

交错网格紧致差分格式和满足等价性的 压力 Poisson 方程*

于欣

(中国科学院力学研究所)

A STAGGERED MESH COMPACT DIFFERENCE SCHEME AND A PRESSURE-POISSON-EQUATION THAT SATISFIES THE EQUIVALENCY

Yu Xin

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)

Abstract

(1) A staggered mesh compact difference scheme is presented for solving the unsteady viscous incompressible Navier-Stokes equations. It is fourth order accurate both in the spatial direction and in the time direction, at least third order accurate on the boundary; (2) Describe a pressure-Poisson-equation that is equivalent to the discrete continuity equation provided the discrete momentum equations remain. The discrete continuity equation may have derivative boundary conditions, e.g., the compact difference scheme; (3) A new ADI iterative method is proposed. The pressure-Poisson-equation is in the discrete form. It is difficult to be solved with a usual ADI method. We translate it to be tridiagonal in each spatial direction of each step of the ADI iterations, then add a pseudo time term to get a tridiagonal equation which is easily to be solved; (4) The driven flow in a square cavity with $Re = 10000$ is simulated numerically.

1. 引言

随着电子计算机的发展,越来越多的实际问题数值模拟成为现实,但还有很多非线性问题数值计算时间太长,内存要求过大.数值方法的改进可使计算量和存储量大大减少,例如,对二维非定常问题,要使误差达到 N^{-4} 量级,二阶格式计算点数为 $(N^2)^3$, (包括时间方向),而四阶格式计算点数仅为 N^3 , 差 N^3 倍!而计算量差的倍数更多.当 $N = 16$ 时 $N^3 = 4096$, 当 $N = 256$ 时, $N^3 \approx 1678$ 万.

* 1996年1月26日收到.

紧致差分格式具有精度高, 差分式基点少, (线性) 稳定性好, 对高频波分辨率高, 边界差分点少等优点^[8,1,2,3,5,6,10], 本文中的格式基点数为 3, 内点精度为四阶 (§2.2), 在边界上精度至少是三阶的 (§2.3), 如时间方向用四阶 Runge-Kutta 法 (§2.4), 则总体上就达到了四阶精确度. 本文是 [9] 的修改稿.

2. 四阶精度交错网格紧致差分格式

本节中的紧致差分格式改进了 [1] [2] 中的压力边界处理 (见 (2.14) 式) 及时间导数计算 (见 §2.4), 使得差分格式在空间和时间方向均达到了四阶精确度.

2.1 非定常粘性不可压缩 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) + \nabla p = 0, \quad \Omega, \quad (\text{其中 } \mathbf{A}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nu \nabla^2 \mathbf{V}), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \Omega. \quad (2.2)$$

2.2 二维交错网格上的紧致差分公式

这部分给出求解 (2.1)(2.2) 的空间四阶精度、时间一阶精度的紧致差分格式.

考虑 (2.1)(2.2) 的离散形式

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla_h p^{n+1} = 0, \quad \text{式中 } \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}_h \mathbf{V}^{n+1} = 0, \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{V}^n = (u^n, v^n)$, $\mathbf{A}(\mathbf{V}) = (uu_x + vv_y - \nu(u_{xx} + u_{yy}), uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}))$, $\mathbf{A}_h, \nabla_h, \operatorname{div}_h$ 分别为 $\mathbf{A}, \nabla, \operatorname{div}$ 的离散形式:

(1) $\mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n)$ 中的一阶导数 u_x, u_y 的差分公式形式为:

$$\frac{u'_{i-1,j+\frac{1}{2}} + 4u'_{i,j+\frac{1}{2}} + u'_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{6} = \frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}, \quad (2.5)_1$$

$$\frac{u'_{i,j-\frac{1}{2}} + 4u'_{i,j+\frac{1}{2}} + u'_{i,j+\frac{3}{2}}}{6} = \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta y}. \quad (2.5)_2$$

类似地可得 v_x, v_y 的差分公式,

(2) $\mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n)$ 中的二阶导数 u_{xx}, u_{yy} 的差分公式分别为如下形式:

$$\frac{u''_{i-1,j+\frac{1}{2}} + 10u''_{i,j+\frac{1}{2}} + u''_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{12} = \frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}, \quad (2.6)_1$$

$$\frac{u''_{i,j-\frac{1}{2}} + 10u''_{i,j+\frac{1}{2}} + u''_{i,j+\frac{3}{2}}}{12} = \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{3}{2}}}{(\Delta y)^2}. \quad (2.6)_2$$

类似地可得 v_{xx}, v_{yy} 的差分公式, 式 (2.6)₁ 右端分母 $(\Delta x)^2$ 在 [1] 中 (3.2) 式和 [2] 中 (3.2) 式误为 $2\Delta x$,

(3) $\nabla_h p$ 中 p_x 的差分公式 (p_y 的差分公式类似):

$$\frac{p'_{i-1,j+\frac{1}{2}} + 22p'_{i,j+\frac{1}{2}} + p'_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{24} = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \quad (2.7)$$

(4) $\operatorname{div}_h \mathbf{V}$ 中 u_x 的差分公式 (v_y 的差分公式类似):

$$\frac{u'_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + 22u'_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u'_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{24} = \frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \quad (2.8)$$

(5) $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ 中 uu_x 里的 u : $u_{i,j+\frac{1}{2}}$; vv_y 中的 v : $v_{i+\frac{1}{2},j}$; 而 uv_x, vu_y 中的 u, v 需插值计算:

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i+1,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i+1,j+\frac{1}{2}}}{4} - \frac{1}{8} [(\Delta x)^2 u_{xx} + (\Delta y)^2 u_{yy}]_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (2.9)$$

其中二阶导数可利用 (2.6) 的结果插值计算, $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ 的插值公式类似.

(6) \mathbf{V}_t 的差分公式, 对于定常问题, 用时间相关法, 时间方向计算精度不重要. 在 (2.3) 中用了一阶前差. 对非定常问题, 见 §2.4.

2.3 边界上的差分公式

考虑边界条件 $\mathbf{V}|_{\Gamma} = \mathbf{V}_{\Gamma} = (u^{\Gamma}, v^{\Gamma})$, 其中 $\Gamma = \partial\Omega$. 下面给出 $x=0$ 边的差分公式

$$(1)_1 \quad u_x|_{x=0} = -v_y^{\Gamma}, \quad (\text{由连续方程}), \quad \text{对 } v: \quad v_y|_{y=0} = -u_x^{\Gamma}, \quad (2.10)$$

(1)₂ v_x 在 $x = \frac{3}{4}\Delta x$ 的计算公式 及 u_y 在 $y = \frac{3}{4}\Delta y$ 的计算公式:

$$\frac{3v'_{\frac{1}{2},j} + v'_{\frac{3}{2},j}}{4} = \frac{v_{\frac{3}{2},j} - v_{0,j}}{\frac{3}{2}\Delta x}, \quad \frac{3u'_{i,\frac{1}{2}} + u'_{i,\frac{3}{2}}}{4} = \frac{u_{i,\frac{3}{2}} - u_{i,0}}{\frac{3}{2}\Delta y}, \quad (2.11)$$

(2)₁ u_{xx} 在 $x = \frac{10}{9}\Delta x$ 的差分公式 (v_{yy} 在 $y = \frac{10}{9}\Delta y$ 的公式类似)

$$\frac{8u''_{1,j+\frac{1}{2}} + u''_{2,j+\frac{1}{2}}}{9} = \frac{9u_{0,j+\frac{1}{2}} - 16u_{1,j+\frac{1}{2}} + 7u_{2,j+\frac{1}{2}}}{6(\Delta x)^2} + \frac{u'_{0,j+\frac{1}{2}}}{3\Delta x}, \quad (2.12)$$

其中 $u'_{0,j+\frac{1}{2}} = -(v_y^{\Gamma})_{0,j+\frac{1}{2}}$, 参见 (2.10),

(2)₂ v_{xx} 在 $x = \frac{2}{3}\Delta x$ 的计算公式 (u_{yy} 在 $y = \frac{2}{3}\Delta y$ 的公式类似):

$$\frac{5v''_{\frac{1}{2},j} + v''_{\frac{3}{2},j}}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2v_{0,j} - 3v_{\frac{1}{2},j} + v_{\frac{3}{2},j}}{\Delta x^2}, \quad (2.13)$$

(3) p_x 在 $x = \Delta x$ 的差分公式 (p_y 在 $y = \Delta y$ 的公式类似)

$$p'_{1,j+\frac{1}{2}} + \frac{p'_{1,j+\frac{1}{2}} - 2p'_{2,j+\frac{1}{2}} + p'_{3,j+\frac{1}{2}}}{24} = \frac{p_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (2.14)$$

此式将 [1] [2] 中唯一的二阶精度的差分式改进为三阶精确度, 比 [1] [2] 中的 (3.10) 式增加了左端第二项, 该项逼近 $\frac{1}{24}(\Delta x)^2 p'''$, 并向右平移了一个步长, 在右边界, 应向左平移一个步长,

(4) 连续方程中 u_x 在 $x = \frac{1}{2}\Delta x$ 的差分公式 (v_y 在 $y = \frac{1}{2}\Delta y$ 的公式类似)

$$\frac{2u'_{0,j+\frac{1}{2}} + 15u'_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u'_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{18} = \frac{u_{1,j+\frac{1}{2}} - u_{0,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (\text{其中 } u'_{0,j+\frac{1}{2}} = -(v_y^{\Gamma})_{0,j+\frac{1}{2}}), \quad (2.15)$$

(5) (2.9) 中二阶导数插值计算时的边值:

$$u_{xx}|_{x=\frac{1}{2}\Delta x} = \frac{u_x|_{x=\Delta x} - u_x|_{x=0}}{\Delta x}, \quad u_{yy}|_{x=0} = u_{yy}^{\Gamma}|_{x=0}, \quad (2.16)$$

其中 $u_x|_{x=\Delta x}$ 可用 (2.5) 的结果, 由连续方程, $u_x|_{x=0} = -v_y^\Gamma|_{x=0}$.

2.4 非定常时间导数项的四阶 Runge-Kutta 公式

定义 $f(\mathbf{V}) = \mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla_h p$, 其中压力 p 使 $\text{div}_h(\mathbf{A}_h(\mathbf{V}) + \nabla_h p) = 0$ 成立. 则 f 是 \mathbf{V} 的函数. 对 $\mathbf{V}_t + f(\mathbf{V}) = 0$ 用四阶 Runge-Kutta 公式:

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

其中 $\mathbf{k}_1 = f(\mathbf{V}^n)$, $\mathbf{k}_2 = f(\mathbf{V}^n - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1)$, $\mathbf{k}_3 = f(\mathbf{V}^n - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2)$, $\mathbf{k}_4 = f(\mathbf{V}^n - \Delta t\mathbf{k}_3)$.

3. 满足等价性的压力 Poisson 方程^[1]

考虑下列离散格式 (例如交错网格紧致差分格式^[2] 和二阶 MAC 差分格式^[4])

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla_h p^{n+1} = \mathbf{0}, \quad (\text{其中 } \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^n - \Delta t \mathbf{A}_h(\mathbf{V}^n)), \quad (3.1)$$

$$\text{div}_h \mathbf{V}^{n+1} = 0. \quad (3.2)$$

$$\text{定义 } \mathbf{NS}_h = \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla_h p^{n+1}, \quad (\text{则 (3.1) 可以写成 } \mathbf{NS}_h = \mathbf{0}), \quad (3.1)_A$$

为使 $\text{div}_h(\mathbf{NS}_h)$ 有定义, 设 (3.1) 在 \mathbf{V} 的差分点上定义, 例如对交错网格差分格式 $\mathbf{NS}_h \sim ((\mathbf{NS}_h)_{i,j+\frac{1}{2}}^1, (\mathbf{NS}_h)_{i+\frac{1}{2},j}^2)$, $\mathbf{V}_h^n \sim (u_{i,j+\frac{1}{2}}^n, v_{i+\frac{1}{2},j}^n)$.

将 $\text{div}_h \mathbf{V}$ 写成包含边界条件在内的形式: $D_h(\mathbf{V}, \mathbf{V}_\Gamma, \nabla \mathbf{V}_\Gamma)$, 其中 \mathbf{V} 在区域内部差分点上定义. $\mathbf{V}_\Gamma = \mathbf{V}|_\Gamma$, $\nabla \mathbf{V}_\Gamma = \nabla \mathbf{V}|_\Gamma$, (上节中的紧致差分格式没有用到 $\nabla \mathbf{V}_\Gamma$ 的所有分量, 仅用到由 \mathbf{V}_Γ 和连续方程可推出的分量 $\nabla(\mathbf{V}_\Gamma \cdot \mathbf{n})$ 和 $\nabla(\mathbf{V}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\tau}$, 其中 \mathbf{n} 和 $\boldsymbol{\tau}$ 为 Γ 上的单位法向量和单位切向量. MAC 格式^[4] 没有用到 $\nabla \mathbf{V}_\Gamma$, 即在连续方程中没有导数边界条件.) 于是, 离散的连续方程 (3.2) 可写成

$$D_h(\mathbf{V}^{n+1}, \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}, \nabla \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}) = 0. \quad (3.2)'$$

由 (3.1)(3.1)_A, $\mathbf{NS}_h = \mathbf{0}$, $\mathbf{V}^{n+1} - \alpha \mathbf{NS}_h = \mathbf{V}^{n+1}$, (其中 α 为任意常数), 代入上式即得

$$D_h(\mathbf{V}^{n+1} - \alpha \mathbf{NS}_h, \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}, \nabla \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}) = 0. \quad (3.3)$$

定理3.1 对任意常数 α , (3.3)(3.1) 等价于 (3.2)(3.1).

将 (3.1) 代入 (3.3), 并取 $\alpha = \Delta t$, 则推出压力 Poisson 方程

$$D_h(\nabla_h p^{n+1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \frac{1}{\Delta t} D_h(\mathbf{V}^*, \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}, \nabla \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}). \quad (3.4)$$

上式的右端为 $\frac{1}{\Delta t} \text{div}_h \mathbf{V}^*$ (参见 (2.8)(2.15)), 边界上 $\mathbf{V}^*|_\Gamma = \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}$, $(\nabla \mathbf{V}^*)_\Gamma = \nabla \mathbf{V}_\Gamma^{n+1}$ (参见 (2.15) 中的 $u'_{0,j+\frac{1}{2}}$). (3.4) 的左端为 $\text{div}_h(\nabla_h p^{n+1})$ (参见 (2.7)(2.14) (2.8)(2.15)), 边界上 $(\nabla p^{n+1})_\Gamma = \mathbf{0}$, (参见 (2.15) 中的 $u_{0,j+\frac{1}{2}}$), $(\nabla(\nabla p^{n+1}))_\Gamma = \mathbf{0}$, (参见 (2.15) 中的 $u'_{0,j+\frac{1}{2}}$). 这些数值边界条件只是计算上的需要, 不影响 p^{n+1} 的计算结果. 对这样的数值边界条件, [4] 中有详细说明. (见 [4]§6.3.1 The projection and MAC methods)

这样, 我们可以用压力 Poisson 方程 (3.4) 求解 p^{n+1} , 即用 (3.4)(3.1) 代替 (3.2)(3.1) 求解 Navier-Stokes 方程 (2.1)(2.2).

4. 一种新的解压力 Poisson 方程的 ADI 迭代法

压力 Poisson 方程 (3.4) 直接用 ADI 方法求解比较困难. 我们在 ADI 迭代的每一步中的每个 (空间) 方向将它转化为三对角线之后再加伪时间项, 这样得到的方程是三对角线的, 很容易求解, (通常的 ADI 迭代法是先加伪时间项). 方程 (3.4) 可写为

$$\operatorname{div}_h(\nabla_h p) = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}_h \mathbf{V}^*, \quad (+ \text{边条件}) \quad (4.1)$$

本文给出的 ADI 迭代法 每步分 x 方向和 y 方向, x 方向公式为

①用 p 的初值或上步 p 及 (2.7)(2.14) 对应的公式计算 $\nabla_h p$ 中的 p_y :

$$\frac{(p_y)_{i+\frac{1}{2},j-1} + 22(p_y)_{i+\frac{1}{2},j} + (p_y)_{i+\frac{1}{2},j+1}}{24} = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \quad (j = 2, 3, \dots), \quad (4.2)_1$$

$$(p_y)_{i+\frac{1}{2},1} + \frac{(p_y)_{i+\frac{1}{2},1} - 2(p_y)_{i+\frac{1}{2},2} + (p_y)_{i+\frac{1}{2},3}}{24} = \frac{p_{i+\frac{1}{2},\frac{3}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \quad (4.2)_2$$

②用 (2.8)(2.15) 对应的公式计算 $\operatorname{div}_h(\nabla_h p)$ 中的 p_{yy} :

$$\frac{(p_{yy})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + 22(p_{yy})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (p_{yy})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}{24} = \frac{(p_y)_{i+\frac{1}{2},j+1} - (p_y)_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y}, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{2(p_{yy})_{i+\frac{1}{2},0} + 15(p_{yy})_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + (p_{yy})_{i+\frac{1}{2},\frac{3}{2}}}{18} = \frac{(p_y)_{i+\frac{1}{2},1} - (p_y)_{i+\frac{1}{2},0}}{\Delta y}, \quad (4.3)$$

$$((p_y)_{i+\frac{1}{2},0} = 0, (p_{yy})_{i+\frac{1}{2},0} = 0)$$

$$\textcircled{3} \quad p_{xx} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}_h \mathbf{V}^* - p_{yy} \quad (4.4)$$

④用递推 [—校正] 法求解 (2.8)(2.15) 对应的方程计算 p_x :

$$\frac{(p_{xx})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + 22(p_{xx})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (p_{xx})_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{24} = \frac{(p_x)_{i+1,j+\frac{1}{2}} - (p_x)_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{2(p_{xx})_{0,j+\frac{1}{2}} + 15(p_{xx})_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (p_{xx})_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{18} = \frac{(p_x)_{1,j+\frac{1}{2}} - (p_x)_{0,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad (4.5)$$

$$((p_x)_{0,j+\frac{1}{2}} = 0, (p_{xx})_{0,j+\frac{1}{2}} = 0)$$

⑤计算 (2.7) 和 (2.14) 的左端

$$(p_x^*)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{(p_x)_{i-1,j+\frac{1}{2}} + 22(p_x)_{i,j+\frac{1}{2}} + (p_x)_{i+1,j+\frac{3}{2}}}{24}, \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \quad (4.6)$$

$$(p_x^*)_{1,j+\frac{1}{2}} = \frac{25(p_x)_{1,j+\frac{1}{2}} - 2(p_x)_{2,j+\frac{1}{2}} + (p_x)_{3,j+\frac{1}{2}}}{24},$$

⑥差分 (2.7)(2.14), 并加伪时间项, 得如下关于 p 的三对角线的方程, 解之得 p

$$\frac{(p_x^*)_{i+1,j+\frac{1}{2}} - (p_x^*)_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - 2p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t_*}, \quad (i=1,2,\dots)$$

$$\frac{(p_x^*)_{1,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{p_{\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} - \frac{p_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta t_{*1}}, \quad (4.7)$$

将 (4.2)₂, (4.3)₂, (4.5)₂, (4.6)₂, (4.7)₂ 作变换: $i \rightarrow N-i, \Delta x \rightarrow -\Delta x$ 或 $j \rightarrow N-j, \Delta y \rightarrow -\Delta y$, 可得它们对应的右边界或上边界的公式.

y 方向公式可类似给出. 以上④在一定程度上相当于⑥差分的逆过程. 经过④—⑥, 得到很容易求解的三对角线的方程 (4.7). 本文和 [1] 中的计算都采用了这样的 ADI 迭代法.

5. 驱动方腔流动数值计算

我们用交错网格紧致差分格式数值模拟了由剪切力驱动的二维方腔流动,

考虑 Navier-Stokes 方程 (2.1)(2.2), 计算区域: $0 < x < 1, 0 < y < 1$,

边界条件: $\mathbf{V} = (-1, 0)$, (当 $y=1$); $\mathbf{V} = (0, 0)$, (当 $y=0$ 或 $x=0$ 或 $x=1$);

取 $Re = 1/\nu = 10000$, $\Delta x = \Delta y = 1/N$, $N = 256$.

为了进一步验证等价性 (定理 3.1), [1] 中用较粗的网格, ADI 迭代, 使误差降至 $|\operatorname{div}_h \mathbf{V}| < 10^{-15}$, 本文用多重网格法, $N = 256$, $Re = 10000$, 使 $|\operatorname{div}_h \mathbf{V}| < 6 \times 10^{-14}$, 这说明压力 Poisson 方程 (4.1) (即 (3.4)) 可等价地替代连续方程 $\operatorname{div}_h v = 0$ (假设保留动量方程 (3.1)).

(图 1 中的) 流线图 of 流函数 ψ 的等值线. 为了求解 ψ , 本文利用下列公式推出 ψ 的 Poisson 方程,

$$\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y} = u_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{(\Delta y)^2}{24} u_{yy}, \quad \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x} = -(v_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{(\Delta x)^2}{24} v_{xx}), \quad (5.1)$$

其中 u_{yy}, v_{xx} 用至少二阶精度的差分, (则下式和 (5.1) 四阶逼近连续方程 (2.2)),

$$[(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j}) - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j})] - [(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j+1}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j})] = 0, \quad (5.2)$$

于是 (2.3)-(2.7), (5.1), (5.2), (2.9)-(2.14), (2.16) 为 Navier-Stokes 方程 (2.1)(2.2) 的另一种四阶精度紧致差分格式.

图 3 中的 $\|\cdot\|$ 定义为

$$\|\mathbf{V}\| = \frac{1}{2N} \left(\sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j+\frac{1}{2}})^2} + \sqrt{\sum_{i,j} (v_{i+\frac{1}{2},j})^2} \right), \quad (\mathbf{V} = (u, v)), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}|_{t=t_1+536.655}, \quad \mathbf{V}_5 = \mathbf{V}|_{t=t_1+542.340}.$$

[2] 中我们给出的结果计算时间较短, 本文采用多重网格法计算压力, 进一步计算得数值解随时间 t 变化的周期约为 $T = 6.727$ (见图 2, 图 3), 与 [3] 中给出的 $T = 6.36$ 接近.

从图中可以看出, 数值解尚未达到完全稳定地周期变化. 图 3 中 $t = t_1 + 549$ 附近

$$\min_n \|(\mathbf{V}|_{t=t_1+n\Delta t} - \mathbf{V}_5)\| = \|(\mathbf{V}|_{t=t_1+n_1\Delta t} - \mathbf{V}_5)\| \approx 1.13 \times 10^{-5}.$$

仔细些计算可得

$$\min_{0 \leq n \leq 100} \|(\mathbf{V}|_{t=t_1+n_1\Delta t+n\Delta t/100}) - \mathbf{V}_5\| \approx 7.15 \times 10^{-6}.$$

[3] 中给出的结果图象所显示的周期为速度周期的四分之一, [7] 也给出了类似的结果, 这与本文图 3 图 2 中的结果相吻合. 由图 2, $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t)$ 或 $v(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t)$ 可近似写成

$$|A(t)| \sin(2\pi t/T + \theta_1) + |B(t)| \sin(2\pi t/(T/4) + \theta_2) + C(t), \quad (5.4)$$

周期 T 也随时间 t 改变. $|B|$ 逐渐大于零 (图 2a), $|B| \approx |A|$ (图 2b), $|B| \gg |A|$ (图 2c).

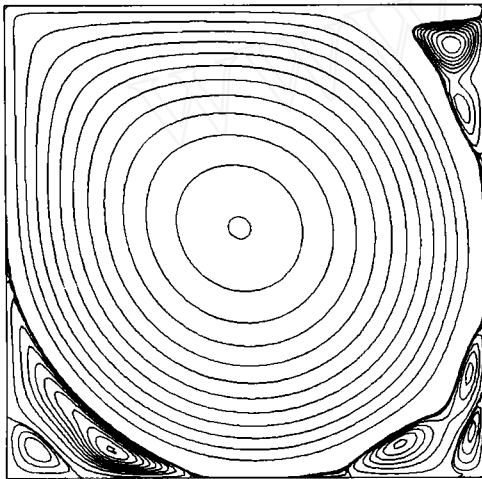


图 1. 流线图 ($t=t_1+86.5, Re=10000, N=256$)

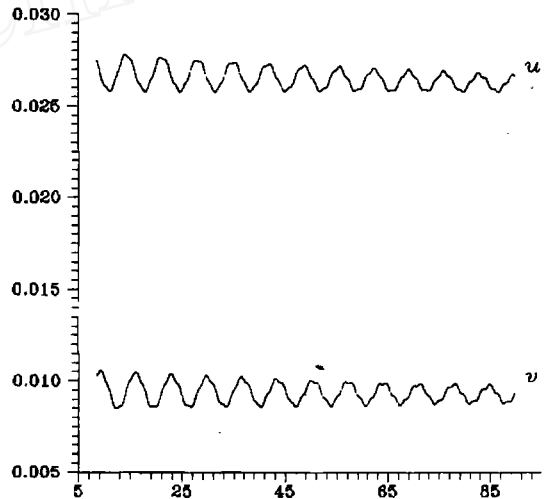


图 2a. 中心点 $(0.5, 0.5)$ 处的速度随时间 $(t-t_1)$ 变化曲线

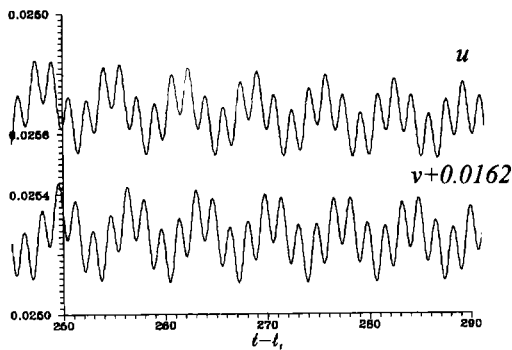


图 2b

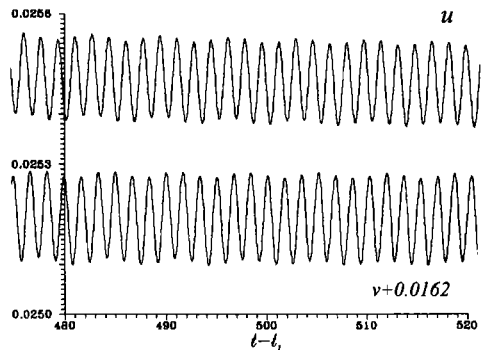


图 2c

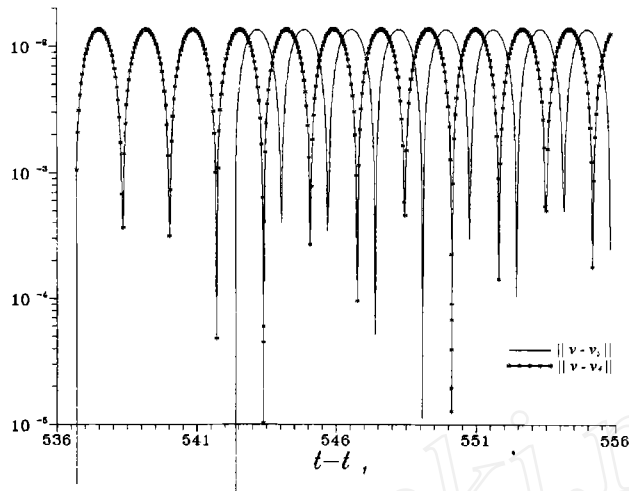


图 3. $\|V - V_i\|$ 随时间 $(t - t_1)$ 变化曲线 ($i = 4, 5$)

参 考 文 献

- [1] Yu Xin, An Equivalent Pressure-Poisson-Equation for N-S Equations and Staggered Mesh Compact Difference Schemes, First Asian Computational Fluid Dynamics Conference, 1995, Hong Kong, 937-942.
- [2] 于欣, 解非定常不可压缩 N-S 方程的迭代压力 Poisson 方程法, 北京计算流体力学讨论会文集, 第五辑, 1993, 127-136.
- [3] 刘宏, 傅德薰, 马延文, 迎风紧致格式与驱动方腔流动问题的直接数值模拟, 中国科学, (A 辑), **23**: 6, 1993, 657-665.
- [4] R. Peyret, T. D. Taylor, Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag, 1983.
- [5] S. G. Rubin, R. A. Graves, Jr., Viscous flow solutions with a cubic spline approximation, *Computers and Fluids*, **3**, (1975), 1-36.
- [6] M. Ciment, S. H. Leventhal, Higher order compact implicit schemes for the wave equation, *Mathematics of Computation*, **29**, (1975), 985-994.
- [7] Jie Shen, *Journal of Computational Physics*, **95**, (1991), 228.
- [8] Bernardo Cockburn, Shu Chi-wang, Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **31**: 3, (1994), 607-627.
- [9] 于欣, 交错网格紧致差分格式和满足等价性的压力 Poisson 方程, 北京计算流体力学讨论会文集, 第七辑, 1995, 137-145.
- [10] Fu De-xun, Ma Yan-wen, Liu Hong, Upwind compact schemes and applications, Proc. of the 5th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics, I, Sendai, JSCFD, 1993, 184-190.