

卡门涡街的慢不稳定性¹⁾

唐少杰 庄逢甘 忻鼎定

(中国科学院力学研究所, 北京 100080) (北京航空航天大学流体所, 北京 100083)

摘要 经典的卡门涡街点涡模型只在一孤立情况下是线性稳定的, 数值计算还表明这一特性对该流动的其它更复杂的模型仍然成立. 本文引进慢不稳定性概念, 对卡门涡街的稳定性问题进行了比较全面和细致的数值研究. 首先用点涡模型, 做数值模拟, 证实了早年卡门的线性稳定性分析结果, 数值模拟卡门涡街的非线性稳定性却表明, 卡门涡街对有限大小的扰动, 表现出慢不稳定性现象. 然后用伪谱方法对涡街的形成进行了直接数值模拟, 进一步证实卡门涡街的这种慢不稳定性.

关键词 卡门涡街, 稳定性, 数值模拟

引 言

涡街是尾迹流动中的一种典型涡旋结构. 卡门 (T. von Kármán)^[1] 首先对其进行了线性稳定性分析, 因而得名卡门涡街. 若用单一参数 b/a 来描述涡列, 其中 a 是同涡列中相邻涡旋之间的距离, b 是两涡列间的距离 (见图 1).

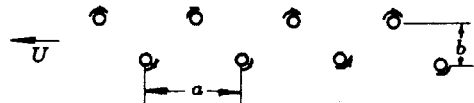


图 1 卡门涡街示意图
Fig.1 Sketch showing the form of Kármán vortex street

卡门得出涡列稳定的必要条件为 $b/a = 0.2805\dots$; Lamb^[2] 则给出了卡门涡街稳定性分析的详细推导. 由于卡门给出的是稳定性的必要条件, 故即使满足这一条件, 仍不能保证涡街是稳定的. 在物理实验中, 这一条件很难满足, 而得到的卡门涡街总是呈现线性不稳定. 因此, 卡门涡街的稳定性一直是一个没有解决的问题. 论述这一问题的综述性文章见文献 [3,4]. 在理论方面, Kotchin^[5] 用 Liapunov 的直接法证明了卡门涡街是非线性不稳定的. Jimenez^[6] 研究了一种更广泛的涡街模型, 其中包括卡门的点涡模型和有限涡核模型. 结果表明卡门涡街只有一孤立稳定点的特性, 它是与此系统对应的两参数保守 Hamilton 系统的一个固有特性. 实验观察到的涡街尺寸比 b/a 不等于卡门的 0.2805, 大部分偏大^[7], 但值相近. 在数值计算方面, Aref^[8] 等用 VIC(vortex in cell) 方法计算了两平行反号剪切层的卷起, 发现只有当 $0.3 < b/a < 0.6$ 时, 所形成的涡街才能存在较长时间, 没发现有 $b/a < 0.3$ 的涡街.

从前人的研究结果, 不难发现其中存在的一些问题和矛盾, 如: 为什么用卡门的点涡模型得到的稳定的必要条件与实验很接近? 为什么理论分析表明卡门涡街是不稳定的, 而实验和数值计算又都能观察到这种涡街的存在. 又, 如果认为实验上能看到卡门涡街是

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目.

1994-05-05 收到第一稿, 1995-07-17 收到修改稿.

由于粘性的作用,那么用无粘模型进行的计算为何也能看到卡门涡街的存在,而且所得的涡街尺寸比 b/a 又与实验值相近?

本文对卡门涡街在无穷小扰动和有限扰动下的稳定性进行了数值研究,并用伪谱方法对卡门涡街的形成进行了直接数值模拟;对于理论实验和数值计算结果之间存在的矛盾作了较合理的解释.

1 关于涡街的稳定性和可观察性

在自然界中,由于绝大多数的运动系统都是非线性的,其运动的稳定性也必然具有非线性特征.因此如只作线性的稳定性分析显然是不充分的,这时将存在以下三个缺点:1) 线性稳定性分析的结果与初始扰动量的大小和相位没有直接的关系,后两者在线性稳定性分析中只是不起决定性作用的待定常数.2) 不管非线性系统多么复杂,由线性稳定性分析所得的扰动量都只以一种指数形式 $e^{\lambda t}$ 变化.3) 线性稳定性分析的结论只取决于特征根的符号而与特征根的大小无关.

事实上,对于一个不稳定系统,我们能观察到系统的真实运动状态是与失稳的速度和初始扰动量的大小有一定关系.通常情况下,不稳定非线性系统的失稳速度是以某种非线性方式敏感地依赖于外界的扰动.有些不稳定系统的失稳速度很快,在外界扰动很小的情况下,系统就会远离原来的运动状态,如剪切层的运动.而有些不稳定系统,在外界扰动很小时,其失稳速度却非常之慢,在我们所观察的时间内,运动状态并没有发生很大变化,以至于无法认为它是不稳定的.卡门涡街的运动状态就属于这后一种情况.我们将在以后几节中讨论这个问题.

2 受无穷小扰动的卡门涡街稳定性

我们用 4 阶 Runge-Kutta 法对卡门点涡模型的运动轨迹进行积分,取时间步长 $\Delta t = 0.005(a/v)$,计算采用双精度,并将无穷长的卡门涡街用周期性涡街代替,这样正好模拟周期性扰动对涡街的影响.为模拟无穷小扰动,以便于和原来的线性稳定性结果进行比较分析,这里未加进初始扰动,初始扰动完全来自双精度的计算误差(约为 10^{-14} 量阶).

在进行数值计算以前,需要定义一个与实验观察相一致的表明失稳的准则.我们认为当涡街中各涡位移量的 Euler 范数 (D) 超过某事先给定的值 (D_0) 时,涡街呈现失稳;而当 $D < D_0$ 时认为涡街是稳定的.在我们的计算中有: $\lambda = 2a$, $D_0 = 0.1a$; $\lambda = 3a$, $D_0 = 0.1a$ 和 $\lambda = 4a$, $D_0 = 0.15a$ 等三种情况,这里 λ 为波长.对应不同尺寸比 b/a ,数值计算表明:卡门涡街表现出不同的失稳时间.对于 $\lambda = 2a$,除 $b/a = 0.2805$ 以外,所有情况都是不稳定的;对于 $\lambda = 3a$,当 $0.24 < b/a < 0.34$ 时,涡街是稳定的.对于 $\lambda = 4a$,由于这种扰动波包含了波长为 $2a$ 的扰动波,而波长为 $2a$ 的扰动波比波长为 $4a$ 的扰动波更不稳定,所以实际上放大的是波长为 $2a$ 的扰动波,此时失稳时间与 $\lambda = 2a$ 时几乎相同.图 2 和图 3 给出涡位移达到 D_0 的失稳时间 t (时间以 a/U 无量纲化, U 是涡街的运动速度)与 b/a 的关系,这些结果与 [9] 中的结果是一致的.

我们的数值计算结果进一步证实了卡门的稳定性分析结果,即存在 $b/a = 0.2805$ 的稳定点,并且还给出了线性稳定性分析不能给出的信息,即不稳定的涡街具有涡位移达到 D_0 的不同失稳速度, b/a 越接近 0.2805 失稳所需的时间越长.由图 2(其中 $b/a = 0.28$ 未

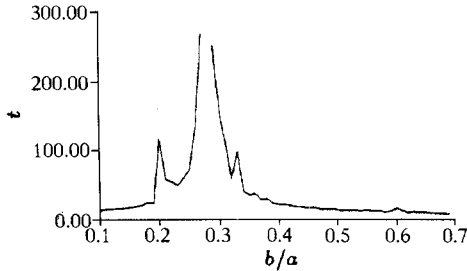


图 2 卡门涡街受无穷小扰动的持续时间
($a = 1, \lambda = 2a, D_0 = 0.1$)
Fig.2 The duration of Kármán vortex street perturbed infinitesimally

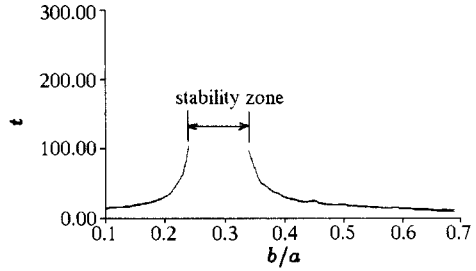


图 3 卡门涡街受无穷小扰动的持续时间
($a = 1, \lambda = 3a, D_0 = 0.1$)
Fig.3 The duration of Kármán vortex street perturbed infinitesimally

标出) 我们看到, 当 $b/a = 0.1, 0.27, 0.28, 0.29$ 和 0.4 时, 失稳所用的时间分别为: $14, 270, 3000, 260$ 和 25 . 虽然 $b/a = 0.28$ 和 0.1 所对应的涡街都是不稳定的, 但是失稳所需时间却相差两个数量级, 这样的差别是应该引起注意的.

3 扰动量为有限大小时卡门涡街的稳定性

由上节计算可知, 出现于 $\lambda = 2a$ 的亚谐波是最不稳定的扰动波 (其不稳定的 b/a 区域最大), 出现于 $\lambda = 3a$ 是有一定稳定区域 (失稳时间为 ∞ 之区域) 的扰动波. 这两种情况是卡门涡街线性稳定性中的两种典型情况. 不失一般性, 我们可在这两种情况下研究有限扰动的稳定性. 初始时, 先在 x 和 y 方向上分别给某涡以有限大小的位移扰动 ξ 和 η , 取 $r_0 a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ 分别为: $0.01a, 0.005a$ 和 $0.001a$, 而 $\alpha = \text{tg}^{-1}(\eta/\xi)$ 分别为: $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ 和 315° . 数值计算仍采用双精度, 结果表明, 当 $\lambda = 2a$ 时, 涡街对所有 b/a 都是不稳定的. 甚至, 在 $\lambda = 3a$ 时, 原来对无穷小扰动是稳定的区域, 此时在有限扰动下也变得不稳定了 (如图 4 和图 5), 这说明扰动量大小对稳定性起着很大的作用. 失稳所需时间随 r_0 的不同而不同, 且也随位移扰动方向角 α 而变化, 但变化不甚大. 有趣的是, 对每一种扰动情况, 失稳所需的时间都有一个极大值, 对应于这个极大值的 b/a 值如表 1 所示.

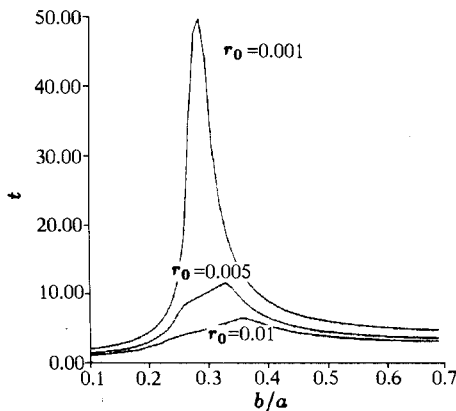


图 4 卡门涡街受有限扰动的持续时间
($a = 1, \lambda = 2a, D_0 = 0.1, \alpha = 315^\circ$)
Fig.4 The duration of Kármán vortex street perturbed by definite disturbances

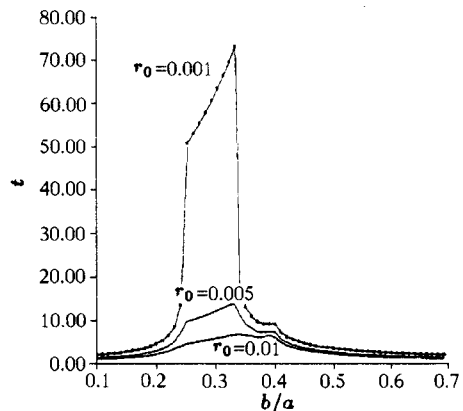


图 5 卡门涡街受有限扰动的持续时间
(● 是所计算的数据点)
($a = 1, \lambda = 3a, D_0 = 0.15, \alpha = 315^\circ$)
Fig.5 The duration of Kármán vortex street perturbed by definite disturbances
(● calculated result)

表 1 对应于失稳所需最大时间的 b/a 值

Table 1 Magnitude of b/a corresponding to the max. duration of stability

r_0	$\alpha(^{\circ})$	max. duration appeared	
		$\lambda = 2a$	$\lambda = 3a$
0.001	0~360	0.28	0.3~0.4
0.005	0~360	0.29~0.33	0.3~0.4
0.01	0~360	0.3~0.36	0.3~0.4

可以看到,对有限大小的扰动量,卡门涡街失稳最慢时的尺寸比 b/a 介于 0.3~0.4 间,已不再是 0.2805,这就提供了一个解释:为什么物理实验和数值计算中比较稳定的涡街尺寸比都大于 0.2805. 其实流动中(无论是物理的还是数值计算的)扰动总是个有限大小的量,因而其稳定性也必然表现为这种有限扰动的稳定性.

4 卡门涡街形成的直接数值模拟

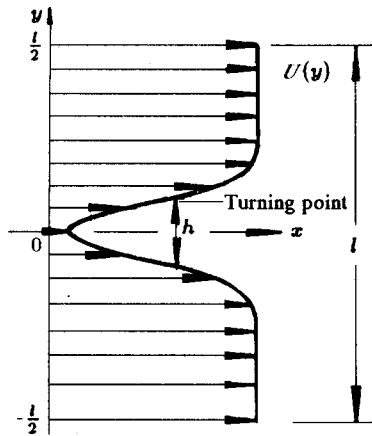


图 6 高斯尾迹分布速度剖面
Fig.6 Velocity profile of Gaussian wake

Jimenez^[6] 认为真实涡街的保持是由于粘性的影响. 为了研究有粘性和有涡核情况下卡门涡街的保持性问题,我们用伪谱方法^[10] 计算了粘性流体中具有二维高斯型速度剖面的尾迹从失稳发展成卡门涡街的情况.

计算区域为一正方形 ($0 < x < l, -l/2 < y < l/2$) (见图 6). 在 x 方向上使用了周期性边界条件,在 y 方向上,将流动对 $y = -l/2, l/2$ 作镜像开拓,则此方向上各物量将是 $2l$ 为周期的量. 十分自然地在 x 和 y 方向上选取三角函数为基函数进行展开.

初始速度为

$$U(y) = U_{\infty}(1.1 - e^{-2y^2/h^2})$$

Aref 等^[8] 曾用 VIC 方法计算过无粘情况下的类似问题,得到涡街的尺寸比介于 $0.3 < b/a < 0.6$.

我们感兴趣的不是这种速度分布怎样失稳,而是失稳后形成卡门涡街的尺寸比是多少,它是否与上面的有限扰动稳定性的结果相一致. 通过改变两剪切层拐点之间的距离与扰动波长的比值可以得到不同尺寸比的卡门涡街.

计算取初始扰动波的波数 $k = 3$ 和 $4, l = 2\pi, Re = U_{\infty}l/\gamma = 1.4 \times 10^4, h/\lambda = 0.25, 0.28, 0.35, 0.365, 0.45, 0.5$ 和 0.55 , 这里 h 是两剪切层拐点之间的距离, $\lambda = 2\pi/k$ 为波长,在物理空间划分网格,点数为 64×64 , 初始小扰动波的幅值为 $0.001, \Delta t = 0.05$, 对于对流不稳定性情况 Δt 折算成距离,在实验观察范围内. 表 2 分别表示波数 $k = 3$ 和 4 时,所得到的涡街情况,由表 2 可见,所形成的涡街的尺寸比都处在 $0.3 \sim 0.5$ 之间,这与 [8] 的结果基本上一致,而且持续的时间也出现极大值,与极大值对应的 $b/a = 0.4$ 左右. 此结果也与上

节有限扰动稳定情况的结果相一致. 计算中, 未见有 $b/a < 0.3$ 的涡街存在, 这与前人的许多结果一致, 从而进一步证实了有限扰动使最小不稳定点的 b/a 值比 0.2805 大的结果.

表 2 不同尾迹速度分布形成的卡门涡街的情况变化

Table 2 The variation of attribution of the Kármán vortex street for various wake velocity distributions

k	3					4			
h/λ	0.25	0.28	0.35	0.45	0.55	0.25	0.365	0.45	0.55
b/a	0.44	0.41	0.41	0.45	0.47	0.38	0.42	0.46	0.46
Duration	38	50	48	13	13	6	28	13	13

图 7 是表示 $k = 4, h/\lambda = 0.365$ 的等涡量线图. 从图中可清楚地看到, 尾迹从初始阶段受扰动发展成卡门涡街的过程和所形成的卡门涡街最终呈现失稳情况. 由此计算结果可见, 粘性并未使卡门涡街趋于稳定, 它最终仍将失去稳定性.

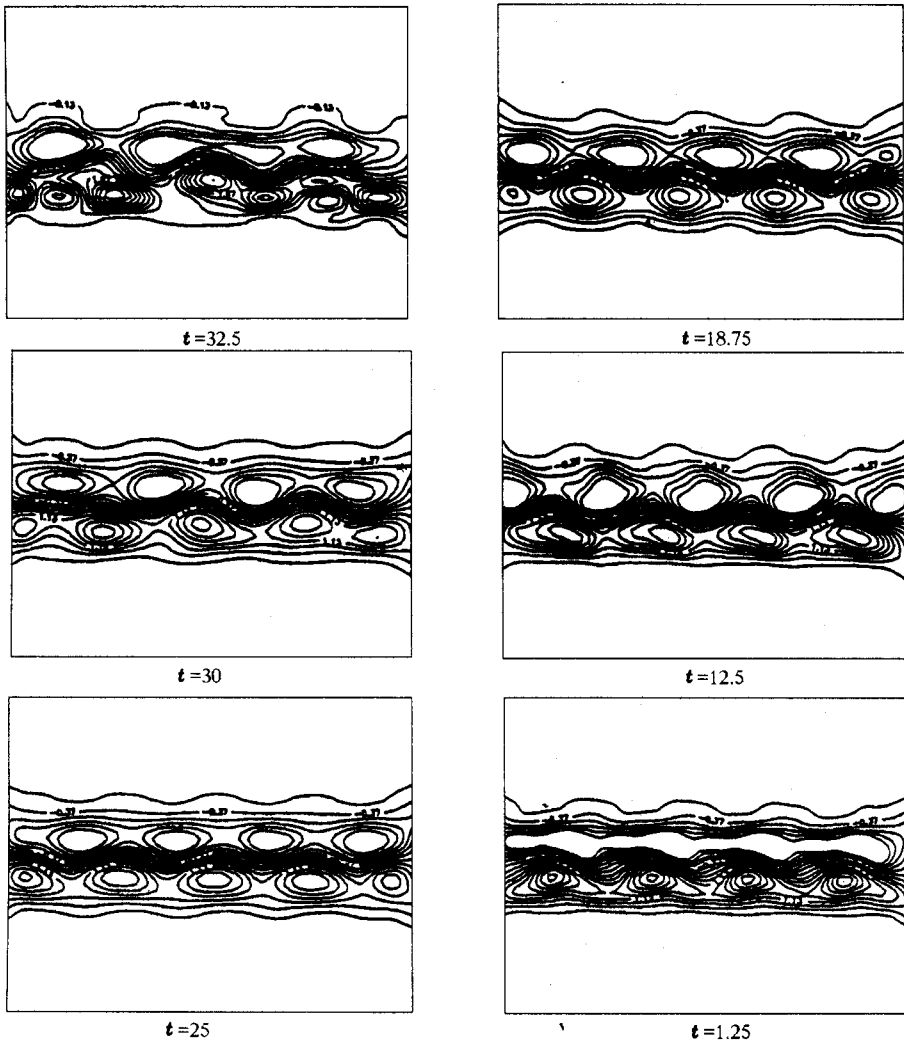


图 7 卡门涡街形成过程的等涡线图 ($k = 4, h/\lambda = 0.365$)
Fig.7 Procedure of Kármán vortex street formation and the corresponding vorticity contours

5 结 论

对于不同计算模型, 不论是有粘或无粘, 有涡核或无涡核, 本文计算结果均表明: 卡门涡街是不稳定的. 至于为何在实验和数值计算中又都能看到似乎是稳定的卡门涡街, 作者认为: 一个较合理的解释应是卡门涡街在一定尺寸比 b/a 情况下, 其失稳速度极慢, 而有慢不稳定性. 一般观察到的涡街处于这种慢失稳过程. 在卡门涡街表现出慢不稳定性的尺寸比范围, 实验和数值计算结果均符合得比较好, 这说明慢不稳定性确实能经常在涡街的演变过程中起关键作用.

参 考 文 献

- 1 V.Karman T. Ueber den Mechanismus des Fluessigkeits und Luftwiderstands, *Phys Zeitschrift*, 1912, 13: 49~59
- 2 Lamb H. *Hydrodynamics* (6th Edition). New York: Dover Publications, 1945
- 3 Rosenhead L. Vortex systems in wakes, *Advances in applied mechanics*. 1953, 3: 185~195
- 4 Sirovich L, Lim C. Comparison of experimental with the dynamics of the von Karman vortex trail. In: Hussaini MY, Salas M ed. *Vortex Dominated Flows*, ed. New York: Springer, 1986
- 5 Kotchin NE, Kibel IA, Roze NV. *Theoretical Hydrodynamics*, New York: Interscience Publishers, 1964
- 6 Jimenez J. On the linear stability of the inviscid Karman vortex street. *JFM*, 1987 (178): 177~194
- 7 Wille R. Karman vortex street. *Adv Appl Mech*, 1960, 6: 273~287
- 8 Aref H, Siggia E. Evolution and breakdown of a vortex street in two dimensions. *JFM*, 1981 (109): 435~463
- 9 Saffman PG, Schatzman JC. Stability of a vortex street of finite vortices. *JFM*, 1982 (117): 171~185
- 10 单肖文, 是勋刚. 用伪谱方法对平面自由剪切层的拟序结构的直接数值模拟. 见: 是勋刚主编. 第四届全国流体力学学术会议文集. 北京: 北京大学出版社, 1989. 33

ON THE SLOW INSTABILITY OF KÁRMÁN VORTEX STREET

Tang Shaojie Zhuang Fenggan

Xin Dingding

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy
of Sciences, Beijing 100080, China*)

(*Institute of Fluid Mechanics, Beijing University of
Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Abstract The Kármán vortex street being linearly stable for an isolated case according to its classical point-vortex model has been shown numerically to hold also for other more complicated models. The stability of the Kármán vortex street verified by using point-vortex model when perturbed infinitesimally is however a "slow instability" as shown by the simulation when the street is to be perturbed by finite disturbances. The concept of "slow instability" was verified to exist also in the case of wake flow by using the pseudospectral method for simulating the development of vortex street by means of the direct numerical simulation.

Key words Kármán vortex street, stability, numerical simulation