

采用边界积分方程方法识别裂纹 的一种优化算法*

陈卫江 柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

提 要 本文使用边界积分方程方法(BEM)与迭代优化技术,建立了一种以静态边界位移测量为补充信息的裂纹识别方法,迭代中正问题的求解,采用了作者提出的高精度边界积分方程算法,结果表明在测量点充分、选位合理的前提下,该方法具有收敛快、识别精度好的特点。

关键词 裂纹识别, 边界积分方程, 迭代优化, 位移测量

一、引 言

裂纹和缺陷识别是固体力学反问题的一个重要课题,其理论和应用价值十分明显,近年来受到学术界的广泛关注^[1,2,3]。由于反问题在描述方法和研究手段上都有其自身的特点,加之反问题的高度非线性和解答的不适定性,其求解难度远远超过了正问题,目前还缺乏系统和完备的理论,各类方法均在探索之中。裂纹识别在反问题中属于未定内边界问题,目前流行的方法主要有两类,其一是基于解析与半解析公式直接求解和反演(如BORN近似法)^[4];其二则是以正问题的求解方法为基础,通过迭代优化的方法加以求解。比较而言,前一种方法效果好,但难度极大,而后一种方法需要耗费大量机时,但随着计算机技术的迅猛发展,这类方法有明显的发展前景。Kubo^[1]曾由电动势满足的Laplace方程出发,探讨了基于边界势函数测量的识别方法;Tanaka^[2]、Nishimura^[3]则以稳态波动方程理

* 自然科学基金资助项目

本文收稿日期: 1995年11月

论为基础作了研究,他们在方法上都取得了一定的进展。本文以迭代优化技术为基础,迭代过程中正问题的求解,使用了作者提出的新型BEM 算法^[5],有效减小了迭代中的累积误差,提高了识别精度,算例表明本文方法是成功的。

二、正问题的求解方法

使用优化方法解反问题,首先要以正问题的计算方法为基础,而且正问题解法必须具有精度高,适于一般问题的特点。为此,本文使用了作者在文[5]中提出的一种BEM 算法。

对于如图 1 所示的平面裂纹问题,如果裂纹的位置、几何尺寸及边界条件事先已知,要求位移场和应力场,则此问题属于标准的正问题,区域内的位移场可由 Somigliana 公式得到^[5]。

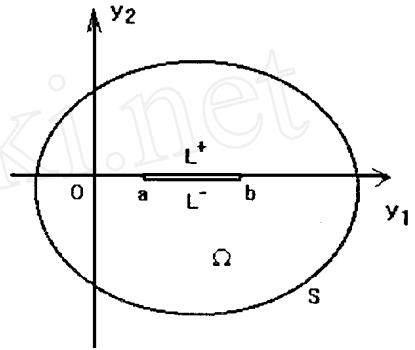


图 1 平面裂纹问题

$$u_k(y) = \int_s [t_i(h)U_{ik}(h,y) - u_i(h)T_{ik}(h,y)]ds(h) - \int_a^b \int_{n_1}^b T_{ik}^+(h^*,y)dh^* \int_{n_1}^b \mathcal{D}u_{i,1}(h_1)dh_1 \quad (1)$$

其中, u_{ik} 和 T_{ik} 是 Green 基本解, 和 $u_i(\eta)$ 分别是外边界 S 上的牵引力和位移, $u_{i,1}(\eta)$ 是裂纹上的位错密度。这表明当所有边界上的位移和力已知时,由(1)即可得到解答。为了确定边界上的未定位移或力,作者在文^[5]中导出了如下混合型边界积分方程。

$$\frac{1}{2}u_k(y) = \int_s [t_i(h)U_{ik}(\eta,y) - u_i(\eta)T_{ik}(\eta,y)]dS(\eta) - \int_a^b \int_{n_1}^b T_{ik}^+(\eta,y)d\eta \int_{n_1}^b u_{i,1}(\eta)d\eta, \quad (2)$$

$$k = 1, 2, \quad y \in S$$

$$\int_s [t_i(\eta)T_{ki}^+(\eta,y_1) + K_{ii}(\eta,y_1)u_i(\eta)]dS(\eta) + \frac{A}{\pi} \int_a^b \frac{u_{k,1}(\eta)}{n_1 - y_1} d\eta = q_k(y_1)$$

$$k = 1, 2, \quad y_1 \in (a, b)$$

其中 $A = \mu/2(1-\nu)$, $q_k(y_1) = \sigma_{k2}|_{L^\pm}$ 是裂纹面上的载荷,方程(2)属于混合型,其中外边界 S 上为常型边界积分方程,而裂纹线 (a, b) 则有 Cauchy 型奇异积分方程,此组方程可结合使用边界元及奇异积分方程算法,离散为一组线性方程的求解,详细过程这里不再罗列^[5]。应该特别指出的是,这种方法与常规边界积分方程方法不同,它不仅避免了沿裂纹线切割处理的不便^[2,3,6],而且求解精度容易控制,更适用于反问题。

三、裂纹识别的迭代优化方法

图1所示的问题中,如果裂纹的位置和几何尺寸事先未知,需要通过某种测量信息来

识别,这就是裂纹识别反问题。一般讲直接由上节给出的积分方程解此反问题,则解答通常是不唯一的,并且此反问题属于高度非线性的。为了避免这些困难,本文采用了间接法,以部分边界上的位移测量作为补充信息,也就是说,在外部边界上除了已知常规的边界条件外,部分边界上的位移与力的边界条件同时已知,即在部分边界上给定“超定边界条件”。求解上以正问题的BEM算法为基础^[5],采用了迭代优化方法,使计算得到的位移与测量的位移在最小二乘的意义下充分吻合,由此识别未知的裂纹,方法具体说明如下:

假定未定裂纹是直线型,则只需四个优化参数 $\bar{\xi} = (x_0, y_0, \alpha, \alpha_0)$, 其中, (x_0, y_0) 为裂纹中心的坐标, α 是裂纹与水平方向的夹角, α_0 则是裂纹半长, 目标函数则取为:

$$W = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 [u_i(k) - \bar{u}_i(k)]^2 \quad (3)$$

其中, N 为外边界位移测量点的数目, $\bar{u}_i(k)$ 是经测量得到的已知位移, $u_i(k)$ 则是给定优化参数 $\bar{\xi}$ 后, 经计算得到的测量点处的位移。

很明显此时反问题就归结为寻求最佳参数 $\bar{\xi}$, 使目标函数 W 取最小, 目标函数的无量纲形式本文选为

$$Z = W / \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 \bar{u}_i^2(K) \quad (4)$$

优化过程中, 参数 $\bar{\xi}$ 按以下方式作修正迭代,

$$\bar{\xi}^{n+1} = \bar{\xi}^{(n)} + \bar{l}d^{(n)} \quad (5)$$

其中, l 为优化步长, $\bar{d}^{(n)}$ 是第 n 步矢量搜索方向, 可由最速下降法确定^[7]:

$$\bar{d} = - \frac{\text{grad}W}{|\text{grad}W|} \quad (6)$$

式中, $\text{grad}W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_0}, \frac{\partial W}{\partial y_0}, \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \frac{\partial W}{\partial \alpha_0} \right)$, 另外本文使用以下判别不等式^[2,7], 作为迭代收敛的标准

$$|Z^{(n)}| < \epsilon_1, \quad |Z^{(n)} - Z^{(n-1)}| < \epsilon_2 \quad (7)$$

其中, ϵ_1, ϵ_2 是给定的正数, 第一式表示无量纲目标函数小于给定尺度 ϵ_1 ; 第二式则表示收敛的一致性条件。

以下给出使用优化技术和边界元方法识别单根裂纹的几个步骤:

第一步: 输入结构的几何与材料参数;

第二步: 选定首次近似的裂纹位置和几何尺寸参数 $\bar{\xi}^{(0)}$;

第三步: 通过边界积分方程及边界法计算取定参数 $\bar{\xi}^{(n)}$ 时, 由(4)所定义的目标函数 $Z^{(n)}$;

第四步: 计算 $\bar{\xi}_i^{(n)} + \bar{\xi}$ 情况下的目标函数, 并结合第三步的结果, 近似求出方向矢量 $\bar{d}^{(n)}$;

第五步: 在新设计参数 $\bar{\xi}^{(n)} + \bar{l}d^{(n)}$ 下, 求解目标函数 Z^{n+1} ;

第六步: 检查前几步得到的结果是否满足收敛判别不等式(7), 如果结果收敛, 则迭代结束,

不然则以修正的新参数 $\bar{\xi}^{(n+1)}$ 返回第三步。

四、算例与分析讨论

本节通过数值模拟考证了上述裂纹识别方法的有效性,并对结果作了讨论。材料参数统一取为: $\mu = 8 \times 10^{10} \text{Pa}$, $\nu = 0.29$, $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$, 结构的尺寸如图 2 所示, 其中裂纹的位置大小是未知的, 载荷位于右侧边界, 整个边界划分为 30 个单元, 其中上下边界各 10 个, 左右边界各 5 个, 裂纹上取 10 个 Chebyshev 零点, 其中数值模拟测量点取在上侧的 10 个单元中点处。

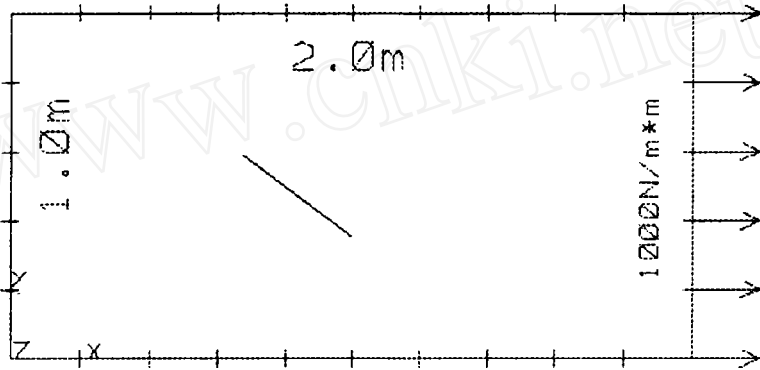


图 2

例 1 矩形中心带一水平裂纹的识别

A、真实裂纹半长为 0.3m

此时, 裂纹相对于整个区域的尺寸是同一量级, 因此裂纹对边界的影响十分强烈, 初始猜测的裂纹与真实裂纹允许有较大的偏差, 而收敛速度仍然很高。图 3 给出了识别图形结果, 表 1 给出了迭代过程中的无量纲目标函数的变化情况。

表 1 情形 A 迭代识别的目标函数值

k	1	2	3	4	5	6
$Z^{(k)}$	$9.3\text{e-}4$	$6.7\text{e-}4$	$5.8\text{e-}4$	$5.0\text{e-}4$	$3.9\text{e-}4$	$2.7\text{e-}4$
k	7	8	9	10	11	
$Z^{(k)}$	$1.6\text{e-}4$	$5.6\text{e-}5$	$1.7\text{e-}5$	$8.9\text{e-}6$	$6.4\text{e-}6$	

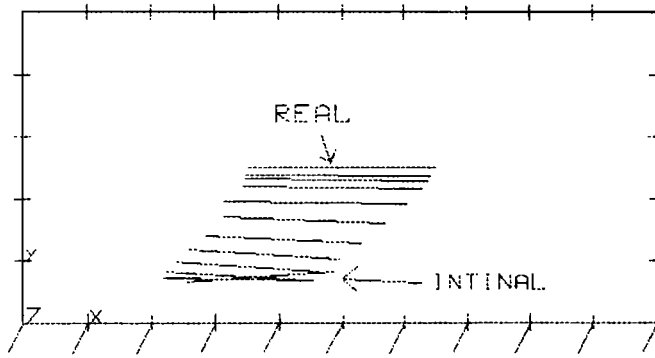


图 3

B、真实裂纹半长为 0.1m

此时, 裂纹尺寸比结构小一个数量级, 因此, 裂纹对边界的影响相对较弱, 收敛速度有所减慢, 加之本文采用了定步长法^[7], 迭代后期目标函数值出现了微小的波动现象, 迭代次数也有所增加。有关结果由图 4 和表 2 给出。

表 2 情形 B 迭代识别的目标函数值

k	1	2	3	4	5	6
$Z^{(k)}$	3.4e-4	6.8e-6	2.7e-6	2.9e-6	2.1e-6	2.4e-6
k	7	8	9	10	11	12
$Z^{(k)}$	1.9e-6	2.2e-6	1.8e-6	2.0e-6	1.7e-6	1.93e-6
k	13	14	15	16	17	
$Z^{(k)}$	1.66e-6	1.9e-6	1.63e-6	1.86e-6	1.59e-6	

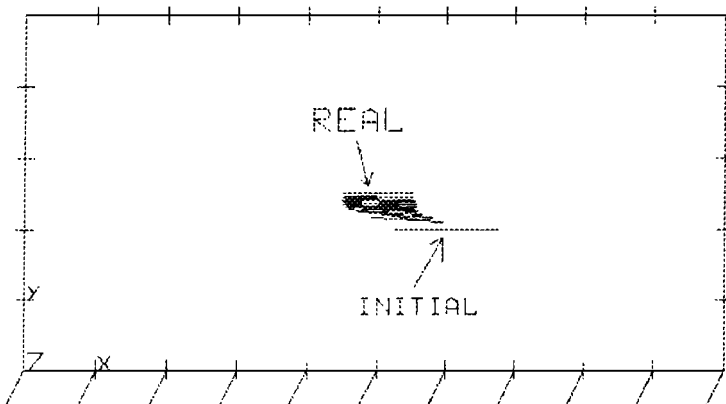


图 4

例 2 矩形中心带一竖直裂纹的识别

这里真实裂纹半长为 0.1m, 因此裂纹对边界影响仍然较弱, 迭代后期目标函数值也

有波动现象,图 5 和表 3 给出了识别结果。

表 3 带竖向裂纹识别的目标函数值

k	1	2	3	4	5	6
$Z^{(k)}$	8.54e-4	6.7e-6	5.3e-6	4.2e-6	3.9e-6	3.6e-6
k	7	8	9	10	11	12
$Z^{(k)}$	3.3e-6	2.95e-6	2.97e-6	2.6e-6	2.45e-6	2.65e-6

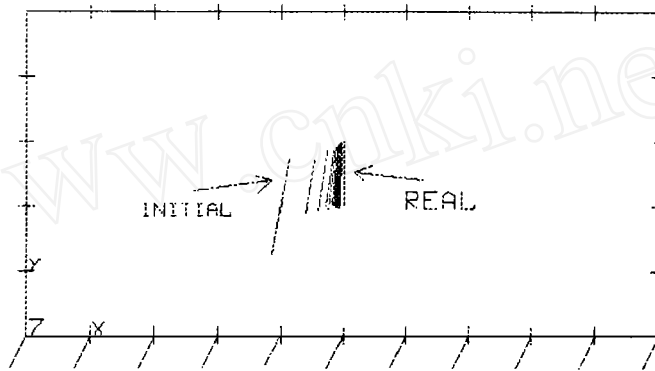


图 5

从上述算例可以看出,本文方法具有良好的识别效果,与文献[1, 2, 3]的类似算例结果比较,从精度上看,当裂纹尺寸较大时,精度大致相当,而当裂纹较小时,本文方法对裂纹初始近似的精度要求相对较弱,而在收敛速度上优于文[1, 2, 3];从测量手段上看,静态位移测量更容易实现。因此,本文方法有一定的实践意义。

另外,根据本文的经验,我们认为可采用以下办法消除解答的不稳定性,以提高识别精度。

- 1、利用现有各种探伤方法和经验,尽可能提高初次近似的准确性。
- 2、裂纹尺寸较小的情况下可增加测量点的数目。
- 3、合理配置测点的位置,在位移梯度变化最大处进行测量。
- 4、同时选取若干组不同载荷作用下的测量结果,作为补充信息。

致谢: 作者感谢中国博士后基金委员会的支持。

参 考 文 献

- 1 S Kubo. Requirements for Uniqueness of Crack Identification from Electric Potential Distributions ICM -90 Satellite Conference Proceedings, O saks, Japan, 1990; 52-58

- 2 M Tanaka, M Nakamura and T Nakano. Detection of Cracks in Structural Components by Elastodynamic Boundary Element Method. *Boundary Elements*, Springer-Verlag, 1990; 12(12): 413-424
- 3 N Nishimura. Regularized Integral Equations for Crack Shape Determination problems. *ICM-90 Satellite Conference Proceedings*, Osaka, Japan, 1990: 59-65
- 4 J E Gubernatis, E Domany and J A Krumhanst. Formal aspect of the theory of the Scattering of Ultrasound by Flaws in Elastic Materials. *J Appl Phys*, 1977; 48: 2804-2812
- 5 陈卫江. 有限平面非对称载荷裂纹问题的边界积分方程方法. *兰州大学学报*, 1994; 30(2): 29-33
- 6 T A Cruse. *Boundary Elements Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Mass
- 7 R L Fox. *Optimization Methods for Engineering Design*, Addison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, 1971: 38-116

AN ITERATIVE OPTM IZATION METHOD FOR CRACK DENTIFICATION IN APPL ICATION OF BEM

Chen W eijiang L iu Chuntu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract In this paper, by applying of the boundary integral equation method and iterative optimization technique, a crack identification method based on the static displacement measurement is given, where the normal problem is solved by author's high precision boundary integral equation method. The results show that the method proposed is of faster convergence and higher identification precision if the measuring points are enough and properly selected.

Key words crack identification, boundary integral equation, iterative optimization, displacement measurement