

集中弯矩作用下圆弧裂纹的弯曲问题

蒋持平

(北京航空航天大学飞行器设计及应用力学系, 北京, 100083)

柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

摘要 Schwarz 对称原理结合复应力函数的奇异性分析的方法, 对于分析集中载荷问题有独特的优越性. 本文利用这个方法研究了任意位置的集中弯矩作用下含共圆圆弧裂纹板的弯曲问题, 获得了一般问题解答, 给出一个实际重要情形的封闭形式解; 最后求得了弯曲应力强度因子公式. 本文公式的特殊情形, 与现有经典结果吻合.

关键词 板弯曲, 圆弧裂纹, 复变函数, 应力强度因子

本文利用对于平面断裂问题所发展的复变-主部分离法^[1-5], 分析在任意位置的集中弯矩作用下含共圆圆弧裂纹板的弯曲问题.

1 基本公式

在极坐标下, 经典薄板理论的弯矩 M_r 和 M_θ , 扭矩 $M_{r\theta}$, 剪力 Q_r 和 Q_θ 能够由两个解析函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 表示^[6]为:

$$M_r + M_\theta = -2D(1 + \nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \tag{1}$$

$$M_\theta - M_r + 2iM_{r\theta} = 2D(1 - \nu)[z\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{i\theta} \tag{2}$$

$$Q_r - iQ_\theta = -4D\Phi'(z)e^{i\theta} \tag{3}$$

其中 $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 表示板的弯曲刚度; h 为板厚; E 为杨氏模量; ν 为泊松比.

现在研究图 1 所示问题. 在无限弹性板中, 沿半径为 R 的圆周分布若干条圆弧裂纹 L_j , 其端点为 a_j 和 b_j , 并设 L 是 L_j 的整体. 一个集中弯矩 $M_i + iM_j$ 作用在板内任意点 z_0 . 无穷远主弯矩为 M_1^∞ 和 M_2^∞ , α 是 M_1^∞ 的主面外法线与 x 轴的夹角.

根据对复应力函数的奇异性分析, 我们有

$$\Phi(z) = \frac{M}{z-z_0} + \Gamma + \Phi_0(z) \tag{4}$$

$$\Psi(z) = \frac{\overline{M}}{z-z_0} + \frac{Mz_0}{(z-z_0)^2} + \Gamma' + \Psi_0(z) \tag{5}$$

其中 $\Phi_0(z)$ 和 $\Psi_0(z)$ 在沿 L 割开的平面内全纯, 在无穷远为零, 且

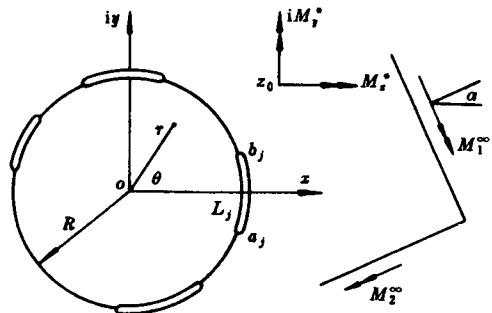


图 1 无限板中共圆圆弧裂纹

• 1994-12-19 收到第 1 稿, 1995-04-03 收到修改稿.

$$M = -\frac{M_1^* + iM_2^*}{8\pi Di} = -\frac{M_1^* - iM_2^*}{8\pi D} \quad (6)$$

$$\Gamma = -\frac{M_1^\infty + M_2^\infty}{4D(1+\nu)} \quad \Gamma' = \frac{M_2^\infty - M_1^\infty}{2D(1-\nu)}e^{-2i\alpha} \quad (7)$$

裂纹面的边界条件能够写为

$$[m(t) + if(t)]^+ = [m(t) + if(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (8)$$

其中 t 表示圆周上的点; 上标 + 和 - 分别表示从圆内和圆外趋于圆周的函数值; $m(t)$ 和 $f(t)$ 分别是边界分布弯矩和等效分布扭矩

$$m(t) = M_r, \quad f(t) = \int_0^t Q_r dt + M_{r0} \quad (9)$$

根据文献[6], 应力边界条件能够由 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 表示:

$$D(1-\nu)[\kappa\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - \bar{t}\overline{\Phi'(t)} - \frac{\bar{t}}{t}\overline{\Psi(t)}] \\ = m(t) + if(t) + D(1-\nu)iH \quad (10)$$

其中 $\kappa = -(3+\nu)/(1-\nu)$; H 在不同的裂纹上 (设有 n 条裂纹) 取不同的实常数 H_1, \dots, H_n . 根据函数 $\Phi(z)$ 中一个虚常数的任意性, 可以取

$$H_1 = 0 \quad (11)$$

此外, 为了唯一确定问题的解, 我们还要利用裂纹面的位移单值条件. 设板的挠度为 w , 则面内位移 u 和 v 可以表示为

$$u = -\delta \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -\delta \frac{\partial w}{\partial y} \quad (12)$$

其中 δ 是板中面出发沿厚度方向的坐标.

在裂纹面, 挠度 w 的位移单值条件为

$$w^+(b_j) - w^+(a_j) = w^-(b_j) - w^-(a_j) \quad j = 1, \dots, n \quad (13)$$

或写成

$$\int_{a_j}^{b_j} w'^+ dt = \int_{a_j}^{b_j} w'^- dt \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

同样地, 对于 u 和 v 有

$$\int_{a_j}^{b_j} (u' + iv')^+ dt = \int_{a_j}^{b_j} (u' + iv')^- dt \quad j = 1, \dots, n \quad (15)$$

在上两式中

$$w' = \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (16)$$

为了求解所论问题, 利用 Schwarz 镜象对称原理引进一个新的解析函数 $\Omega(z)$:

$$\Omega(z) = \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{R^2}{z}\overline{\Phi'\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad (17)$$

反过来, $\Psi(z)$ 也能由 $\Omega(z)$ 和 $\Phi(z)$ 表示:

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{z^2}\Phi(z) - \frac{R^2}{z}\Phi'(z) - \frac{R^2}{z^2}\overline{\Omega\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad (18)$$

注意到在 $z=0$ 的邻域, $\Phi_0(z)$ 和 $\Psi_0(z)$ 能够展开为

$$\Phi_0(z) = A_0 + O(z) \quad \Psi_0(z) = B_0 + O(z) \quad (19)$$

将式(4)和(5)代入(17),可以得出 $\Omega(z)$ 主部和正则部分分离的形式:

$$\Omega(z) = \frac{M}{z - z^*} - \frac{M}{z} + \frac{\bar{M}z^*(z^* - z_0)}{z_0(z - z^*)^2} - \frac{R^2\bar{T}'}{z^2} + C^* + \Omega_0(z) \quad (20)$$

其中 $\Omega_0(z)$ 在沿 L 割开的平面内全纯,在无穷远为零; C^* 为复常数; z^* 为 z_0 对圆周的反射点:

$$z^* = R^2/\bar{z}_0 \quad (21)$$

2 问题的解答

将(18)代入(10)然后再代入(8),我们得到:

$$\begin{cases} \kappa\Phi^+(t) + \Omega^-(t) = iH & \text{在 } L \text{ 上} \\ \kappa\Phi^-(t) + \Omega^+(t) = iH & \text{在 } L \text{ 上} \end{cases} \quad (22)$$

根据文献[7]所提供的方法求解上述函数方程,我们可以求得问题的一般解答;利用问题的一般解答,可以求得某些工程上实际重要问题的封闭形式解.下面给出在任意位置作用集中弯矩的一条圆弧裂纹的解答.

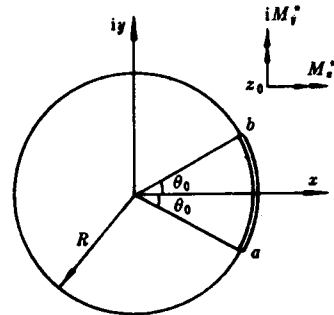


图 2 集中弯矩作用下的圆弧裂纹问题

如图 2 所示,板内有一条圆弧裂纹 \widehat{ab} ,集中弯矩 $M_z^* + iM_z^*$ 作用在任一点 z_0 ,无穷远为均匀应力状态.裂纹尖端 a 和 b 的极坐标为

$$a = R\exp(-i\theta_0) \quad b = R\exp(i\theta_0) \quad (23)$$

按前面所叙述的方法,我们可以求得 $\Phi(z)$ 的封闭形式解

$$\Phi(z) = F(z) - G(z)X_0(z) \quad (24)$$

其中

$$F(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{M}{z - z_0} - \frac{M}{\kappa(z - z^*)} + \frac{M}{\kappa z} - \frac{\bar{M}z^*(z^* - z_0)}{\kappa z_0(z - z^*)^2} + \frac{R^2\bar{T}'}{\kappa z^2} + \Gamma - \frac{C^*}{\kappa} \right] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} G(z) = & \frac{1}{2X_0(0)} \left\{ \frac{M}{\kappa z} + \frac{R^2\bar{T}'}{\kappa z^2} \left[1 - \frac{X'_0(0)}{X_0(0)}z \right] \right\} - \frac{1}{2X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z - z_0} \\ & - \frac{1}{2X_0(z^*)} \left\{ \frac{M}{\kappa(z - z^*)} + \frac{\bar{M}z^*(z^* - z_0)}{\kappa z_0(z - z^*)^2} \left[1 - (z - z^*) \frac{X'_0(z^*)}{X_0(z^*)} \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2}M - \frac{1}{2} \left(\Gamma + \frac{C^*}{\kappa} \right) (z - R\cos\theta_0) \end{aligned} \quad (26)$$

$$X_0(z) = \frac{1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \quad (27)$$

所取单值枝使得

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} zX_0(z) = 1 \quad (28)$$

此外,

$$C^* = \frac{\bar{A}_1 - A_1\bar{A}_2}{1 - A_2\bar{A}_2} \quad (29)$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{M}{z_0} + \frac{M}{\kappa z^*} + \frac{\bar{M}(z_0 - z^*)}{\kappa z_0 z^*} + \Gamma \right] - \frac{1}{2} \frac{X_0(0)}{X_0(z_0)} \cdot \frac{M}{z_0} \\ + \frac{1}{2} \frac{X_0(0)}{X_0(z^*)} \left\{ -\frac{M}{\kappa z^*} + \frac{\bar{M}(z^* - z_0)}{\kappa z_0 z^*} \left[1 + \frac{z^* X'_0(z^*)}{X_0(z^*)} \right] \right\} \\ + \frac{1}{2} M X_0(0) - \frac{1}{2} \Gamma X_0(0) R \cos \theta_0 \quad (30)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\kappa} [1 + X_0(0) R \cos \theta_0] \quad (31)$$

同样我们可以写出 $\Omega(z)$ 和 $\Psi(z)$. 限于篇幅, 这里不再写出.

求得应力函数后, 就可以由公式(1)~(3)求得板的内力场.

3 应力强度因子

在构件的断裂损伤分析中, 应力强度因子的计算占有重要的地位. 参阅文献[8], 板弯曲应力强度因子可以利用 $\phi(z)$ 求得. 为了求图2裂纹尖端 b 的应力强度因子, 我们作如下坐标变换:

$$z = \omega(\bar{z}) = i \exp(i\theta_0) (\bar{z} - iR - \frac{1}{2} R \sin 2\theta_0) \quad (32)$$

或
$$\bar{z} = -i \exp(-i\theta_0) z + iR + \frac{1}{2} R \sin 2\theta_0 \quad (33)$$

这样, 在 \bar{z} 平面上的 x 轴与裂纹相切于端点 \bar{b} (z 平面内点 b 的映照点), 且

$$\bar{b} = \frac{1}{2} R \sin 2\theta_0 \quad (34)$$

在这种变换下, 复应力强度因子公式可以写为:

$$K_1 - iK_2 = -\frac{12\sqrt{2}D(3+\nu)}{h^2} \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{b}} (\bar{z} - \bar{b})^{1/2} \cdot \frac{\phi(\bar{z})}{\omega'(\bar{z})} \quad (35)$$

其中 $\omega'(\bar{z})$ 可由(32)式微分求得:

$$\omega'(\bar{z}) = i \exp(i\theta_0) \quad (36)$$

将解答(24)代入式(35), 可以求得一条圆弧裂纹问题的应力强度因子:

$$K_1 - iK_2 = -\frac{6D(3+\nu) \exp(-\frac{\theta_0}{2}i) \cdot i}{h^2 \sqrt{R \sin \theta_0}} G[\omega(\bar{b})] \quad (37)$$

为了进行对照, 考虑无穷远受均匀弯矩, 即 $M_{\bar{r}}^{\infty} = M_{\bar{z}}^{\infty} = M^{\infty}$ 的情形. 这时

$$M = 0, \quad \Gamma = -\frac{M^{\infty}}{2D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = 0. \quad (38)$$

将式(38)代入式(26), 然后代入式(37), 便得到图2所示裂纹, 仅在远处受均匀弯矩 M^{∞} 的作用时, 裂纹尖端 b 的应力强度因子:

$$\begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases} = \frac{12(3+\nu) \sqrt{R \sin \theta_0}}{h^2 [5+3\nu+(1-\nu)\cos\theta_0]} \begin{cases} \cos \frac{\theta_0}{2} \\ \sin \frac{\theta_0}{2} \end{cases} \quad (39)$$

对于上式取极限: 令 $R \rightarrow \infty, \theta_0 \rightarrow 0$, 但保持 $R \sin \theta_0 = a$, 我们得到

$$K_1 = 6M^{\infty} \sqrt{a}/h^2 \quad K_2 = 0 \quad (40)$$

这正是含长度为 $2a$ 的直线裂纹板, 在无穷远受均布弯矩 M^∞ 的问题的解答, 与文献[8]中的结果一致.

参 考 文 献

- 1 柳春图, 蒋持平. 当前断裂力学发展的几个问题. 见黄克智主编“92 固体力学发展趋势”. 北京: 北京理工大学出版社, 1995: 70—91
- 2 Jiang C P, Liu C T. Stress distribution around a rigid line in dissimilar media. *Engineering Fracture Mechanics*, 1992, 42(1): 27—32
- 3 蒋持平, 柳春图. 圆弧刚性线夹杂问题. 中国博士后论文集第四集, 北京: 北京大学出版社, 1991: 142—151
- 4 Jiang C P, Zou Z Z, Wang D, Liu Y W. A discussion about a class of stress intensity factors and its verification. *Int J Fracture*, 1991, 49(2): 141—157
- 5 刘又文, 蒋持平. 在集中力和集中力偶作用下不同弹性材料圆形界面裂纹问题. *应用数学和力学*, 1987, 8(3): 267—276
- 6 Savin G N. *Stress concentration around holes*. Pergamon Press, 1961
- 7 Мухелишвили 著, 赵惠元译. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1958
- 8 Sih G C, Paris P C, Erdogan F. Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. *J Appl Mech*, 1961, 29: 306—312

THE BENDING PROBLEM OF CIRCULAR-ARC CRACKS SUBJECTED TO A CONCENTRATED MOMENT AT AN ARBITRARY POINT

Jiang Chiping

*(Dept. of Flight Vehicle Design and Appl. Mech.,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)*

Liu Chuntu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

Abstract The method has peculiar advantage by applying extended Schwarz principle integrated with the analysis of the singularity of complex stress functions to solve some problems under concentrated loads. In this paper this method is used to deal with the bending problem of co-circular cracks subjected to a concentrated moment at an arbitrary point. The general formulation of the problem and a closed form solution for a case of practical importance are obtained. The bending stress intensity factors are given, a special case of which is in agreement with the previous result.

Key words plate-bending, circular-arc cracks, complex variable function, stress intensity factors