

# 拟压缩性方法在非定常球形 Couette-Taylor 流模拟中的应用

袁 礼 傅德薰

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘 要** 本文以拟压缩性法和物理时间/伪时间双重时间推进, 数值求解非定常不可压缩流  $N-S$  方程。拟压缩性项是对伪时间的导数项, 在每一物理时间层, 进行对伪时间的推进使拟压缩性项趋于零, 从而使连续方程得到满足。用 Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel (LU-SGS) 格式求解离散所得的方程。针对前人 LU-SGS 格式未计及隐式物理粘性, 在计算中低  $Re$  数流动时容易发散或造成收敛率低的问题, 利用简化的隐式粘性项改善了格式的稳定性, 并用三阶迎风紧致差分逼近无粘通量, 提高了伪时间推进的收敛率。模拟了间隙比  $\sigma = 0.18$  的两同心旋转球之间轴对称 Couette-Taylor 流的 0-、1-和 2-涡三种流态和它们之间的转变过程。

**关键词** 拟压缩性方法, LU-SGS 格式, 非定常流, 球形 Couette 流。

## 1 引 言

求解非定常不可压  $N-S$  方程的困难在于不可压  $N-S$  方程有椭圆性, 连续方程中没有压力时间导数项, 压力场和速度场是隐式地关联起来的。大多数求解原始变量的方法都需要求解压力 Poisson 方程, 因而计算量较大。尽管用流函数-涡形式的方程可以有效地求解二维非定常流问题, 但难以推广到三维, 因此发展不可压缩流的有效计算方法仍然是 CFD 研究者追求的目标之一。

在现有原始变量类方法中, 拟压缩性方法<sup>[1]</sup>对定常流问题计算效率较高<sup>[2-4]</sup>。其原理是在连续方程中加入压力时间导数项, 使速度和压力显式地匹配起来, 得到双曲型方程组, 进而可用时间推进法求解。当达到定常态时, 拟压缩性项消失, 连续方程得到满足。然而此方法不能直接用于计算非定常流, 因为加入连续方程中的压力时间导数项将破坏解的时间精度。

为克服此困难, Merkle 和 Althavale<sup>[5]</sup>首先应用双重时间推进来提高解的时间精度。数值解在物理时间上推进的同时, 还在伪时间步迭代, 使得在每一物理时间层上, 连续方程得到满足。后来的研究者则集中于改善伪时间步迭代方法的收敛率, 如 Rogers 等人<sup>[6,7]</sup>用基于通量差分裂 (Flux-Difference Splitting 或 FDS) 的上风差分来离散无粘项, 用 SGS (Symmetric Gauss-Seidel) 线松弛方法求解。尽管他们的方法具有较高的收敛率, 但每个迭代步的计算量却很大。

最近 Yoon 和 Kwak<sup>[8]</sup>将 LU-SGS 格式应用于拟压缩性方法用来计算三维定常流, 大大减少了每步的计算量, 其数值试验表明: 用 LU-SGS 计算的时间是对角化 ADI 的 1/4, 是 SGS 线松弛法的 1/10。Honam 和 Eberhardt<sup>[9]</sup>比较了 LU-SGS 格式和 SGS 线松弛计算二维非定常流的效率, 发现 LU-SGS 每迭代一步的计算时间比线松弛法少得多, 然而在每个物理时间层为了使解收敛到所要

本文于 1994 年 9 月 8 日收到。本课题得到国家自然科学基金重大项目和博士后科学基金资助。

求的精度, 要迭代更多步数, 总的计算时间仍多于线松弛。我们发现 Honam 等人在比较这两种格式时没有计及隐式物理粘性项的影响, 因此可能更降低了 LU-SGS 进行子迭代的收敛率。本文在 LU-SGS 格式左端的隐式项中恢复物理粘性项, 不仅解决了该格式计算中低  $Re$  数不稳定的问题, 还提高子迭代的收敛率。

在 LU-SGS 格式中, 左端隐式项的离散和右端显式项的离散通常应当一致, 才能保证有较好的收敛率。本文数值试验表明, 如果左端用[10]提出的近似 Jacobian 矩阵, 右端用中心差分或 FDS, 收敛率较差。文献[9]的计算结果也如此。但用近似 Jacobian 矩阵无需矩阵求逆, 因此本文仍采用之, 对右端显式项中的无粘通量用文献[11]提出的三阶迎风紧致差分来离散, 并对周期边界条件作隐式处理。这样所得到的格式也有较高的收敛率, 对所模拟的问题, 使散度下降到  $10^{-3}$  所需要的子迭代次数为 7—14, 和线松弛<sup>[6,7]</sup>相当。

众所周知, 两同心球腔间的流动当内球旋转、外球静止时, 只有在很小  $Re$  数才有唯一的解, 当  $Re$  数大于某一临界值时流动失稳, 可出现非唯一的流态。这些流态取决于初始状态、外部驱动条件的历程控制参数。本文将所发展的方法应用于模拟两同心球之间的 Couette 流, 模拟了不同流态之间的转变过程, 特别成功地模拟出了 0-涡或 2-涡受关于赤道非对称的扰动而逐渐向 1-涡转变的过程。

## 2 主控方程

设  $t$  为时间;  $p$  和  $u, v, w$  为压力和直角坐标系中的速度分量;  $\hat{Q}$  为原参数守恒型变量;  $\hat{E}, \hat{F}$  和  $\hat{G}$  为无粘通量;  $\hat{E}_v, \hat{F}_v$  和  $\hat{G}_v$  为粘性通量。在一般曲线坐标系中, 非定常不可压  $N-S$  方程为<sup>[6,7,9]</sup>:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = - \frac{\partial(\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} - \frac{\partial(\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} - \frac{\partial(\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} \quad (1)$$

这里

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= I_m \hat{Q}, \hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} U \\ \xi_u u + Uu + \xi_x p \\ \xi_v v + Uv + \xi_y p \\ \xi_w w + Uw + \xi_z p \end{bmatrix} \\ \hat{F} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} V \\ \eta_u u + Vu + \eta_x p \\ \eta_v v + Vv + \eta_y p \\ \eta_w w + Vw + \eta_z p \end{bmatrix}, \hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} W \\ \zeta_u u + Wu + \zeta_x p \\ \zeta_v v + Wv + \zeta_y p \\ \zeta_w w + Ww + \zeta_z p \end{bmatrix} \\ U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \\ I_m &= \text{diag}\{0, 1, 1, 1\} \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $U, V, W$  是逆变速度分量,  $J$  是坐标变换 Jacobian 矩阵的行列式。对层流, 粘性通量的表达式, 见文献[7,9], 本文从略。

## 3 拟压缩性方法和双重时间推进

对动量方程中的物理时间导数用二阶三点向后差分, 方程(1)变成

$$I_m \frac{\hat{3}Q^{n+1} - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} = -\hat{R}^{n+1} \quad (3)$$

式中上标  $n$  代表  $t = n\Delta t$  时间层,  $\hat{R}$  代表方程(1)的右端项。为了得到方程(3)在  $n+1$  时间层的解, 需要迭代方程组使速度满足无散度条件, 这可用拟压缩性方法来实现。针对  $n+1$  时间层再引入伪时间变量  $\tau$ , 在连续方程中引入压力对伪时间的导数项得到

$$\frac{1}{J} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \tau} = -\beta \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{W}{J} \right) \right]^{n+1} \quad (4)$$

在动量方程中引入速度对伪时间的导数项  $\frac{1}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \tau}$ , 得到如下的方程

$$\frac{\hat{\Delta}Q^{n+1}}{\partial \tau} + \frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ 3\hat{Q}^n - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1} \end{bmatrix} = -\hat{R}^{n+1} \quad (5)$$

在伪时间上对方程(5)进行迭代, 直到  $\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} = 0$ , 则原主控方程(3)得到满足, 其速度场散度为零。

对方程(5), 先用向后 Euler 差分将拟时间导数项离散, 得到

$$\frac{\hat{\Delta}Q^{n+1,m}}{\Delta \tau} = -\hat{R}^{n+1,m+1} - \frac{I_m}{\Delta t} (1.5\hat{Q}^{n+1,m-1} - 2\hat{Q}^n + 0.5\hat{Q}^{n-1}) \quad (6)$$

式中  $\hat{\Delta}Q^{n+1,m} = \hat{Q}^{n+1,m+1} - \hat{Q}^{n+1,m}$

将  $m+1$  伪时间层的残差对  $m$  层线性化, 得到 delta 形式的方程

$$\left[ \frac{I}{\Delta \tau} + \frac{1.5I_m}{\Delta t} + \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{Q}} \right)^{n+1,m} \right] \hat{\Delta}Q^{n+1,m} = -\hat{R}^{n+1,m} - \frac{I_m}{\Delta t} (1.5\hat{Q}^{n+1,m} - 2\hat{Q}^n + 0.5\hat{Q}^{n-1}) \quad (7)$$

可用 Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel 格式<sup>[8-10]</sup> 解方程(7), 其形式可表成

$$LD^{-1}U\hat{\Delta}Q = -\Delta\tau\hat{R}^{n+1,m} - \Delta\tau\frac{I_m}{\Delta t}(1.5\hat{Q}^{n+1,m} - 2\hat{Q}^n + 0.5\hat{Q}^{n-1}) \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} L &= I + \Delta\tau \left[ \frac{1.5I_m}{\Delta t} + (\nabla_{\xi} \hat{A}^+ + \nabla_{\eta} \hat{B}^+ + \nabla_{\zeta} \hat{C}^+ - \hat{A}^- - \hat{B}^- - \hat{C}^-) \right] \\ D &= I + \Delta\tau \left[ \frac{1.5I_m}{\Delta t} + (\hat{A}^+ + \hat{B}^+ + \hat{C}^+ - \hat{A}^- - \hat{B}^- - \hat{C}^-) \right] \\ U &= I + \Delta\tau \left[ \frac{1.5I_m}{\Delta t} + (A_{\xi} \hat{A} + \nabla_{\eta} \hat{B}^- + A_{\zeta} \hat{C}^- + \hat{A}^+ + \hat{B}^+ + \hat{C}^+) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $\hat{A} = \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{Q}}$ , 余类推。为了达到标量求逆, (9)式的 Jacobian 矩阵可用近似矩阵来构造:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{\pm} &= \frac{1}{2} [\hat{A} \pm \rho(\hat{A})I] \\ \rho(\hat{A}) &= \kappa \max[|\lambda(\hat{A})|] \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\lambda(\hat{A})$  为 Jacobian 矩阵  $\hat{A}$  的特征值, 矩阵  $\hat{A}$  及其特征值详见[7]。 $\kappa \approx 1$ , 本文一律取  $\kappa = 1$ 。为节省计算量, 本文引进简化的隐式粘性来增强稳定性。此时,

$$\hat{A}^{\pm} = \frac{\hat{A} \pm \rho(\hat{A})I}{2} \pm \frac{\alpha}{2} I_m \quad (11)$$

式中,  $\alpha = \gamma_1 = \frac{1}{Re} \nabla_{\xi_i} \cdot \nabla_{\xi_i}$ , 这样的 LU-SGS 格式等价于式(7)的 SGS 点松弛格式。由于 LU-SGS 格式具有很好的对角占优特点, 伪时间步长  $\Delta\tau$  即使取很大, 计算也收敛, 数值试验显示  $\Delta\tau$  取

$5 \sim \infty$ , 所对应的收敛速度相差不大, 为了使  $\beta$  影响消失, 本文令  $\Delta\tau = \infty$ , 即采用近似 Newton 迭代。

对于(8)式右端项  $\hat{R}^{n+1,m}$  中所含的无粘通量一阶导数, 可用三阶迎风紧致差分离散, 迎风是根据无粘能通 Jacobian 矩阵的特征值正负来决定。以  $\xi$  方向为例, 先把方程改写成非守恒型:

$$D_{\xi} E = AD_{\xi} Q = A^{+} F^{+}(Q) + A^{-} F^{-}(Q) \quad (12)$$

其中,  $A^{\pm} = T_{\xi} A_{\xi}^{\pm} T_{\xi}^{-1}$ 。采用三阶精度迎风紧致差分<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2F_i^{+} + F_{i-1}^{+}) &= \frac{1}{6\Delta\xi}(-5Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1}) \\ \frac{1}{3}(2F_i^{-} + F_{i+1}^{-}) &= \frac{1}{6\Delta\xi}(5Q_{i+1} - 4Q_i - Q_{i-1}) \end{aligned} \quad (13)$$

除周期边界条件外, 其他所有边界条件都显式处理。在物面上速度满足无滑移条件, 压力用建立在边界上的动量方程求得。在对称轴上用对称条件。

#### 4 计算结果

用所发展的方法模拟了两同心球之间当内球旋转、外球不动的轴对称 Couette-Taylor 流。对此流动问题已有大量的数值模拟和实验结果<sup>[12,13]</sup>, 因此可用来检验数值方法。图 1 为计算区域示意图, 计算网格为  $129(\theta) \times 21(\tau) \times 1(\psi)$ , 假设流动为轴对称。取速度场的最大散度  $\varepsilon_{\max}$  作为收敛标准, 收敛到  $\varepsilon_{\max} = 10^{-3}$  需要 7-14 次子迭代

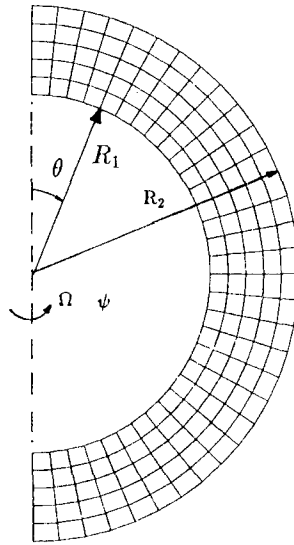


图 1 两同心球几何结构和网格示意图

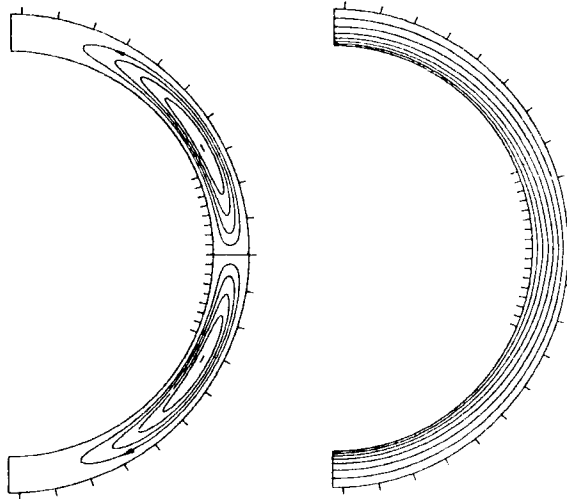
图 2 为  $Re = \frac{\Omega R_1^2}{\nu} = 600$  时的 0-涡流态, 因  $Re$  数小于临界  $Re$  数(对于  $\sigma = 0.18$ ,  $Re_c \approx 645$ ), 属亚临界状态。此  $Re$  数下只有唯一稳定的 0-涡流态。 $Re$  数大于临界  $Re$  数时, 流动将失稳, 失稳后可以存在多个平衡态。图 3 为 0-涡向  $Re = 800$  的 2-涡转变的过程, 其初场为 Stokes 流, 在  $t = 0$  突然将  $Re$  数增大到 800, 流动就向稳定的 2-涡转变, 可以发现 2-涡的形成和子午面剪切层失稳有关, 并且整个过程中流动关于赤道对称。2-涡可以在  $800 \leq Re \leq 1500$  之间保持稳定。

1-涡的产生是个很特殊的过程, 这是因为 1-涡的形成与破坏赤道对称性的扰动有关, 这种扰动得到放大、导致流动失稳的区域为  $645 \leq Re \leq 775$ 。本文取终态  $Re = 755$ , 则可从  $Re = 600$  的 0-

涡或  $Re = 1500$  的 2-涡初始状态算出 1-涡。一旦 1-涡形成, 再将  $Re$  数增大一些, 1-涡仍保持稳定。所以在  $Re$  数大于 800 左右后, 至少会有 1-涡和 2-涡的两种稳定的流态。图 4 是从  $Re = 600$  的 0-涡突然令  $Re = 755$  所得的 0→1 转变, 图 5 是从  $Re = 1500$  的 2-涡突然令  $Re = 755$  的 2→1 转变, 可见这两个向 1-涡的转变过程中有破坏赤道对称性的非线性扰动起主导作用, 相反地, 从 1→0 转变则保持了赤道对称性, 见图 6。计算出的旋涡尺寸和实验[13]的比较见表 1, 可见误差较小。

表 1 最邻近赤道的旋涡尺寸。单位: 缝宽

	$Re = 800$		$Re = 1500$	
	1-涡	2-涡	1-涡	2-涡
本文	1.03	0.91	1.4	1.18
实验[13]	1.02	0.9	1.3	1.16



(a) 流函数分布 (b) (赤道)方位速度分布  $\Omega = \frac{w}{r \sin \theta}$

图 2 0-涡在子午面  $(r, \theta)$  内的流态,  $Re = 600, \sigma = 0.18$ 。外球上的标度为球缝宽度  $\sigma$ , 内球上的标度  $\Delta \theta = \frac{\pi}{64}$ 。

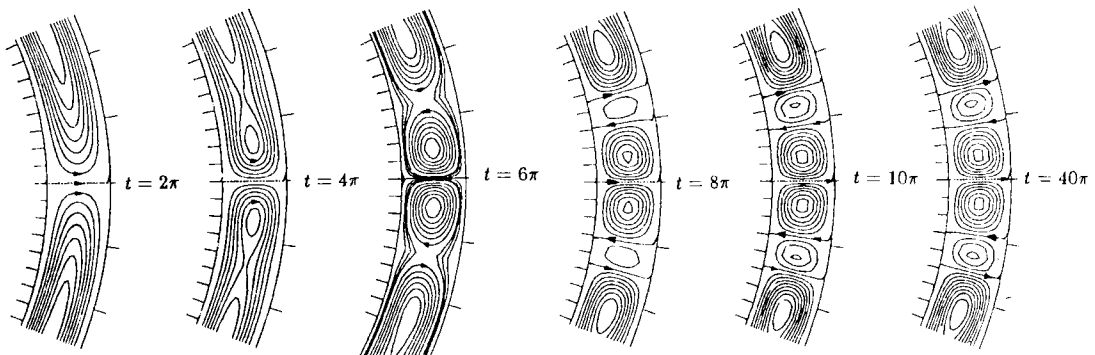
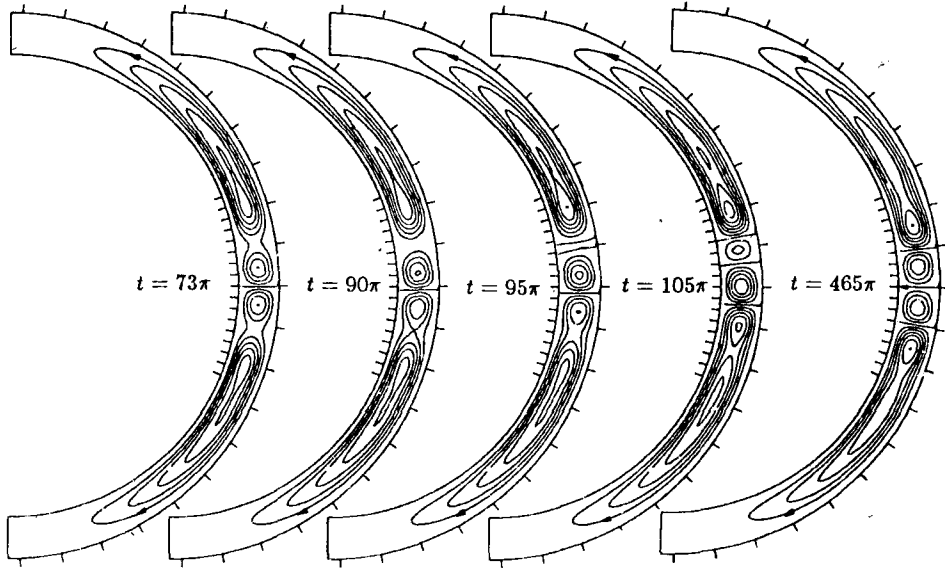
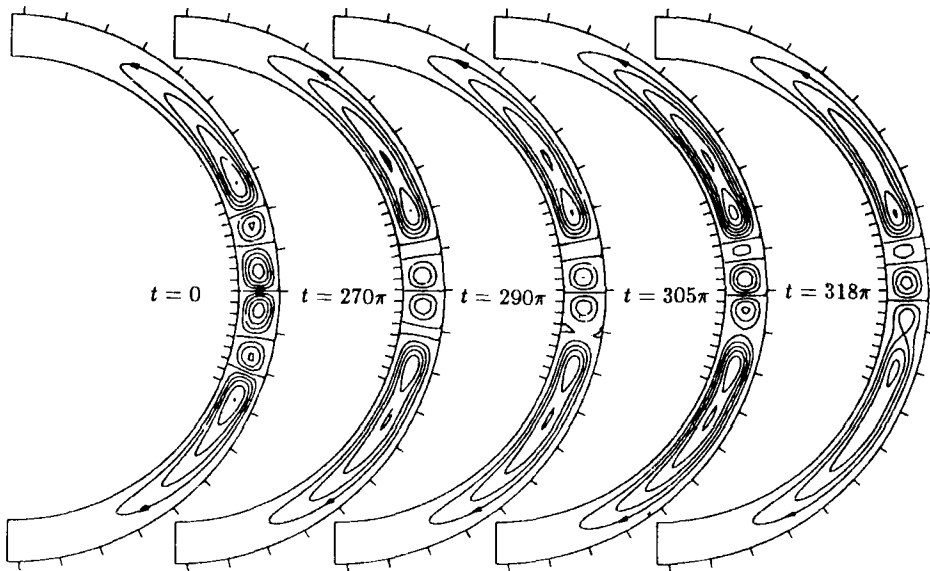


图 3 0-涡→2-涡转变过程中的子午面流态,  $Re = 800, \sigma = 0.18$

图 4 0-涡 $\rightarrow$ 1-涡转变过程中的子午面流态,  $Re = 755$ ,  $\sigma = 0.18$ 图 5 2-涡 $\rightarrow$ 1-涡转变过程中的子午面流态,  $Re = 755$ ,  $\sigma = 0.18$ 

## 5 结 论

本文发展了结合双重时间推进和拟压缩性项方法以求解非定常不可压  $N-S$  方程的数值方法, 通过在每个物理时间层进行对伪时间的子迭代(推进), 求出时间精确的解。将 LU-SGS 格式应用于子迭代求解, 利用对隐式粘性项的修正改善了 LU-SGS 的稳定性, 通过对左端项用近似 Jacobian 矩阵和右端项用三阶迎风紧致差分, 提高了子迭代的收敛速度, 使 LU-SGS 格式能有效地模拟非

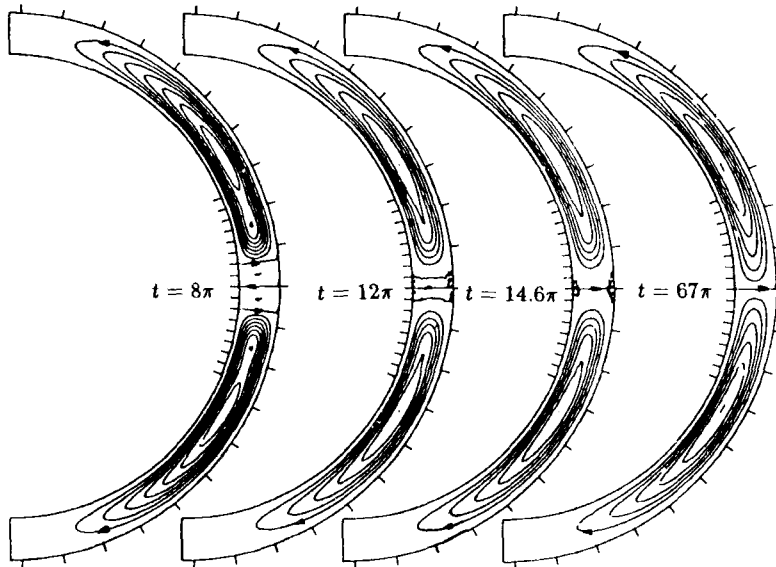


图6 1-涡 $\rightarrow$ 0-涡转变过程中的子午面流态,  $Re = 600$ ,  $\sigma = 0.18$

定常不可压流动。正确模拟出了两同心球之间的流态和它们之间的转变过程。特别成功地模拟了由0-涡或2-涡通过赤道非对称的中间阶段过渡到对称的1-涡的对称破缺失稳过程。

### 参 考 文 献

- 1 Chorin A J. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. *J. Comput. Phys.*, 1968, 2: 12-26.
- 2 Kwak D., Chang J L C. Shanks S P. and Chakravarthy S R. A Three-dimensional Incompressible Navier Stokes Flow Solver Using Primitive Variables. *AIAA J.*, 1986, 24: 390-396.
- 3 Rogers S E., Chang, J L C. and Kwak D. *J. Comput. Phys.*, 1987, 73: 364-379.
- 4 Hartwich P M. and Hsu C H. High Resolution Upwind Schemes for the Three-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equation. *AIAA 1987*, 87-0547.
- 5 Merkle C L. and Athavale M. Time-accurate Unsteady Incompressible Algorithms Based on Artificial Compressibility. *AIAA 1987*, 87-1137.
- 6 Rogers S E. and Kwak D. Upwind Differencing Scheme for the Time-accurate Incompressible Navier Stokes Equations. *AIAA J.*, 1990, 28: 253-262.
- 7 Rogers S E. and Kwak D. and Kiris C. Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations. *AIAA J.*, 1991, 29: 603-610.
- 8 Yoon S. and Kwak, D. Three-dimensional Incompressible Navier-Stokes solver Using Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Algorithm. *AIAA J.*, 1991, 29: 874-875.
- 9 OK Honam and Eberhardt D S. Development of an Unsteady Incompressible Navier-Stokes Solver and Application to the Computations of Separated Flows, *AIAA 1991*, 91-3266CP.
- 10 Yoon S. and Jameson A. Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations. *AIAA J.* 1988, 26: 1025-1026.
- 11 刘宏, 付德薰, 马延文. 中国科学 A 辑, 第 23 卷第 6 期, 1993, 23(6): 657.
- 12 Marcus P S. and Tuckerman L S. Simulation of Flow Between Concentric Rotating Spheres. Part. 1 & Part. 2, *J. Fluid Mech.*, 1987, 85: 1-65.
- 13 Wimmer M. Experiments on a Viscous Fluid Flow Between Concentric Rotating Spheres. *J. Fluid Mech.*, 1976, 78: 317-335.

## Application of Pseudo-compressibility Method to the Numerical Simulation of Unsteady Spherical Couette-Taylor Flow

*Yuan Li Fu De-xun*

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080)

**Abstract** Using the method of pseudo-compressibility and physical/pseudo dual time stepping, the numerical solution of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations is presented. The pseudo-compressibility terms are derivatives with respect to pseudotime. The satisfaction of the continuity equation and time accuracy are obtained in the numerical solutions by subiterating the equations in pseudotime for each physical time step. The equations are solved with a lower-upper symmetric Gauss Seidel (LU-SGS) implicit scheme. A simple modification to former LU-SGS scheme is made by taking into account the implicit viscous terms due to linearization. This treatment avoids the numerical instability and lower convergence of LU-SGS scheme and together with the use of third-order upwind compact finite difference for the convective terms, leads to fast convergence for the subiterations. The flow between two concentric rotating spheres is computed and three vortex modes, i. e. 0-vortex, 1-vortex and 2-vortex are well simulated. The transitions of vortex modes, 0→2, 0→1, 2→1 and 1→0 are also presented.

**Key words** pseudo-compressibility method, LU-SGS scheme, unsteady flow, spherical Couette flow