# 接管断裂失效概率估算的一种新方法*

丁克勤**　柳春图
（中国科学院力学研究所，北京，100080）

**摘要**　提出用分层抽样—拉丁抽样复合法计算接管的断裂失效概率，并与直接抽样的 Monte Carlo 法进行了比较。结果表明，用复合法计算接管断裂失效概率不但精度高，而且大幅度节省机时，提高效率。

**关键词**　概率断裂力学　蒙特卡洛模拟　断裂失效概率　分层抽样　拉丁抽样

# A NEW METHOD TO CALCULATE FRACTURE FAILURE PROBABILITY OF THE NOZZLE

Ding Keqin　Liu Chuntu
(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing*, 100080)

**Abstract**　The stratified sampling—Latin hypercube sampling compound method is proposed to calculate fracture failure probability, and compared with the Monte Carlo method with direct sampling. The results show that the compound method is accuracte and efficient.

**Key words**　**probabilistic fracture mechanics, Monte Carlo simulation, fracture failure probability, stratified sampling, Latin hypercube sampling**

## 1　引言

随着现代工业的迅速发展，压力容器、管道、近海钻井平台等工程设施的广泛应用，且结构不断向大型化、复杂化方向发展，其工作环境越来越复杂，操作条件愈来愈恶劣。同时，由于大量采用高强度和超高强度材料，又广泛地运用焊接技术等，这无疑增大了这些结构的不安全因素。这些结构一旦发生破坏，损失将会十分巨大。

在这些结构的疲劳断裂失效中，绝大部分是由接管部位裂纹的逐渐扩展而引起整个结构破坏的。由于疲劳断裂失效概率估算与多种因素有关，这些因素又往往具有不确定性，如材料性能参数的分散性、初始裂纹尺寸的随机性等，特别是对于海洋平台结构来说，还要受到多种瞬变载荷（如风载、波载）的作用，使得这种不确定性更为突出。从统计学观点，这些不确定参量都是服从某一概率分布的随机变量，因此，用概率统计方法研究疲劳断裂问题比确定性方法更为合理。随着计算机技术飞速发展，统计模拟法（Monte Carlo 法）在近代工程结构中得到广泛应用。该统计模拟方法具有方法简单、精度高等优点，但是，该统计模拟法的误差 $\varepsilon\propto\sigma/\sqrt{N}$（$N$ 为抽样次数，$\sigma$ 为随机变量的标准差），也就是模拟结果的误差正比于模拟随机变量的标准差，反比于模拟次数的平方根，如果要提高模拟结果的精度，就必须增加模拟次数或降低随机变量的方差。然而，增加模拟次数势必使计算费用增加，这显然是不经济的。因此人们设法寻求降低方差、加速模拟结果收敛的方法。文献[1]提出用分层抽样法计算疲劳断裂失效概率，该抽样法能降低方差，提高模拟结果的精度，但该法用于管节点的断裂失效概率计算时存在一定的困难。文献[2]提出用拉丁抽样法来进行结构可靠性评定，该法虽然能极大地提高计算效率，但计算精度非常差。鉴于此，本文提出分层抽样—拉丁抽

* 19950811 收到初稿，19950904 收到修改稿。“八五”科技攻关资助项目。

** 丁克勤，男，1968年9月生，汉族。12研究室在读博士研究生，硕士。北京，100080。

样复合法用于疲劳断裂失效概率计算，并以压力容器接管作为算例，对接管的逐年失效概率进行计算，同时还将计算结果与直接抽样的 Monte Carlo 法进行比较。

## 2 抽样方法简述

### 2.1 分层抽样法[1]

对具有主导作用的一个随机变量，如起始裂纹尺寸 $a_0$ 的样本空间内分割成 $m$ 个区间，按照各区对断裂失效概率贡献大小相应地多抽样或少抽样，此法即为分层抽样法。

首先在 $a_0$ 的样本空间内分成 $m$ 个区后，由 $a_0$ 的概率密度函数计算 $a_0$ 的随机抽样值从属于第 $i$ 区的概率 $P_i$，再采用直接抽样的 Monte Carlo 法，计算 $a_0$ 值从属第 $i$ 区的裂纹导致断裂的概率 $N_i^f/N_i$（$N_i$ 是从 $a_0$ 样本空间的第 $i$ 区的随机抽样数，$N_i^f$ 是 $N_i$ 个样本中发生断裂事件的样本数）。这样，$a_0$ 从属于第 $i$ 区内的裂纹导致断裂的概率为：

$$P_f^i = P_i N_i^f / N_i \tag{1}$$

总的断裂概率为：

$$P_{f总} = \sum_{i=1}^{m} P_i N_i^f / N_i \tag{2}$$

理论分析认为，为减少计算估计值方差，应使从每个子区间抽样的样点数正比于该子区间的标准差与子区间长度的乘积。

### 2.2 拉丁抽样法[2]

若决定模拟循环 $N$ 次，拉丁抽样法则首先将[0,1]区间等分成 $N$ 个互不重叠的子区间，然后在每个子区间内分别进行独立的等概率抽样。为了保证抽取的随机数确属于各子区间，则第 $i$ 个子区间内的随机数 $U_i$ 应满足下列等式：

$$U_i = \frac{U}{N} + \frac{(i-1)}{N} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{3}$$

式中 $U$——[0,1]区间内均匀分布的随机数

$U_i$——属于第 $i$ 个子区间的随机数

由于存在下列关系式：

$$(i-1)/N < U_i < i/N$$

因而，每一个子区间仅能产生一个随机数，然后仍要采用反变换法，由 $N$ 个子区间产生的 $N$ 个随机数得到 $N$ 个某一概率密度函数的随机抽样值。最后对各随机变量的随机抽样值进行组对，也就是对各随机变量的随机抽样值所属区间的序号进行随机排列。

以设 $K$ 个随机变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 进行 $N$ 次模拟循环为例，由 $x_1$ 的 $N$ 个子区间内随机抽取的 $N$ 个抽样值与 $x_2$ 的类似地抽取的 $N$ 个抽样值进行组对，组成 $x_1x_2$ 的 $N$ 个组对。类似地 $x_1x_2$ 的 $N$ 个组对再与 $x_3$ 的 $N$ 个抽样值进行组对为 $x_1x_2x_3$。如此类推，直至组成 $N$ 组 $x_1x_2\cdots x_k$ 为止。

文献[3]提出了一个办法，能减小因抽样的统计相关性对断裂估计值的影响。

因拉丁抽样法并不能降低估计值的方差。因此，为了提高精度，文献[4]提出了拉丁抽样法与能降低方差的对偶变量抽样法和条件期望值法相结合。

#### 2.2.1 条件期望值法

结构的失效概率 $P_f$ 为：

$$P_f = P(Z<0) = P(R<L)$$

式中 $R, L$——结构强度函数，由载荷产生的应力函数

在模拟循环中 $l_i$（或 $r_i$）表示 $L$（或 $R$）第 $i$ 次模拟值，则有

$$P_{f_i} = Prob(R < l_i) = F_R(L_i) \text{ 或 } P_{f_i} = Prob(L > r_i) = 1 - F_L(r_i)$$

假设 $R$ 和 $L$ 相互独立，因而对于 $N$ 次模拟，结构失效概率均值 $\overline{P}_f$ 为：

$$\overline{P}_f = \left(\sum_{i=1}^{N} P_{f_i}\right) \Big/ N \tag{4}$$

#### 2.2.2 对偶变数法

设 $U_i$ 为[0,1]区间内均匀分布的一个随机数，由此对应结构失效概率的估计值 $P_{f_i}^{(1)}$；同样，由随机数 $1-U_i$ 得到结构失效概率的另一估计值 $P_{f_i}^{(2)}$，则第 $i$ 次循环中失效概率估计

值 $P_{f_i}$ 为：
$$P_{f_i}=(P_{f_i}^{(1)}+P_{f_i}^{(2)})/2$$

则结构失效概率估计均值 $\overline{P}_f$ 为：
$$\overline{P}_f=\left(\sum_{i=1}^{N}P_{f_i}\right)/N \tag{5}$$

### 2.3 分层抽样—拉丁抽样复合法

首先将初始裂纹长度 $a_0$ 按某一规律分层(按文献[5]办法，按等比级数分层，或平均分层)，然后再在每一子区间进行拉丁抽样。当然其他未分层的随机变量仍进行拉丁抽样。本文与前人的拉丁抽样法不同之处在于，不是从均匀分布的[0,1]中抽样，而是从各随机变量分布函数的实际抽样范围内抽样。

## 3 算例

选用文献[6]中容器接管的实例，计算其拐角裂纹导致断裂的概率。容器材料为 16MnR，接管与容器的内直径分别为 147 mm 和 500 mm，接管与容器的壁厚为 14 mm，故二者轴线的角平分线方向的壁厚为 20 mm。弹性模量 $E=20.58\times10^4$ MPa。一年内波动应力循环次数不超过 252 次。工作压力范围为 0～9 MPa。按 Decock 公式计算得到拐角部位应力集中系数 $K_t\approx2.14$。

为了计算接管经历 $N$ 次波动应力后裂纹的当量表面裂纹深度 $a$，采用屈服应力 $\sigma_y<540$ MPa 的国产压力容器用钢的 Paris 公式，即
$$\mathrm{d}a/\mathrm{d}N=C(\Delta K)^m$$
式中 $m=3.26$，$\Delta K=2.14\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$，$\Delta\sigma$ 为波动应力幅值，$C$ 为随机变量，$C$ 的均值为 $2.334\times10^{-14}$。

经历 $N$ 次波动应力后
$$a=\{a_0^{0.63}/[1-7.56C(\Delta\sigma)^{3.26}\pi^{1.63}Na_0^{0.63}]\}^{1.59} \tag{6}$$

采用 COD 断裂判据，$\delta_c<\delta$，采用英国标准 PD6493 的 COD 设计曲线公式计算 $\delta$，则断裂判据为：
$$\left.\begin{aligned}&\delta_c\leqslant2\pi ae_y(e/e_y)^2 && \text{当 } e/e_y\leqslant0.5\\&\delta_c\leqslant2\pi ae_y(e/e_y-0.25) && \text{当 } e/e_y>0.5\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中　$\delta_c$——临界裂纹张开位移，也称断裂韧度

　　$\delta$——裂纹张开位移

　　$e,e_y$——作用在裂纹部位的应变，屈服应变

将式(6)代入式(7)后，将波动应力幅值 $\Delta\sigma$、断裂韧度 $\delta_C$、初始裂纹当量深度 $a_0$、Paris 公式中材料常数 $C$、屈服应力 $\sigma_y$ 以及膜应力 $\sigma_m$ ($e=\sigma_m/E$)等视为随机变量，其概率密度函数和分布参数如表 1 所示，则式(7)构成概率论的断裂失效判据。计算断裂概率归结为 6 维积分式。由于求精确的解析解难，故采用不同抽样的 Monte Carlo 法作近似计算。

表 1　各随机变量的概率密度函数和分布参数

| 随机变量 | 概率密度函数 | 分布参数 |
|---|---|---|
| 初始表面裂纹当量深度 $a_0$/ mm | $\lambda e^{-\lambda x}(e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2})$ | $\lambda=0.6$<br>$x_1=0,x_2=20$ mm |
| 膜应力 $\sigma_m$/MPa | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=165.2$ MPa<br>$\sigma=24.78$ MPa |
| 波动应力幅值 $\Delta\sigma$/MPa | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=82.6$ MPa<br>$\sigma=24.78$ MPa |
| 材料常数 $C$ | $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=2.33\times10^{-14}$<br>$\sigma=2.33\times10^{-15}$ |
| 屈服应力 $\sigma_y$/MPa | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ | $\mu=380.0$ MPa<br>$\sigma=22.84$ MPa |
| 断裂韧度 $\delta_C$/mm | $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right]$ | $\alpha=1.91$<br>$\beta=0.138$ |

## 4 计算结果

**4.1 直接抽样的 Monte Carlo 法**　模拟 5 万次，计算接管的逐年断裂失效概率，其结果列于表 2 第 2 栏，以此作为精确值来比较各种抽样法的计算精度。

**4.2 拉丁抽样—条件期望值法**　模拟 1 000 次，计算接管的逐年断裂失效概率，其结果列于表 2 第 3 栏，与直接抽样的 Monte Carlo 模拟 5 万次相比，最大误差达到 103.7 %。

**4.3 拉丁抽样—对偶变数法**　模拟 1 000 次，计算接管的逐年断裂失效概率，其结果列于表 2 第 4 栏，与直接抽样的 Monte Carlo 模拟 5 万次相比，最大误差达到 32.4 %。

**4.4 分层抽样—拉丁抽样法** 参照文献[5]的分层方法，将起始裂纹尺寸范围[0，20 mm]进行分层，分为[0，0.67]、[0.67，1]、[1，2]、[2，3]、[3，6]、[6，8]、[8，11]、[11，14]、[14，17]、[17，20]10个小区间。虽然 $a_0<1$ mm 的裂纹出现的概率高达 0.58，但能导致断裂的概率很低(仅 $10^{-7}$)；$a_0>14$ mm 的裂纹导致断裂的概率虽高，但其出现的概率很低($<10^{-4}$)。因此在计算时可将[0，0.67]、[0.67，1]、[14，17]、[17，20]这第 1、2、9、10 区间略去不计，不进行抽样。计算 3～8 区的裂纹导致断裂概率时采用拉丁抽样法，各区间的抽样数分别为 80、80、150、150、50、30，总计模拟 540 次。与直接抽样的 Monte Carlo 法模拟 5 万次相比，最大误差约为 5.61 %，计算时间为 1/10 000，其结果详见表 2 第 5 栏。

表 2 计算结果

| 时间/年 | 接管断裂概率/$10^3$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 直接抽样的 Monte Carlo 法 5 万次 | 拉丁抽样—条件期望值法 1 000 次 | 拉丁抽样—对偶变数法 1 000 次 | 分层抽样—拉丁抽样复合法 540 次 |
| 5 | 32.1 | 65.4 | 43.1 | 33.60 |
| 10 | 32.9 | 66.5 | 43.7 | 33.68 |
| 15 | 33.9 | 67.6 | 44.7 | 35.48 |
| 20 | 34.9 | 68.8 | 44.8 | 35.62 |
| 25 | 35.8 | 70.0 | 45.4 | 37.81 |
| 30 | 37.0 | 71.3 | 46.0 | 38.89 |

## 5 结论

用本文提出的分层抽样—拉丁抽样复合法计算接管断裂失效概率比用现有的拉丁抽样—条件期望值法和拉丁抽样—对偶变数法的计算精度高，而且将其结果和较精确的直接抽样的 Monte Carlo 法进行比较，最大误差为 5.61 %，计算时间仅为直接抽样的 Monte Carlo 法的 1/10 000，适用于工程计算。

### 参 考 文 献


1 Rubinstein R Y. Simulation and the Monte Carlo Method. New York: John Wiley and Sons, 1981: 128～140

2 Mckay M D, Beckman R J, Conover W J. A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. Technometrics, 1979; 2: 239～245

3 Iman R I, Conover W J. A Distribution-Free Approach to Inducng Rank Correlation Among Input Variables. Commun. Statist., 1982; (B11): 311～334

4 Ayyub B M, Kwanling Lai. Structural Reliability Assessment Using Latin Hypercube Sampling. Proc. of the Int. Conf. on Struct. Safety and Reliability, ICOSSAR-89, San Fransisco, USA, 1989: 1174～1184

5 Marshall W. An Assessment of the Integrity of PWR Pressure Vessels. Report of the UKAEA, 1976: 54～58

6 Gao Zenghang, Xu Liangfeng, Zhang Kangda. Fatigue Crack Growth in the Nozzle Corner of a Pressure Vessel. Int. J. Press. Ves. & Piping, 1990; 42: 1～13