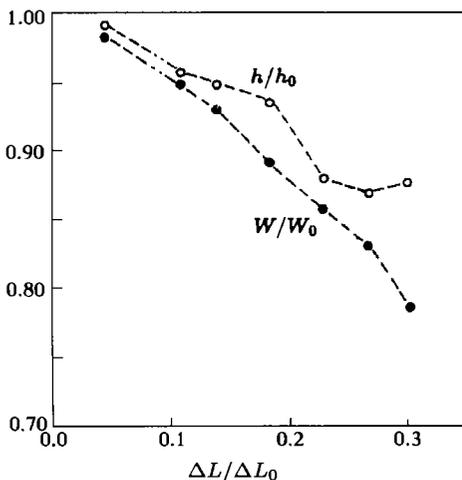


图 3 单向拉伸时宽度收缩率  $W/W_0$  与厚度收缩率  $h/h_0$  随名义应变  $\Delta L/L_0$  的变化  
Fig.3 The contractions of the width  $W/W_0$  and of the thickness  $h/h_0$  with respect to the nominal strain  $\Delta L/L_0$  under uniaxial tension

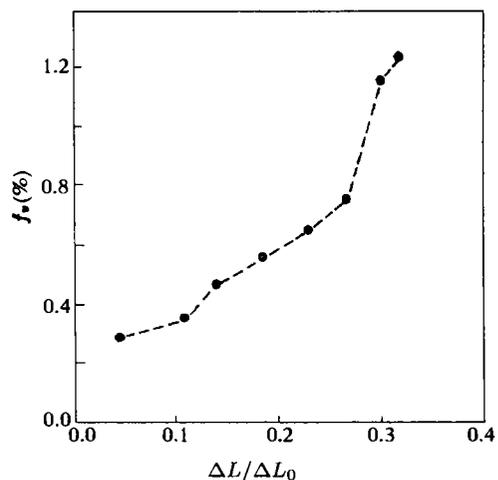


图 4 空洞体积百分比  $f_v$  随名义应变  $\Delta L/L_0$  的变化  
Fig.4 The variation of void volume fraction  $f_v$  versus the nominal strain  $\Delta L/L_0$

在许多情况下，实验现象是渐变演化的且可观察到的又仅是试样表面的。这就给实际确定分叉的临界点带来困难。根据文献 [6]，剪切带状分叉将激发高三轴张力，促使空洞化加剧。据此将分叉点定在实测空洞化快速转折处是有理论依据的。此外，还可兼顾其他，

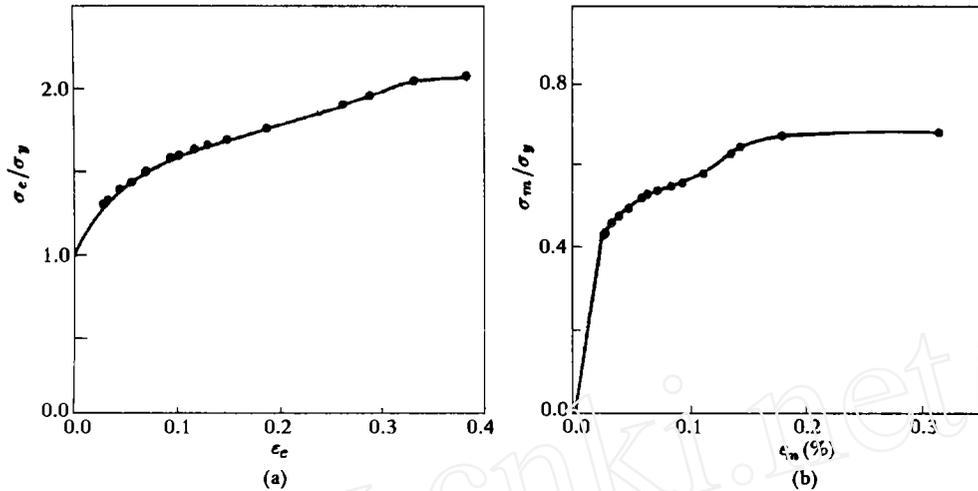


图 5 A<sub>3</sub> 钢的 (a) 等效应力 - 应变和 (b) 平均应力 - 应变的测定曲线

Fig.5 (a) The equivalent stress-strain curve and (b) the mean stress-strain curve, tested for a A<sub>3</sub> steel

例如, A<sub>3</sub> 钢在  $\Delta L/L_0 = 0.265$  ( $\epsilon_e = 0.335$ ) 处的真应力  $\sigma_e (= \sigma_{11})$  也达到了最大值 (参见图 5(a)). 由此确定实验临界应力  $\sigma_t = \sigma_{cr}/\sigma_y = 2.01$ .

与前报导相似<sup>[6,7]</sup>, 利用所测定的宏细观数据可以绘制等效应力 - 应变和平均应力 - 应变曲线 (图 5(a) 和图 5(b)). 由此可确定各拉伸阶段上的切线模量  $E_{te}^{(p)}$  和  $E_{tm}^{(p)}$  (用于 (2b) 式). 在实验临界点处 ( $\Delta L/L_0 = 0.265$ ), 可以得到

$$E_{te}^{(p)}/E = 6.5 \times 10^{-4}, \quad E/E_{tm}^{(p)} = 114$$

据此, 可以计算表面皱曲和平面剪切带的临界应力  $\sigma_w$  和  $\sigma_s$ , 除以屈服应力  $\sigma_y$  后, 列在表 2 并与实验值  $\sigma_t$  相比较.  $\sigma_s$  略高于  $\sigma_w$ , 但二者很接近, 它们都高于  $\sigma_t$ , 这是前一节的分析已预料到的. 由于不同模式的分叉应力十分接近, 有些扰动又始于板材内部, 因此实验仅能检验临界应力值而不能确定其分叉模式.

表 2 A<sub>3</sub> 钢板的临界值

( $\nu = 0.3, \epsilon_y = 0.0015, E/E_{tm}^{(p)} = 114, E_{te}^{(p)}/E = 6.5 \times 10^{-4}$ )

Table 2 The critical values of a A<sub>3</sub> steel plate

$\sigma_w$ (surface wrinkling)	$\sigma_s$ (plane shear banding)	$\sigma_t$ (tests)
2.12	2.13	2.01

## 5 结 论

本文利用数值方法研究了单向和弱双向平面应力加载条件下的表面皱曲和平面剪切带两种模式的分叉. 结合实验, 得出以下结论:

1) 对比解析解法与数值方法, 可以看出后者在求解分叉问题中的优越性. 它无需事先设定沿板厚方向的扰动分布, 可以提供更大的自由度以模拟各类模式, 从而可导出更低的临界应力值.

2) 单向平面应力加载条件下, 表面皱曲的临界值略低于平面剪切带的值. 二者虽高于实验值, 但是处在合理偏差范围内.

3) 微弱的双向加载会使平面剪切带的临界值升高, 从而让位于表面皱曲. 但后者仅出现在一定  $h/L$  范围内. 如有几何的或其他缺陷的诱导, 颈缩也有可能. 这就带来分叉模态的多重性和临界应力值的不确定性.

### 参 考 文 献

- 1 Hill R, Hutchinson JW. *J Mech Phys Solids*, 1975, 23: 239
- 2 Tvergaard V. *J Mech Phys Solids*, 1982, 30: 399
- 3 Li Guochen. *Acta Mechanica Sinica* (English edition), 1990, 6: 22
- 4 李国琛, M 耶纳. 塑性大应变微结构力学. 北京: 科学出版社, 1993
- 5 Gurson AL. *J Eng Mat Technol*, 1977, 99: 2
- 6 李国琛, 朱辰. 力学学报, 1994, 26: 31
- 7 Zhu C, Hong YS, Li GC. *Materials Science and Technology*, 1993, 9: 1037

## NUMERICAL ANALYSIS FOR MATERIAL BIFURCATION

Huang Tao Li Guochen Hong Youshi Xiong Dianyuan  
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, China*)

**Abstract** By comparing with the results given by analytic method, the advantages of employing numerical method to analyse material bifurcations are displayed in this paper. Under the loading conditions of uniaxial and slightly biaxial tension, the characteristics of material bifurcations (plane shear banding and surface wrinkling) are demonstrated. Uniaxial tension testings justify that the critical stresses given by calculations are reasonably fair.

**Key words** material bifurcation, shear band, surface wrinkling, necking, void