第13卷 第3期 1995年9月
空气动力学学报 ACTA AERODYNAMICA SINICA
Vol.13, No.3 Sep., 1995

对流场自适应的确定性涡方法*

王东耀
中国科学院力学研究所，北京(邮政编码 100080)
马晖扬 童秉纲
中国科技大学研究生院，北京(邮政编码 100039)

摘要 本文系统地研究了随机走步涡团法所面临的主要问题，以统一的途径构造了自适应涡团模型，粘性扩散的确定性算法及确定边界涡量的新方法，数值结果是令人满意的。

关键词 计算流体力学，涡方法，自适应涡团。 涡流

引 言

涡方法是数值求解不可压缩流动的一类 Lagrange 方法。涡量场被离散为有限个小涡，流体的运动可由这些涡元的相互作用来确定。因此非定常粘性不可压缩流动可以通过模拟涡量场的演化而求得数值解，这对涡量集中在流场一小部分的高 Reynolds 数流动问题有很强的吸引力。另外，作为 Lagrange 方法，涡方法的数值耗散较小，有较好的物理直观性。

Chorin(1973)[1] 提出的随机走步涡团法是涡方法发展史上的一个里程碑，使涡方法成为计算流体力学的一种有效方法。该模型使涡元具有一个有限涡核，以获得较好的数值稳定性。涡团法用分步法求解 N-S 方程，第一步使涡元以当地速度迁移到新的位置；第二步是在涡元的位置上迭加一个随机量以模拟涡量的粘性扩散；第三步是在固壁上产生新涡团以满足粘附条件。该方法简便易行，已取得了很大成功[2,3]，但它的缺点也不能忽视，一是对长时间历程问题，由于涡团的扭曲变形，导致误差的急剧增长；二是用随机走步模拟粘性扩散精度较低；三是用新生涡团处理无滑移边界条件有较高的数值“噪声”。

本文探讨了克服涡方法对长时间历程问题精度较低的途径，构造了对流场结构变化自适应的涡团模型，提出了与自适应涡团及模拟粘性扩散的确定性算法相适应的确定壁面涡量的方法。本文第一节叙述了自适应涡元模型，第二节简述了处理粘性扩散的确定性方法及处理壁面边界条件的方法。

一、自适应涡团

Chorin 的涡元模型是尺度及环量都不变，每个涡元的形函数截断参数都相等的。该

---

* 国家自然科学基金资助项目。
本文于1993年12月28日收到，1994年8月30日收到修改稿。

模型很方便，在短的时间历程内也能获得较高的数值精度，但对较长时间历程问题，涡元的扭曲变形不断严重，精度迅速下降。另外还应注意到，对存在多尺度流动结构的复杂流场，涡元的尺度也应与之相适应。因此我们提出了一个能较好适应流动结构尺度变化的涡元模型。

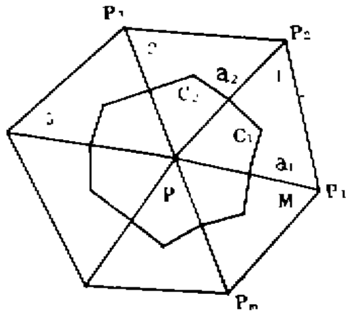


图1 涡元示意图

Fig.1 Sketch map of a vortex element

设将涡量场划分为若干小单元，其中心记为 z_i，$i=1,2,\cdots,N$。以下介绍涡元的构造。设绕某一中心P的相邻单元中心P_1、P_2、…，P_M按逆时针方向围成一个凸多边形，见图1。将P作为共同的顶点，多边形 $P_1P_2\cdots P_MP_1$ 可视为由三角形1，2，…，M按逆时针方向所围。a_i为边 PP_i的中点，c_i为ΔPP_iP_{i+1}的中心，a_ic_i依次相联所围区域定义为以P为中心的涡元。

对二维不可压缩流动，速度场可为

$$\vec{V}(z,t)=(\vec{K}\cdot\omega)(z,t)=\int_{\Omega}\vec{K}(z-z')\omega(z',t)\mathrm{d}z' \qquad (1)$$

其中 $z=(x,y)$，$\vec{V}(z,t)$ 与 $\omega(z,t)$ 分别为速度场与涡量场，$\vec{K}(x,y)=(1/2\pi)\cdot(1/x^2+y^2)(-y,x)^T$ 为卷积核。将涡量场按前述涡元定义离散，记涡元中心为 z_j，面积为A_j，形函数的截断参数为$\sigma_j=A_j^{1/2}$，引入形函数$\phi_\sigma(z)=1/\sigma^2\phi(z/\sigma)$重整涡元的涡量，并以$\vec{K}_\sigma(z)=\phi_\sigma(z)\cdot\vec{K}(z)$代替$\vec{K}(z)$，则涡元轨迹可由下式确定

$$\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}=\sum_j\vec{K}\sigma_j(z_i-z_j)\omega_j(t)A_j(t) \qquad (2)$$

在每一时间步，涡元均以当地速度运动，因而涡元之间的相互位置是可能改变的。为使涡元始终具有最佳的插值性质即严格保证它在任一时刻都是局部最佳的，在每一时间步均由Delaunay三角形确定各涡元的邻近涡元，并由本文涡元定义确定涡元面积、环量、形函数截断参数等。显然，涡元密集区域涡元尺度小而稀疏区域涡元尺度大，涡元尺度的变化能在一定程度上对流场结构尺度的变化具有自适应性，且它本身不包含自由参数。

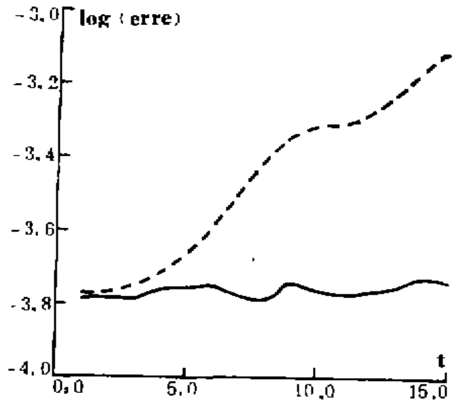


图2 本文涡团模型与Chorin涡团模型的误差比较

Fig.2 The comparison of the errors with respect to the present vortex element model and the one of chorin's

—— 本文 - - - Chorin

用来检验本文自适应涡团模型的是一个光滑涡量分布的问题

$$\omega(r)=\begin{cases}(1-r^2)^3, & r\leqslant 1\\ 0, & r>1\end{cases} \qquad (3)$$

形函数取为 $f_{\sigma}(r)=1-2e^{-r^2/\sigma^2}+e^{-r^2/\sigma^2}$，平均误差定义为

$$\text{erre}=\left[\frac{1}{N}\sum_{i}\left|V_{i,\,\text{comp}}^2-V_{i,\,\text{exac}}^2\right|^2\right]^{1/2} \tag{4}$$

图 2 显示了本文涡团模型与 Chorin 的涡团模型的误差发展。初始离散尺度为 $h=0.125$，$\Delta t=0.5$。结果显示，Chorin 的涡团模型的误差随时间增长很快；而本文的自适应涡团模型的误差基本上取决于离散尺度，除略有波动之外不单调上升，较好地克服了传统涡团模型对长时间历程问题的局限性。

二、确定性方法及固壁边界条件

Chorin[1] 用随机走步法模拟涡量粘性扩散的方法是很方便的，但通常精度较低。因此近年来许多作者力图以确定性的途径处理粘性扩散[4]。另一个难题是无滑移边界条件的处理，Chorin 的新生涡元法虽然方便，但精度较低，且不易与确定性处理粘性扩散的方法相配合。本文在自适应涡元模型的基础上，构造了 Laplace 算子的近似形式，用以确定性模拟粘性扩散；提出由调整壁面及邻近壁面的涡元涡量的方法模拟无滑移边界条件。

由 Gauss 公式及 Green 公式

$$\int_s \nabla\omega \mathrm{d}s=\oint_L \omega\vec{n}\,\mathrm{d}l \tag{5}$$

$$\int_s \Delta\omega \mathrm{d}s=\oint_L \nabla\omega\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l \tag{6}$$

在涡元内取平均值，即 $\vec{f}_i=\frac{1}{A_i}\int_s\nabla\omega\mathrm{d}s$，$g_i=\frac{1}{A_i}\int_s\Delta\omega\mathrm{d}s$，其中 A_i 为涡元面积。作线性插值可得离散形式

$$g_i=\frac{1}{24A_i}\sum_{j=1}^{M}\{[(5f_{ix}+3f_{\mathrm{I}x}+3f_{\mathrm{II}x})(y_{\mathrm{II}}-y_{\mathrm{I}})+(f_{\mathrm{I}x}y_{\mathrm{II}}-f_{\mathrm{II}x}y_{\mathrm{I}})]$$
$$-[(5f_{iy}+3f_{\mathrm{I}y}+3f_{\mathrm{II}y})(x_{\mathrm{II}}-x_{\mathrm{I}})+(f_{\mathrm{I}y}x_{\mathrm{II}}-f_{\mathrm{II}y}x_{\mathrm{I}})]\}_j \tag{7}$$

其中下标 i、I、II 分别表示绕第 i 个涡元中心的第 j 个 Delaunay 三角形的顶点。扩散方程近似为

$$\frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{Re}g_i \tag{8}$$

对时间离散即可求得数值解。详细讨论可见文献[5]。

又由 $\omega=\nabla\times\vec{V}$，则在一个小域 D 上有

$$\int_D\omega\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{9}$$

若 D 域足够小，那么 D 域内的涡量可用平均值近似为

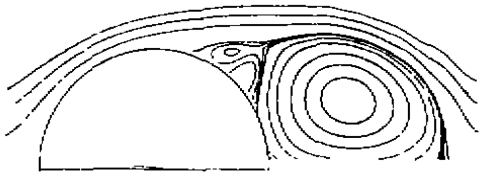
$$\bar{\omega}_i=\frac{1}{A_i}\oint_{\partial D}\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{10}$$

边界约束条件为

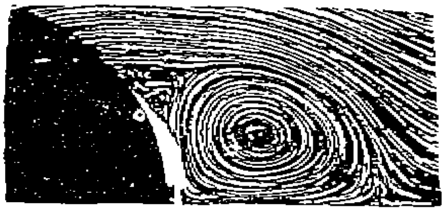
$$\vec{u}(z_s)=\vec{u}_s \tag{11}$$

其中 A_i 为 D 域面积，z_s 为固壁上的点。由(10)～(11)可确定壁面及邻近壁面的涡元涡量。该方法是与前一节叙述的自适应涡团模型一致的。

我们以圆柱瞬时平移问题为算例检验本文方法。这是个很经典的问题，细致的实验结果由 Bouard 等[6] 给出，很多数值方法也以其为算例[7]。我们考察了 $Re=UD/\nu=550$ 的情况，取时间步长为 $\Delta t=1/30$，所得数值解的流线图与实验的流谱符合得很好。$T=5$ 时，两者的比较示于图3，可以看出，数值结果与实验给出的主涡和二次涡都相当一致，说明本文方法是达到了预期目标的。



(a) 本文



(b) Bouard[6]

图 3 圆柱瞬时平移的绕流($Re=550$, $T=5$)

Fig.3 Streamline of flow past an impulsively started circular cylinder ($Re=550$, $T=5$)

三、结 论

本文提出了自适应涡团模型，处理粘性扩散的确定性方法及确定壁面涡量的方法，并进行了数值检验，结果显示该方法较好地解决了用涡方法解长时间历程问题的困难，较满意地模拟了涡量粘性扩散及无滑移边界条件。

参 考 文 献

1 Chorin A J. *J. Fluid Mech.*, 1973,57:380～392
2 Cheer A Y. *J. Fluid Mech.*, 1989,201:485～505
3 Smith P A, Stansby P K. *J. Fluid Mech.*, 1988,194:45～77
4 童秉纲，尹协远.关于涡方法的讨论.空气动力学学报，1992,10:1～7
5 Wang D Y, Tong B G, Ma H Y. Acta Mech. Sinica, 1994,10(2):121～128
6 Bouard R, Coutanceau M. *J. Fluid Mech.*, 1980, 101:583～607
7 Chang C C, Chern R L. *J. Fluid Mech.*, 1991,233:243～263

A Self-Adaptive Deterministic Vortex Method

Wang Dongyao
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science)
Ma Huiyang　Tong Binggang
(Graduate School of University of Science and Technology of China)

Abstract In the present paper main problems of vortex method with random walk are studied systematically, and bring forth a self-adaptive vortex element model, a deterministic scheme for viscous diffusion process and an approach to determine the boundary vorticity. The numerical results are satisfactory.

Key words CFD, vortex method, self-adaptive vortex element.