

⑭ 226-231

第15卷 第2期  
1997年6月空气动力学学报  
ACTA AERODYNAMICA SINICAVol.15, No.2  
Jun., 1997

# 二维Euler方程的非结构网格再生成自适应方法\*

袁礼 傅德薰<sup>△</sup> 马延文  
中国科学院力学研究所, 北京 100080

V211.7

**摘要** 给出了提高二维 Euler 方程定常解质量的非结构网格自适应方法和模拟结果。流场算法为结点型有限体积法和Lax-Wendroff格式。网格用阵面推进法生成, 生成初始网格时使用均匀的直角坐标背景网格。自适应采用再生网格, 但不使用背景网格, 而以流场解的梯度信息来构造再生时所需要的网格尺度参数源项。计算了无粘激波在固壁上的反射、NACA0012翼型跨声速绕流和马赫数为3的前台阶绕流, 自适应效果较好。

**关键词** 非结构网格; 自适应; ~~有限体积法~~; Euler方程

**中图分类号** V211.1

欧拉方程  
~~计算空气动力学~~  
计算空气动力学  
初

## 0 引言

为数值求解绕复杂几何外形的流动, 近年来人们发展了非结构网格方法, 其优点是能处理非常复杂的外形且容易实现自适应。本文对现有的二维非结构网格再生成自适应方法(adaptive remeshing)作了尝试和改进。在三角形网格上采用了结点型的有限体积法<sup>[1]</sup>。网格生成采用阵面推进法<sup>[2]</sup>, 对此法的改进是使用均匀的矩形背景网格。它除了使网格生成中的搜索运算简单外, 还有另一优点, 即如果已知流场概况而无需网格自适应时, 可依靠源项加密它们周围的区域; 如果需要自适应则可提供质量更好的初始网格, 减少以后自适应的次数。对网格再生成的改进, 是取消背景网格, 用源分布代替, 源的网格参数由上一次流场求出。这样做减少了网格再生成的计算量, 并使网格疏密更直接反映流场梯度的影响。

## 1 非结构网格生成方法

选用阵面推进法来生成非结构网格。首先给出描述求解区域边界的点集和它们之间的连接信息, 构成初始阵面, 然后按求解区域内的网格尺度参数分布, 产生新的网格点, 将边界点的连接信息向场内推进, 使阵面从边界推进到场内区域, 直到整个求解区域被三角形网格覆盖为止。最后用Laplacian滤波算子对所得到的网格进行光滑化处理。

\* NNSFC和中国科学院科学与工程计算重点实验室资助项目。  
本文于1995年4月1日收到, 12月15日收到修改稿。

具体的方法和步骤见文献[2]。

在生成边界结点和三角形网格时,需要知道网格尺度参数,而它可从背景网格或源项获得。本文在生成初始网格时利用了均匀的直角坐标背景网格<sup>[3]</sup>。在背景网格区域内分布一些给定网格尺度参数的源项,而背景网格点上的网格尺度参数分布就类似于热源扩散的结果。可用求解带源项的 Poisson 方程得到,满足 Dirichlet 边界条件

$$\nabla^2 S = G \tag{1}$$

式中  $S$  为网格尺度参数,  $G$  为保持某尺度参数的源项,其表达式为

$$G_{i,j} = \sum_{n=1}^N \psi_n (S_{i,j} J_n - I_n) \tag{2}$$

式中  $(i,j)$  代表背景网格节点,  $N$  是源的总数目,  $\psi_n$  是第  $n$  个源的强度因子。对二维问题设源影响随距离平方衰减,则函数  $J_n$  和  $I_n$  定义为

$$I_n = \begin{cases} S_n / r_n^2 & \text{点源} \\ \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} \frac{f(l)}{r(l)^2} dl & \text{线源} \end{cases}, \quad J_n = \begin{cases} 1 / r_n^2 & \text{点源} \\ \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} \frac{1}{r(l)^2} dl & \text{线源} \end{cases} \tag{3}$$

用 SOR 法求解背景网格内结点上的尺度参数分布

$$S_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega) S_{i,j}^n + \omega \left[ (S_{i+1,j}^n + S_{i-1,j}^n + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} (S_{i,j+1}^n + S_{i,j-1}^n) + \Delta x^2 \sum_{n=1}^N \psi_n I_n) \right] / \left( 2 + 2 \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + \Delta x^2 \sum_{n=1}^N \psi_n J_n \right) \tag{4}$$

Dirichlet 边界条件和迭代的初始条件均为

$$S_{i,j} = \sum_{n=1}^N \psi_n I_n / \sum_{n=1}^N \psi_n J_n \tag{5}$$

## 2 Euler 方程在非结构网格上的数值方法

主控方程为二维 Euler 方程。在直角坐标系中,积分形式为

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F n_x + G n_y) dl = 0 \tag{6}$$

式中  $\Omega$  代表任一控制体积,  $\partial\Omega$  为其边界,  $U$  为守恒变量,  $F, G$  为无粘通量,  $(n_x, n_y)$  为边界的单位外法向,  $dl$  为长度。状态变量还满足理想气体状态方程。

采用结点型有限体积法来逼近方程 (6)。变量存放在结点上,控制体积是连接每个结点周围三角形形心和周围棱中点所组成的多边形,如图 1 所示。将积分方程 (6) 式应用于控制体积  $\Omega_i$  得

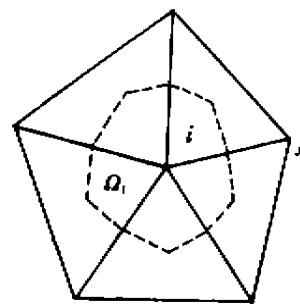


图 1 绕结点  $i$  的控制体

Fig. 1 A control Volume around a node  $i$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i \Omega_i = - \sum_{j=1}^N \oint_{\partial \Omega_{ij}} \bar{F}_{ij} \cdot \bar{n}_{ij} dl = - \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}(U_L, U_R, \bar{n}_{ij}) \quad (7)$$

式中,  $\Omega_i$  是控制体的面积,  $N$  是与控制体中心结点  $i$  相邻的结点数,  $\bar{n}_{ij}$  是结点  $i$  与  $j$  之间边界面的单位外法矢,  $\Phi_{ij}(U_L, U_R, \bar{n}_{ij})$  是边界面的数值通量。取

$$\phi_{ij}(U_L, U_R, \bar{n}_{ij}) = \frac{1}{2} [\bar{F}(U_i) + \bar{F}(U_j)] \cdot \bar{n}_{ij} - D_{ij} \quad (8)$$

其中  $D_{ij}$  为人工粘性通量

$$D_{ij} = (|\bar{V}_{ij} \cdot \bar{n}_{ij}| + \alpha_{ij} |\bar{n}_{ij}|) dl_{ij} [\Delta P_{ij}(U_i - U_j) - \sigma_i (\delta U_j - \delta U_i)] \quad (9)$$

式中  $\delta U_i = \sum_{j=1}^N (U_i - U_j)$ ,  $\sigma_i = \max\left[0, \frac{1}{256} (1 - 2\Delta P_{ij})\right]$ ,  $\Delta P_{ij} = \max(\Delta P_i, \Delta P_j)$ ,

这里  $\Delta P_i$  为 TVD 型的压力开关函数<sup>[4]</sup>,  $\bar{V}_{ij}$  为介面处的流速,  $\alpha_{ij}$  为声速。

时间推进用单步 Lax-Wendroff 格式。对任一结点  $i$

$$\Delta U_i^n = U_i^{n+1} - U_i^n = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_i \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_i \Delta t^2 + o(\Delta t^2) \quad (10)$$

上式第一项由(7)式求出, 第二项按下述公式求出

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)_i \Omega_i = - \oint_{\partial \Omega} (\hat{A} n_x + \hat{B} n_y) \frac{\partial U}{\partial t} dl = - \sum_{j=1}^N (\hat{A}_{ij} l_{xij} + \hat{B}_{ij} l_{yij}) \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{ij} \quad (11)$$

公式(7)和(11)可以用一个以棱的总数目为长度的循环求出, 从而达到并行计算。

### 3 自适应再生成网格

根据已算出的流场, 可以得到再生网格的尺度参数。选用某种关键流场参数的梯度作为误差指示函数<sup>[5]</sup>。只考虑网格大小, 暂不考虑方向性延伸。网格大小由下式求出

$$\delta_i^2 |\nabla \phi|_i = \delta_{\max}^2 |\nabla \phi|_{\max} \quad (12)$$

式中  $\phi$  是所选的关键参数, 这里选为密度。  $\delta_i$  为结点  $i$  处的网格尺度参数。  $|\nabla \phi|$  是  $\phi$  在结点处的梯度, 它可由 Green 定理求出。

每个结点的  $\delta$  求出后, 可以它们为源, 用公式(5)求出任一点的网格大小。再生成网格和生成初始网格的方法和步骤相同, 为减少计算量不用背景网格只用源项。在划分边界点时, 因涉及迭代计算量大, 故只计及边界源的影响。对外流问题, 边界的点源也可用几个给定的源来代替。每自适应一次后,  $\delta_{\max}$  减小 3~4 倍。  $\delta_{\max}$  是决定网格数目的主要参数。在流场光滑区由(12)式算出的  $\delta$  很大, 为此规定一上限  $\delta_{\max}$ 。

每次自适应后的初始流场都由前一次流场插值得到, 流场的梯度特性得到保持, 进一步计算收敛较快。

### 4 算例及讨论

首先计算了典型的平板激波反射问题, 来流马赫数  $M=2.9$ , 入射激波方向和水平方向夹角为  $29^\circ$ 。经过二次自适应后的网格和算出的压力分布分别如图 2(a) 和 (b) 所示。图 3 给出  $y=0.5$  线上的压力分布。与精确解基本符合。图 4 为  $M_\infty=0.75$ ,  $\alpha=2^\circ$  时

NACA0012翼型绕流的自适应网格及流场结果，可见自适应后，激波分辨率显著提高。

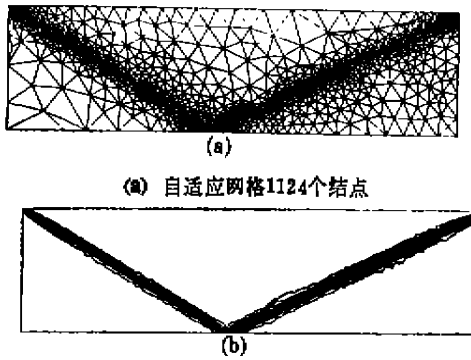


图 2 激波在平面固壁上的反射  
Fig. 2 Shock reflection on a flat plate

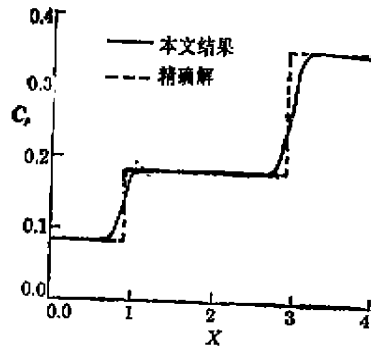
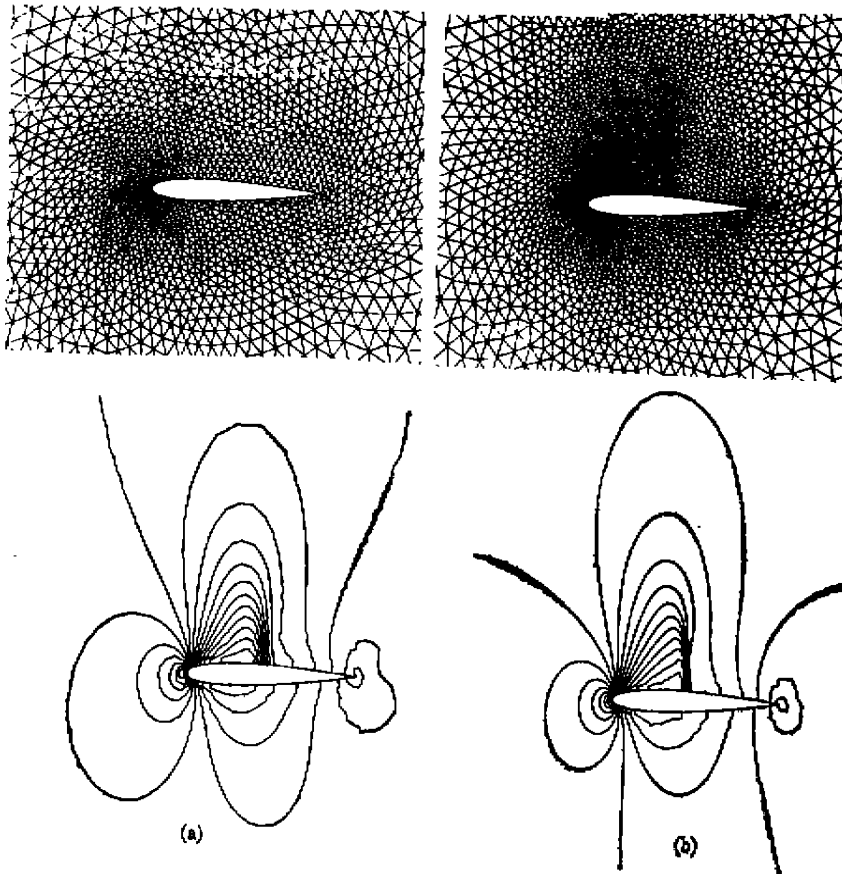


图 3  $y=0.5$  直线上的压力分布  
Fig. 3 Pressure distribution on  $y=0.5$  for shock reflection



(a) 初始网格(2417结点,4734元素)和等密度线分布 (b) 自适应后的网格(4650结点,8916元素)和等密度线分布  
图 4 NACA0012翼型跨声速绕流 $M_\infty=0.75, \alpha=2^\circ$

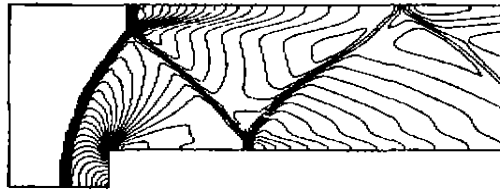
Fig. 4 Transonic flow past NACA 0012 airfoil  $M_\infty=0.75, \alpha=2^\circ$

还对典型的来流马赫数为 3 的前台阶风洞流动作了计算。台阶的拐角是膨胀扇的中心，因而是个奇点。如果不作特殊处理，流过台阶拐角后会在壁面上形成很厚的数值边界层，在台阶上产生虚假的马赫反射。为减小数值误差，采用了文献[6]的特殊处理办法。对

过拐角后台阶上方离壁面最近的一排结点的前几个点重新赋值,压力不变,焓等于台阶前下方第一个结点的焓,这样就修正了密度。用单位质量的总能量不变来修正速度大小,方向不变。

图5(a)是用初始网格的计算结果,可见台阶上仍有较弱的马赫反射。经过一次自适应后的网格和流场分别如图5(b)、图5(c)所示。可见流场大部分间断面都被捕获到,台阶上没有虚假的马赫反射。上壁面的马赫杆长度和位置也更接近于文献[6]的结果。

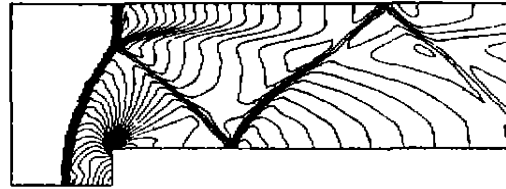
由上述算例可见本文方法的自适应效果基本上令人满意,但模拟强间断和处理几何奇点的能力还需要改进。



(a) 用初始网格计算的马赫数分布(4898结点,9474元素 $\Delta M=0.1$ )



(b) 一次自适应后的网格(5334结点,10330元素)



(c) 自适应后的马赫数分布( $\Delta M=0.1$ )

图5  $M_\infty=3$ 前台阶风洞流动

Fig. 5  $M_\infty=3$  flow around forward-facing step in wind tunnel

## 5 结 论

本文建立了一种二维Euler方程的非结构网格自适应算法。用阵面推进法生成初始网格时使用均匀的直角坐标背景网格,提高了网格质量,网格自适应采用再生网格,但不使用背景网格,而用上一次流场解的梯度信息来构造再生时所需要的网格尺度参数源项。方法具有计算量小、并行度高的优点。通过模拟典型的二维无粘流绕流,显示了方法的有效性,可望发展成实用的方法。进一步的工作是将方法推广到高马赫数流动和三维流。

## 参 考 文 献

- 1 Kallinderis Y, A 3D Finite-Volume Scheme for the Euler Equations on Adaptive Tetrahedral Grids, *J. Comput. Phys.*, 1994, 113: 249~267
- 2 Peraire J, et al, Adaptive Remeshing for Compressible flow Computations, *J. Comput. Phys.*, 1987, 72: 449~466
- 3 Pirzadeh S, Structured Background Grids for Generation of Unstructured Grids by Advancing-Front Method, *AIAA J.*, 1993, 31(2), 257~265
- 4 Swanson R C, Turkel E, On Central-Difference and Upwind Schemes, *J. Comput. Phys.*, 1992, 101, 292~306
- 5 Huang C J, Wu S J, Global and Local Remeshing Algorithms for Compressible Flows, *J. Comput. Phys.*, 1992, 102: 98~113
- 6 Woodward P, Collela P, The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid flow with Strong Shocks, *J. Comput. Phys.*, 1984, 54: 115~173

## An Improved Adaptive Remeshing Algorithm for 2-D Euler Equations on Unstructured Grids

Yuan Li Fu Dexun Ma Yanwen

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080)

**Abstract** An improved adaptive remeshing algorithm for 2-D Euler equations on unstructured grid is presented and some test results are shown. A nodal finite volume method using Lax-Wendroff time stepping scheme is developed on unstructured triangular grid. The grid is generated by the advancing-front method with a modification to the initial background grid. The initial background grid uses uniform Cartesian coordinates so that search work in the triangulation is reduced and the quality of initial unstructured grid is improved. Adaptive remeshing is used to improve the quality of flow solution. However, the grid parameter for regeneration is defined by the parameter sources constructed according to the information on the current flow solution rather than by background grid. The examples include inviscid shock reflection on the wall, transonic flow past NACA0012 airfoils and  $M_\infty=3$  flow around a forward-facing step in wind tunnel. The computational efficiency and adaptive effects are quite good.

**Key words** unstructured grid, adaptive, finite volume method, Euler equations